КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Линейная алгебра

ЗАДАЧА 1

Вычислить определитель.

1.1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. **1.2.** $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 8 \end{vmatrix}$. **1.3.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. **1.4.** $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 10 \\ -2 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

1.5. $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$. **1.6.** $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$. **1.7.** $\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 \\ 9 & -3 & 0 \\ -5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$. **1.8.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$. **1.9.** $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

1.10. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -6 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$.

ЗАДАЧА 2

Найти матрицу X из матричного уравнения (решать, используя обратную матрицу).

2.1. $X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. **2.2.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2.3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. **2.4.** $X\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.5. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. **2.6.** $X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.7. $X\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **2.8.** $X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.9. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. **2.10.** $X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

ЗАДАЧА 3

Решить систему уравнений методом Гаусса.

3.1. $\begin{cases} x+y+z=6, \\ 3x+4y+6z=29, \\ x+y+2z=9, \\ x+2y+3z=14. \end{cases}$ **3.2.** $\begin{cases} 5x+4y+3z=-4, \\ 16x+8y+8z=-16, \\ 3x+3y+2z=-2, \\ 8x+y+3z=-10. \end{cases}$ **3.3.** $\begin{cases} 4x-3y+2z=-11, \\ 8x-6y+3z=-21, \\ 2x-2y+z=-5, \\ 2x-y=-5. \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} 2x-3y+z=0, \\ 7x-7y+4z=3, \\ 3x-3y+z=4, \\ 2x-y+2z=-1. \end{cases}$ **3.5.** $\begin{cases} 2x-3y+z=-11, \\ 7x+3y-6z=-21, \\ x+5y-4z=3, \\ 4x+y-3z=-13. \end{cases}$ **3.6.** $\begin{cases} 2x+y+3z=-5, \\ x+3y+7z=-14, \\ -4x-2y-z=-5, \\ 3x+4y+5z=-4. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} 2x+3y+z=2, \\ 2x+7y=3, \\ -x+2y-2z=-2, \\ x+2y+z=3. \end{cases}$ **3.8.** $\begin{cases} x+2y+z=-3, \\ 6x+8z=22, \\ 2x-y+3z=11, \\ 3x-y+4z=14. \end{cases}$ **3.9.** $\begin{cases} 2x+y+3z=3, \\ 7x+8z=11, \\ 3x+2y+4z=7, \\ 2x-3y+z=1. \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} 2x+y+3z=5, \\ 3x+2y+4z=5, \\ x+5y+3z=-8 \\ x+y+z=0. \end{cases}$

Векторная алгебра

ЗАДАЧА 4

Найти площадь и длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}$.

4.1. $\overline{a}=\overline{p}+2\overline{q},\ \overline{b}=4\overline{p}-\overline{q};\ |\overline{p}|=1, |\overline{q}|=2, (\widehat{pq})=\pi/6$.

4.2. $\overline{a}=4\overline{p}-\overline{q},\ \overline{b}=\overline{p}+2\overline{q};\ |\overline{p}|=7, |\overline{q}|=6, (\widehat{pq})=\pi/4$.

4.3. $\overline{a}=5\overline{p}+\overline{q},\ \overline{b}=\overline{p}-3\overline{q};\ |\overline{p}|=1, |\overline{q}|=2, (\widehat{pq})=\pi/3$.

4.4. $\overline{a} = 7\overline{p} + 2\overline{q}$, $\overline{b} = \overline{p} + 3\overline{q}$; $|\overline{p}| = 3, |\overline{q}| = 4$, $(\widehat{pq}) = \pi / 2$.

4.5. $\overline{a} = 6\overline{p} + \overline{q}$, $\overline{b} = \overline{p} - \overline{q}$; $|\overline{p}| = 3, |\overline{q}| = 4$, $(\widehat{pq}) = \pi / 4$.

4.6. $\overline{a} = 10\overline{p} + \overline{q}$, $\overline{b} = 3\overline{p} - \overline{q}$; $|\overline{p}| = 4, |\overline{q}| = 1$, $(\widehat{pq}) = \pi / 6$.

4.7. $\overline{a} = 3\overline{p} + 4\overline{q}$, $\overline{b} = \overline{p} - \overline{q}$; $|\overline{p}| = 3, |\overline{q}| = 2$, $(\widehat{pq}) = \pi / 2$.

