

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования «Магнитогорский государственный технический университет

им. Г. И. Носова»



УТВЕРЖДАЮ

Директор ИЕиС

/Мезин И.Ю.

28.10.2020

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ

специальность

Направление подготовки/специальность

01.06.01 Математика и механика

Магнитогорск – 2020

1. Правила проведения вступительного испытания¹

Для проведения вступительного экзамена составляется расписание экзамена и проводится консультация (консультирование абитуриентов по вопросам, включенным в программу вступительного экзамена). Для проведения вступительного испытания составляется расписание и проводится консультация (консультирование абитуриентов по вопросам, включенным в программу вступительного испытания). Вступительное испытание в аспирантуру проводится по спецдисциплине. Целью вступительного испытания является проверка и оценка уровня профессиональных знаний, умений и навыков абитуриентов. Вступительные испытания проводятся в письменной форме по билетам, которые включает три вопроса. Каждый вопрос оценивается по пятибалльной шкале. Продолжительность вступительного испытания 90 минут. Минимальный порог успешного прохождения вступительного испытания по спецдисциплине соответствует 9 баллам. Экзаменуемым лицам во время проведения вступительного испытания разрешается иметь при себе и использовать справочные материалы. Во время экзамена запрещается иметь при себе и использовать средства оперативной и мобильной связи.

2. Дисциплины, включенные в программу вступительного испытания

Функциональный анализ, комплексный анализ, теория операторов, численные методы.

3. Содержание учебных дисциплин²

Раздел 1 Теоремы о существовании неявной функции. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Теорема о существовании интеграла Римана. Несобственные интегралы, признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра. Интегрирование и дифференцирование интегралов по параметру. Функции комплексного переменного. Условия Коши – Римана. Интеграл по контуру. Теорема Коши. Формула Коши. Интеграл типа Коши и его свойства. Формулы Сохоцкого. Принцип максимума, теорема Лиувилля. Ряды аналитических функций, теоремы Вейерштрасса. Степенные ряды, теорема единственности. Ряд Тейлора и ряд Лорана. Поведение функции в окрестности особой точки, теорема Сохоцкого. Вычеты и их свойства. Метрические пространства. Теорема о пополнении. Топологические пространства. Сравнение топологий. Непрерывные отображения топологических пространств. Гомеоморфные отображения. Способы задания топологий. Индуцированная топология и фактор-топология. Сходимость в топологических пространствах. Компактные топологические пространства и их свойства. Раздел 2 Декартово произведение топологических пространств. Теорема Тихонова о декартовом произведении компактных пространств. Локально компактные пространства и их свойства. Компактные расширения локально компактных пространств. Связные пространства и их свойства. Раздел 3 Мера Лебега и ее свойства. Борелевская алгебра на числовой прямой (числовой плоскости), измеримые функции. Измеримые по Борелю функции. Сходимость почти всюду. Теорема

¹ Указать время проведения ВИ; чем можно пользоваться на ВИ; сколько вопросов (тем) в одном билете/варианте и т.д.

² Перечислить темы, вопросы, которые будут на ВИ

Егорова. Сходимость по мере и ее связь со сходимостью почти всюду, интеграл Лебега и его свойства. Предельный переход под знаком интеграла. Почленное интегрирование сходящихся рядов. Теорема Фату. Произведение мер. Теорема Фубини. Заряды (обобщенные меры). Теорема Хана. Неопределенный интеграл Лебега. Теорема Радона – Никодима. Понятие σ -конечной меры. Определенный интеграл по σ -конечной мере. Раздел 4 Теорема Бэра о категориях. Линейное нормированное пространство. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве. Банахово пространство линейных ограниченных операторов $L(E,F)$. Сопряженное пространство. Теорема Банаха – Хана для полунорм. Принцип равномерной ограниченности. Понятие топологического линейного пространства. Слабая топология в линейном нормированном пространстве. Абстрактное гильбертово пространство. Теорема об ортогональном разложении. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала. Ортонормированные системы. Ряды Фурье. Существование полных ортонормированных систем. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств. Обратимые линейные операторы в банаховых пространствах. Теорема Банаха об обратном операторе. Вполне непрерывные операторы и их свойства. Сопряженный оператор. Замкнутый оператор. Регулярные точки и спектр линейного ограниченного оператора. Классификация точек спектра. Ограниченность, замкнутость, не пустота спектра. Свойства спектра вполне непрерывного оператора. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Свойства спектра самосопряженных операторов. Существование ненулевых собственных значений у вполне непрерывного самосопряженного оператора. Принцип сжатых отображений и его применение к доказательству существования и единственности решения дифференциального уравнения и интегрального уравнения Фредгольма с малым параметром. Относительно компактные множества, критерий Хаусдорфа и Фреше. Теорема Арчела. Раздел 5 Теория Рисса-Шаудера. Нормальная разрешимость оператора Фредгольма. Теорема Фредгольма. Интегральные уравнения Фредгольма в пространствах $L_2(a,b)$ и $C(a,b)$. Случай вырожденного ядра. Уравнение Фредгольма в абстрактном гильбертовом пространстве. Теория Гильберта – Шмидта. Приложение к интегральным уравнениям с симметрическим ядром. Нелинейный анализ. Непрерывность и дифференцируемость оператора. Производная Фреше и ее свойства. Необходимое условие экстремума функционала. Простейшие задачи вариационного исчисления и уравнение Эйлера-Лагранжа. Раздел 6 Разложение единиц (проекторные меры). Операторные интегралы Стильеса. Спектральное разложение самосопряженных операторов. Интегральное представление группы унитарных операторов. Функции от самосопряженного оператора. Оператор дифференцирования. Раздел 7 Полиномы наилучшего равномерного приближения. Теоремы Чебышева и Бореля. Полиномы Чебышева первого рода. Прямые теоремы конструктивной теории функций. Теоремы Джексона и их обобщения (периодический и непериодический случаи). Обратные теоремы конструктивной теории функций. Теоремы Бернштейна и Зигмунда. Суммы Фурье, Фейера, Вале - Пуссена, Бернштейна – Рогозинского и их важнейшие свойства. Наилучшие приближения в нормированных пространствах. Положительные операторы и функционалы. Приложения в конструктивной теории функций. Алгебраическое и тригонометрическое интерполирование. Положительные и отрицательные результаты. Аппроксимация в среднем интерполяционными полиномами. Аппроксимация и интерполяция сплайнами. Теоремы типа Джексона. Экстремальные свойства сплайнов. Квадратурные формулы. Экстремальные задачи теории квадратур. Теорема Банаха – Штейнгауза и ее приложения

к конструктивной теории функций. Раздел 8 Геометрический смысл дифференцируемости функции комплексного переменного. Понятие конформного отображения. Свойства дробно-линейной функции (единственность, однолистность, круговое сохранение симметричных точек). Геометрические свойства элементарных функций. Лемма Шварца и теорема Римана. Принцип соответствия границ. Аналитическое продолжение по непрерывности. Принцип симметрии. Ветви и точки ветвления. Общие понятия о римановых поверхностях. Раздел 9 Связь ядер Коши и Шварца. Формула Гильберта. Регуляризирующий множитель для задачи Гильберта. Задача Гильберта с разрывными коэффициентами в полуплоскости. Смешанная краевая задача. Задача Дирихле и ее видоизменения для плоскости со щелями. Задача Римана в односвязной и многосвязной областях. Постановка обратных краевых задач. Решение внутренней и внешней задачи. О числе решений внешней задачи. Особые точки контура. Однолистная разрешимость обратных краевых задач.