4.8. $\overline{a} = 7\overline{p} - \overline{q}$, $\overline{b} = \overline{p} + 3\overline{q}$; $|\overline{p}| = 3, |\overline{q}| = 4$, $(\widehat{pq}) = \pi / 3$.

4.9. $\overline{a} = \overline{p} + 3\overline{q}$, $\overline{b} = 3\overline{p} - \overline{q}$; $|\overline{p}| = 3, |\overline{q}| = 5$, $(\widehat{pq}) = \pi / 3$.

4.10. $\overline{a} = \overline{p} + 3\overline{q}$, $\overline{b} = 5\overline{p} - \overline{q}$; $|\overline{p}| = 2, |\overline{q}| = 5$, $(\widehat{pq}) = \pi / 2$.

ЗАДАЧА 5

Даны вершины треугольника *A, B, C*. Найти косинус угла *BAC*, проекцию стороны *AB* на сторону *AC* и площадь треугольника *ABC*.

5.1. *A*(1;–2;3); *B*(0;–1;2); *C*(4;0;4).

5.2. *A*(0;–3;6); *B*(–12;–3;–3); *C*(–9; –3;–6).

5.3. *A*(3;3;–1); *B*(5;5;–2); *C*(4;1; 1).

5.4. *A*(–1;2;–3); *B*(3;4;–6); *C*(1;1;–1).

5.5. *A*(–4;–2;0); *B*(–1;–2;4); *C*(3;–2;1).

5.6. *A*(5;3;–1); *B*(5;2;0); *C*(6;4;–1).

5.7. *A*(–3;–7;–5); *B*(0;–1;–2); *C*(-5;-6;-6).

5.8. *A*(3;3;–1); *B*(1;–5;2); *C*(4;4;1).

5.9. *A*(2;1;–1); *B*(6;–1;–4); *C*(4;2;1).

5.10. *A*(3;–6;9); *B*(0;–3;6); *C*(5;-3;7).

ЗАДАЧА 6

Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках *A*, *B*, *C*, *D*.

6.1. *A*(14;4;5), *B*(–5;–3;2), *C*(–2;–6;–3), *D*(–2;2;–1).

6.2. *A*(1;2;0), *B*(3;0;–3), *C*(5;2;6), *D*(8;4;–9).

6.3. *A*(2;–1;2), *B*(1;2;–1), *C*(3;2;1), *D*(–4;2;5).

6.4. *A*(2;–1;2), *B*(1;2;–1), *C*(3;2;1), *D*(–4;2;5).

6.5. *A*(1;1;2), *B*(–1;1;3), *C*(2;–2;4), *D*(–1;0;–2).

6.6. *A*(2;3;1), *B*(4;1;–2), *C*(6;3;7), *D*(7;5;–3).

6.7. *A*(1;5;–7), *B*(–3;6;3), *C*(–2;7;3), *D*(–4;8;–12).

6.8. *A*(–3;4;–7), *B*(1;5;–4), *C*(–5;–2;0), *D*(2;5;4).

6.9. *A*(–1;2;–3), *B*(4;–1;0), *C*(2;1;–2), *D*(3;4;5).

6.10. *A*(4;–1;3), *B*(–2;1;0), *C*(0;–5;1), *D*(3;2;–6).

Аналитическая геометрия

ЗАДАЧА 7

7.1. Даны вершины треугольника $A(1;2)$, $B(5;10)$, $C(11;4)$. Найти уравнение высоты, опущенной из вершины B.

7.2. Даны вершина треугольника $A(3;4)$, $B(8;12)$, $C(11;8)$. Найти уравнение медианы треугольника, проведенной из вершины B.

7.3. Даны вершины треугольника $A(4;5)$, $B(8,13)$, $C(14;7)$. Найти координаты центра описанной около треугольника окружности.

7.4. Даны вершины треугольника $A(-3;3)$, $B(4;4)$, $C(-1;12)$. Найти уравнение прямой, проходящей через точку B параллельно стороне AC.

7.5. Даны вершины треугольника $A(1;1)$, $B(7;9)$, $C(-3;2)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины C.

7.6. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $-3x-4y+10=0$, $-4x+3y-15=0$ и одна из его вершин $A(1;-1)$. Найти уравнения двух других его сторон.

7.7. Даны вершины треугольника $A(0;1)$, $B(4;9)$, $C(10;3)$. Найти острый угол между высотой, опущенной из вершины A и стороной AB.

7.8. Найти проекцию точки $P(-8;2)$ на прямую $4x+7y+13=0$.

7.9. Даны две вершины треугольника $A(-10;2)$, $B(6;4)$. Его высоты пересекаются в точке $D(5;2)$. Определить координаты третьей вершины C.

7.10. Найти острый угол между прямой $9x+3y-7=0$ и прямой, проходящей через точки $A(1;-1)$ и $B(5;7)$.

ЗАДАЧА 8

8.1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;2;3)$, $B(3;-1;1)$, $C(-3;2;1)$.

8.2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;1;1)$, $B(-1;2;3)$ и параллельной оси OX.

8.3. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-2;3;4)$, $B(2;5;-1)$ и параллельной оси OY.

8.4. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-3;2;1)$, $B(0;1;3)$ и параллельной оси OZ.

8.5. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;2;3)$ и ось OX.

8.6. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-4;2;-1)$ и ось OY.

8.7. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;-3;4)$ и ось OZ.

8.8. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;-2;3)$ и перпендикулярной плоскостям $x+y+z-4=0$, $3x-4y+z+5=0$

8.9. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-4;3;1)$ и параллельной векторам $\overline{a} = (1;2;-3)$, $\overline{b} = (-4;1;2)$.

8.10. Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точки $A(-2;1;5)$, $B(1;3;2)$.

ЗАДАЧА 9

9.1. Найти проекцию точки $P(6;4;7)$ на плоскость $x + y + z - 2 = 0$.

9.2. Найти проекцию точки $P(10;6;7)$ на плоскость $2x + y - z + 5 = 0$.

9.3. Найти проекцию точки $P(-2;11;7)$ на плоскость $-x + 2y + z - 1 = 0$.

9.4. Найти проекцию точки $P(10;7;-7)$ на плоскость $-2x - y + 2z - 4 = 0$.

9.5. Найти проекцию точки $P(-4;7;5)$ на плоскость $x - 2y - z + 5 = 0$.

9.6. Найти проекцию точки $P(2;-1;3)$ на прямую $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y+7}{5} = \dfrac{z-2}{2}$.

9.7. Найти проекцию точки $P(5;6;-9)$ на прямую $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{1}$.

9.8. Найти проекцию точки $P(5;5;-4)$ на прямую $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{3}$.

9.9. Найти проекцию точки $P(6;-16;5)$ на прямую $\dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{3}$.

9.10. Найти проекцию точки $P(3;2;6)$ на прямую $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+7}{2} = \dfrac{z-3}{-1}$.

ЗАДАЧА 10

Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, и найти координаты ее центра C, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис. Изобразить гиперболу на чертеже, указав фокусы, асимптоты и директрисы.

10.1. $9x^2 - 16y^2 - 18x - 32y - 151 = 0.$

10.2. $9y^2 - 16x^2 - 18y - 32x - 151 = 0.$

10.3. $25x^2 - 144y^2 - 50x - 576y - 4151 = 0.$

10.4. $25y^2 - 144x^2 - 864x - 50y - 4871 = 0.$

10.5. $9x^2 - 16y^2 + 36x + 96y - 252 = 0.$

Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс, и найти координаты его центра C, полуоси, эксцентриситет, уравнения директрис. Изобразить эллипс на чертеже, указав оси симметрии, фокусы и директрисы.

10.6. $9x^2 + 25y^2 - 18x + 50y - 191 = 0.$

10.7. $25x^2 + 16y^2 + 50x - 32y - 359 = 0.$

10.8. $25x^2 + 169y^2 - 50x + 676y - 3524 = 0.$

10.9. $169x^2 + 25y^2 + 1014x - 50y - 2679 = 0.$

10.10. $16x^2 + 25y^2 + 64x - 150y - 111 = 0.$

Введение в анализ

ЗАДАЧА 11

Найти предел, не пользуясь правилом Лопиталя.