4. Литература для подготовки³

1. Шаронов, А. В. Прикладной функциональный анализ : учебное пособие / А. В. Шаронов, А. О. Маркарян. — Москва : МИСИС, 2019. — 40 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/129037> (дата обращения: 27.10.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Павлов, Е. А. Основы функционального анализа : учебное пособие / Е. А. Павлов. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 88 с. — ISBN 978-5-8114-3635-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/116362> (дата обращения: 27.10.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Гисин, В. Б. Функциональный анализ : учебное пособие / В. Б. Гисин, П. И. Кацыло, Е. В. Маевский. — Москва : Финансовый университет, 2014. — 220 с. — ISBN 978-5-7942-1128-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/152027> (дата обращения: 27.10.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Бородин, П. А. Задачи по функциональному анализу : учебное пособие / П. А. Бородин, А. М. Савчук, И. А. Шейпак. — Москва : МЦНМО, 2017. — 336 с. — ISBN 978-5-4439-3092-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/92693> (дата обращения: 27.10.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
5. Мещеряков, Е. А. Комплексный анализ : учебное пособие / Е. А. Мещеряков, А. А. Чемёркин. — Омск : ОмГУ, 2018. — 72 с. — ISBN 978-5-7779-2304-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/113889> (дата обращения: 27.10.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
6. Бренерман, М. Х. Комплексный анализ : учебное пособие / М. Х. Бренерман. — Казань : КНИТУ, 2016. — 127 с. — ISBN 978-5-7882-1871-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/101944> (дата обращения: 27.10.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
7. Бирман, М. Ш. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве : учебное пособие / М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк. — 2-е изд., испр. и доп. — Санкт-Петербург : Лань, 2010. — 464 с. — ISBN 978-5-8114-1076-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/635> (дата обращения: 27.10.2020). — Режим доступа: для

³ Желательны ссылки

авториз. пользователей.8. Золотарев, М. Л. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве : учебное пособие / М. Л. Золотарев, И. А. Федоров. — Кемерово : КемГУ, 2014. — 116 с. — ISBN 978-5-8353-1679-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/58320> (дата обращения: 27.10.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.9. Пирковский, А. Ю. Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов : учебное пособие / А. Ю. Пирковский. — Москва : МЦНМО, 2010. — 176 с. — ISBN 978-5-94057-573-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/9384> (дата обращения: 27.10.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.10. Целых, А. Н. Анализ устойчивости вычислительных схем : учебное пособие / А. Н. Целых, В. С. Васильев, Э. М. Котов. — Ростов-на-Дону : ЮФУ, 2018. — 146 с. — ISBN 978-5-9275-2912-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/125030> (дата обращения: 27.10.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.11. Бахвалов, Н. С. Численные методы : учебник / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — 9-е изд. — Москва : Лаборатория знаний, 2020. — 636 с. — ISBN 978-5-00101-836-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/126099> (дата обращения: 27.10.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.12. Карманова, Е. В. Численные методы : учебное пособие / Е. В. Карманова. — 3-е изд., стер. — Москва : ФЛИНТА, 2020. — 172 с. — ISBN 978-5-9765-2303-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/152402> (дата обращения: 27.10.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

5. Шкала оценивания вступительного испытания⁴

На оценку «отлично» (5 баллов) – обучающийся демонстрирует высокий уровень сформированности компетенций, всестороннее, систематическое и глубокое знание учебного материала, свободно выполняет практические задания, свободно оперирует знаниями, умениями, применяет их в ситуациях повышенной сложности. На оценку «хорошо» (4 балла) – обучающийся демонстрирует средний уровень сформированности компетенций: основные знания, умения освоены, но допускаются незначительные ошибки, неточности, затруднения при аналитических операциях, переносе знаний и умений на новые, нестандартные ситуации. На оценку «удовлетворительно» (3 балла) – обучающийся демонстрирует пороговый уровень сформированности компетенций: в ходе контрольных мероприятий допускаются ошибки, проявляется отсутствие отдельных знаний, умений, навыков, обучающийся испытывает значительные затруднения при оперировании знаниями и умениями при их переносе на новые ситуации. На оценку «неудовлетворительно» (2 балла) – обучающийся демонстрирует знания не более 20% теоретического материала, допускает существенные ошибки, не может показать интеллектуальные навыки решения простых задач. На оценку «неудовлетворительно» (1 балл) – обучающийся не может показать знания на уровне воспроизведения и объяснения информации, не может показать интеллектуальные навыки решения простых задач.

⁴ Расписать каждый балл

6. Примерный вариант вступительного испытания⁵

1. Теоремы о существовании неявной функции. Равномерная сходимости функциональных последовательностей и рядов. 2. Декартово произведение топологических пространств. Теорема Тихонова о декартовом произведении компактных пространств. 3. Доказать, что всякое конечномерное линейное многообразие в линейном нормированном пространстве есть подпространство.

Программу разработал:

 /Кадченко С.И.

27.10.2020

⁵ Дополнительно разместить в интернет-лицее <https://dpklms.magt.ru> (по желанию)