11.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+5n^2+n}{1-n-n^4}.$ **11.2.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^{10}+5n^2-3}{(n+10)^{11}}.$ **11.3.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^6-4n^2+1}{n^4+2n^2-1}.$

11.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n^2-n^5}{n^3+3n^2+n+1}.$ **11.5.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^7+3n^2+1}{(2n+1)^3}.$ **11.6.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+2)^3}{n^3+2n^2+2n+2}.$

11.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+2}{2n}-\dfrac{n}{2}\right).$ **11.8.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2-(n-1)^2}{3n+1}.$ **11.9.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{n^2+2n}-n\right).$

11.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n+1}-\dfrac{2n-1}{2}\right).$

ЗАДАЧА 12

Найти предел, не пользуясь правилом Лопиталя.

12.1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}.$ **12.2.** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}.$ **12.3.** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-x-2}.$

12.4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+2x-15}$. 12.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+x^2+x}{x^4-x}$. 12.6. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{x^2+2x}$.

12.7. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-7x+12}$. 12.8. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-9}$. 12.9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2}{x^2-4x-5}$.

12.10. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4x-12}{x^2+5x+6}$.

ЗАДАЧА 13

Найти предел, не пользуясь правилом Лопиталя.

13.1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3+2x}-3}{x-3}$. 13.2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$. 13.3. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{x^2-64}$.

13.4. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$. 13.5. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-2}{x^2+x-2}$. 13.6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{3+x}-2}$.

13.7. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{x^2+8x}$. 13.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x}$. 13.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1-x)}{x}$.

13.10. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{5+x}-3}{x^2-5x+4}$.

ЗАДАЧА 14

14.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2}{n^2}\right)^{n^2}$. 14.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+3}{2n^2-1}\right)^{n^2}$.

14.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n+7}{6n+4}\right)^{3n+2}$. 14.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n^2+1}$. 14.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{3n+1}\right)^{n+5}$.

14.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n-1}$. 14.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+10}{n+12}\right)^{4n-1}$. 14.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+2}{n^3+1}\right)^{2n-n^3}$.

14.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+1}\right)^{-n^2+1}$. 14.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+5}{2n+1}\right)^{2n+1}$.

ЗАДАЧА 15

Найти предел, используя эквивалентность бесконечно малых функций.

15.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\sin x}$. **15.2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$. **15.3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+tgx)}{arctgx}$.

15.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{tgx}$. **15.5.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{\ln(1+tg^2x)}$. **15.6.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{arctgx^2}$. **15.7.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{e^{4x}-1}$.

15.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{1-\cos x}$. **15.9.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\arcsin^2 x}$. **15.10.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{x^2-x}$.

ЗАДАЧА 16

Задана функция $y=f(x)$. Исследовать точки разрыва функции, если они существуют. Сделать схематический чертеж.

16.1. $y=\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$. **16.2.** $y=arctg\dfrac{1}{x+2}$. **16.3.** $y=\dfrac{1}{\ln x}$. **16.4.** $y=\dfrac{1}{x^2-x}$.

16.5. $y=5^{-1/x}$. **16.6.** $y=\dfrac{1}{e^x-1}$. **16.7.** $y=4^{\frac{1}{x-2}}$. **16.8.** $y=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x-1}}}$.

16.9. $y=\dfrac{1}{\ln x-1}$. **16.10.** $y=\dfrac{1}{2^x-1}$.

ЗАДАЧА 17

17.1. $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\le 2;\\ \dfrac{1}{x-1}, & x>2.\end{cases}$ **17.2.** $f(x)=\begin{cases}-x+2, & x\le 1;\\ x^2+1, & x>1.\end{cases}$

17.3. $f(x)=\begin{cases}-2\sin x, & x\le 0;\\ (x+1)^2, & x>0.\end{cases}$ **17.4.** $f(x)=\begin{cases}-x+3, & x\le 1;\\ 2^x, & x>1.\end{cases}$ **17.5.** $f(x)=\begin{cases}-x+1, & x\le 1;\\ \ln x, & x>1.\end{cases}$

17.6. $f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & x\le 2;\\ \sqrt{x-2}, & x>2.\end{cases}$ **71.7.** $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x}, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{x}, & x>0.\end{cases}$

17.8. $f(x)=\begin{cases}-x^2-1, & x\le 1;\\ 2^{-x}, & x>1.\end{cases}$ **17.9.** $f(x)=\begin{cases}\ln(-x), & x<0;\\ x(1-x), & x\ge 0.\end{cases}$

17.10. $f(x)=\begin{cases}|x|, & x\le 2;\\ -x+6, & x>2.\end{cases}$

Дифференциальное исчисление

ЗАДАЧА 18

Показать, что функция y удовлетворяет соответствующему дифференциальному уравнению.

18.1. $y = xe^{-x^2/2}$; $xy' = (1-x^2)y$. **18.2.** $y = \dfrac{\sin x}{x}$; $xy' + y = \cos x$.

18.3. $y = x\sqrt{1-x^2}$; $yy' = x - 2x^3$. **18.4.** $y = \ln(C + e^x)$; $y' = e^{x-y}$.

18.5. $y = \dfrac{1+x}{1-x}$; $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$. **18.6.** $y = e^{tg(x/2)}$; $y'\sin x = y\ln y$.

18.7. $y = tg\ln 3x$; $(1+y^2) = xy'$. **18.8.** $y = (x^2+1)e^{x^2}$; $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$.

18.9. $y = e^{x+x^2} + 2e^x$; $y' - y = 2xe^{x+x^2}$.

18.10. $y = -x\cos x + 3x$; $xy' = y + x^2\sin x$.

ЗАДАЧА 19

Найти производную функции.

19.1. $y = 8\sqrt{5+2x-x^2} + 3\arcsin\dfrac{x-1}{6}$. **19.2.** $y = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + arctg(x+1)$.

19.3. $y = \sqrt{3-2x-x^2} + 4\arcsin\dfrac{x+1}{2}$.

19.4. $y = \dfrac{3}{8}[\ln(4x^2-4x+17) + \dfrac{1}{6}arctg\dfrac{2x-1}{4}]$.

19.5. $y = 3\sqrt{x^2+2x+2} - 4\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})$.

19.6. $y = \dfrac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2} + \dfrac{13}{9}\ln(3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2})$.

19.7. $\dfrac{29}{45}arctg\dfrac{5x+3}{9} - \dfrac{3}{10}\ln(5x^2+6x+18)$. **19.8.** $y = xarctgx - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

19.9. $y = tgx\ln(\cos x) + tgx - x$.   19.10. $y = \frac{e^x}{2}\left(1 - \frac{2\sin 2x + \cos 2x}{5}\right)$.

ЗАДАЧА 20

Найти производную от функции, заданной неявно.

20.1. $\sin(xy) - \ln(x+y) + a = 0$.   20.2. $\cos(x+y) - \frac{x}{y} + a = 0$.

20.3. $arctg\frac{x}{y} - e^{xy} + a = 0$. 20.4. $\arcsin\frac{y}{x} + \sin\frac{x}{y} + a = 0$.

20.5. $\sqrt{x^2+y^2} - \frac{5}{xy} + a = 0$.   20.6. $\sin\sqrt{x^2-y^2} + e^{x+y} + a = 0$.

20.7. $y^2 + xarctgy + a = 0$.   20.8. $y^3\cos(x+y) + y^2 + a = 0$.

20.9. $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sin\frac{x}{y} + a = 0$. 20.10. $2y\ln y + x^2 + y^2 + a = 0$.

ЗАДАЧА 21

Найти производную второго порядка от функции, заданной параметрически.

21.1. $\begin{cases} x = \cos t; \\ y = \sin t. \end{cases}$ 21.2. $\begin{cases} x = e^t\sin t; \\ y = e^t\cos t. \end{cases}$ 21.3. $\begin{cases} x = \frac{1}{t+1}; \\ y = e^t. \end{cases}$ 21.4. $\begin{cases} x = \ln t; \\ y = t^3. \end{cases}$

21.5. $\begin{cases} x = tgt; \\ y = \sin t. \end{cases}$ 21.6. $\begin{cases} x = ctgt; \\ y = \cos t. \end{cases}$ 21.7. $\begin{cases} x = t^2 + t; \\ y = e^t. \end{cases}$ 21.8. $\begin{cases} x = arctgt; \\ y = \frac{1}{1+t}. \end{cases}$

21.9. $\begin{cases} x = \arcsin t; \\ y = \ln t. \end{cases}$ 21.10. $\begin{cases} x = \sqrt{1+t^2}; \\ y = t^2. \end{cases}$

ЗАДАЧА 22

Найти уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке x_o.

22.1. $y = \frac{x+1}{x-1}$; $x_o = 3$.   22.2. $y = \sqrt{x} + x$; $x_o = 4$.

22.3. $y=\frac{x^2+x+1}{x-1}$; $x_o=-3$. **22.4.** $y=\sin x$; $x_o=\frac{3}{4}\pi$. **22.5.** $y=tgx$; $x_o=\frac{\pi}{4}$.

22.6. $y=\ln x$; $x_o=e^2$. **22.7.** $y=-x^2+x$; $x_o=2$.

22.8. $y=x^3+x^2+x+1$; $x_o=-1$. **22.9.** $6\sqrt[3]{x}-x$; $x_o=8$.

22.10. $y=-x^2+4x-3$; $x_o=1$.

ЗАДАЧА 23

Найти предел по правилу Лопиталя.

23.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}$. **23.2.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^4}$. **23.3.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

23.4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx-x}{x^2}$. **23.5.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{\sin^2 x}$. **23.6.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$.

23.7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x-x}{x^2}$. **23.8.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x^2-1}{x^2}$. **23.9.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)-x^2}{x^4}$.

23.10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x-x^2}{x^4}$.

ЗАДАЧА 24

Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

24.1. $y=x^3-6x^2+9x+3$; $[-1;4]$. **24.2.** $y=2x^3-9x^2-24x+5$; $[0;6]$.

24.3. $y=2x^3-3x^2-36x+2$; $[-3;4]$. **24.4.** $y=2x^3-3x^2-12x-6$; $[-2;3]$.

24.5. $y=x^3-3x^2-24x+10$; $[-4;2]$. **24.6.** $y=\sqrt{x}-x+5$; $[0;4]$.

24.7. $3\sqrt[3]{x}-x-4$; $[-1;8]$. **24.8.** $y=3\sqrt[3]{x^2}-x+1$; $[-1;27]$.

24.9. $y=\sqrt[3]{(x+1)}-x-2$; $[-2;7]$. **24.10.** $y=4\sqrt{x+1}-2x+1$; $[-1;3]$.

ЗАДАЧА 25

Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции $y = f(x)$.

25.1. $y = 9\sqrt[3]{x^5} + 5x^2 + 3x + 1$. **25.2.** $y = xe^x$. **25.3.** $y = x^2 - \frac{8}{x}$.

25.4. $y = \ln(x^2 + 4)$. **25.5.** $y = -x^4 - 2x^3 + 12x + 15x - 6$. **25.6.** $y = \frac{x^3 + 8}{x}$.

25.7. $y = arctgx - x$. **25.8.** $y = x^2 \ln x$. **25.9.** $y = xe^x$. **25.10.** $y = \frac{\ln x}{x^2}$.

ЗАДАЧА 26

Провести полное исследование функции $y = f(x)$ и построить ее график.

26.1. $y = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$. **26.2.** $y = \frac{x^2 - 4x + 7}{x - 3}$. **26.3.** $y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$.

26.4. $y = \frac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$. **26.5.** $y = \frac{x^2 + 3x + 4}{x}$. **26.6.** $y = \frac{x^2 - 6x + 10}{x - 3}$.

26.7. $y = \frac{x^2 + 2x + 8}{x + 4}$. **26.8.** $y = \frac{x^2 - 2x + 8}{x - 4}$.

26.9. $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 5}$. **26.10.** $y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 5}$.

ЗАДАЧА 27

27.1. $y = \sqrt[3]{x^2} + x$. **27.2.** $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + 4x$. **27.3.** $y = \sqrt{x} - x + 2$.

27.4. $\sqrt[3]{x} - x$. **27.5.** $y = \sqrt{x+1} - x - 1$. **27.6.** $y = \sqrt[3]{x} - x$. **27.7.** $y = \sqrt[3]{x} + x$.

27.8. $y = \sqrt[3]{x^2} - x$. **27.9.** $y = \sqrt[3]{x+1} - x + 1$. **27.10.** $y = 2\sqrt{x} - x + 1$.