Методика решения задач
по квантовой, атомной и ядерной физике.

1. КВАНТОВАЯ ОПТИКА.

Основные формулы.

- Закон Стефана – Больцмана

$$R_e = \sigma T^4,$$

где R_e – энергетическая светимость абсолютно черного тела, равная энергии, испускаемой единицей поверхности излучаемого тела по всем направлениям в единицу времени; T – термодинамическая температура тела; $\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/м$^2\cdot$К^4 – постоянная Стефана – Больцмана.

- Закон смещения Вина

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

где λ_m – длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела;
$b = 2{,}90\cdot10^{-3}$ м·К – постоянная Вина.

- Энергия фотона

$$\varepsilon = h\nu \quad \text{или} \quad \varepsilon = \hbar\omega \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{hc}{\lambda},$$

где $h = 6{,}626\cdot10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка;
$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}0546\cdot10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка с чертой;
ν – частота фотона; ω – циклическая частота ; λ – длина волны;
$c = 3\cdot10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

- Импульс фотона

$$p = \frac{\varepsilon}{c}, \quad \text{что эквивалентно} \quad p = \frac{h\nu}{c} \quad \text{или} \quad p = \frac{h}{\lambda}.$$

- Давление при нормальном падении света на поверхность

$$P = \frac{E_e}{c}(1+\rho),$$

где E_e – энергетическая освещенность поверхности, равная энергия всех фотонов, падающих на единицу площади в единицу времени;
ρ - коэффициент отражения света.

- Формула Эйнштейна для фотоэффекта

$$\varepsilon = A + T_{\max},$$

где ε – энергия падающего фотона; A – работа выхода электрона из металла; T_{max} – максимальная кинетическая энергия вылетающего фотоэлектрона.

- Нерелятивистский фотоэффект

$$\varepsilon << mc^2,$$

где $mc^2 \approx 0{,}511$ МэВ – энергия покоя электрона.

Тогда скорость вылетевшего фотоэлектрона $\upsilon << c$ и $T_{\max} = \dfrac{m\upsilon_{\max}^2}{2}$.

- Релятивистский фотоэффект

$$\varepsilon \geq mc^2 \quad \text{или} \quad \varepsilon \sim mc^2.$$

Тогда $\upsilon \sim c$ и $T_{\max} = mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\upsilon_{\max}^2/c^2}} - 1\right)$.

- Красная граница фотоэффекта

$$\nu_0 = \frac{A}{h} \quad \text{или} \quad \lambda_0 = \frac{hc}{A},$$

где ν_0 – минимальная частота света, а λ_0 – максимальная длина волны, при которой еще возможен фотоэффект.

- Формула Комптона

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c(1-\cos\theta) = 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2},$$

где λ – длина волны падающего фотона; λ' – длина волны фотона, рассеянного на свободном электроне; θ – угол рассеивания;
$\lambda_c = \dfrac{h}{mc} = 2{,}4263\cdot10^{-12}$ м – комптоновская длина волны электрона.

1.1. Тепловое излучение.

Задача 1.1.1.

Определить, во сколько раз изменился поток излучения абсолютно чёрного тела, если длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности его энергетической светимости, сместилась с λ_1 = 720 нм до λ_2 = 400 нм.

Решение.

Поток излучения Φ_e – это энергия, излучаемая телом в единицу времени, то есть фактически мощность излучения. А энергетическая светимость R_e равна потоку излучения, испускаемому единицей площади излучающей поверхности S. Поэтому поток излучения тела при равномерном распределении излучения по всем направлениям равен произведению его энергетической светимости на площадь излучаемой поверхности:

$$\Phi_e = R_e S.$$

По закону Стефана–Больцмана для абсолютно чёрного тела $R_e = \sigma T^4$, где T – абсолютная температура излучающей поверхности; σ – постоянная Стефана–Больцмана, $\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/м$^2\cdot$К^4.

Согласно закону смещения Вина $T\lambda_m = b$, где λ_m – длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела; b – постоянная Вина, $b = 2{,}9\cdot10^{-3}$ м·К.

Из этого закона $T = b/\lambda_m$. Тогда $R_e = \sigma\cdot(b/\lambda_m)^4$, а $\Phi_e = \sigma\cdot S\cdot(b/\lambda_m)^4$.

Найдем отношение потоков $$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{\sigma\cdot S\cdot(b/\lambda_2)^4}{\sigma\cdot S\cdot(b/\lambda_1)^4} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^4.$$

После подстановки получим $$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \left(\frac{720}{400}\right)^4 = 10{,}5\cdot$$

Мы получили, что поток излучения увеличился в 10,5 раз.

1.2. Фотоэффект.

Задача 1.2.1.

Определить энергию и максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с поверхности серебра ультрафиолетовым излучением с длиной волны $\lambda = 0{,}1$ мкм, а также красную границу фотоэффекта.

Решение

Энергию фотоэлектронов и максимальную скорость фотоэлектронов можно определить из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта

$$\varepsilon = A + T_{max},$$

где ε – энергия фотонов, падающих на поверхность металла; A – работа выхода (для серебра A = 4,7 эВ); T_{max} - максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов (1 эВ = $1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж).

Энергию фотона ультрафиолетового излучения определим по формуле

$$\varepsilon = h\nu = hc/\lambda,$$

где h – постоянная Планка ($h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж$\cdot$с); ν и λ – частота и длина волны электромагнитного излучения; c – скорость света ($c=3\cdot10^{8}$ м/с).

В данном случае энергия фотона $\varepsilon=12{,}41$ эВ, что много меньше энергии покоя электрона ($E_0=0{,}51$ МэВ). Следовательно, для данного случая воспользуемся классической формулой для нахождения кинетической энергии и скорости фотоэлектрона.

$$T_{max}= \varepsilon - A=19{,}86\cdot10^{-19}-7{,}52\cdot10^{-19}=1{,}234\cdot10^{-18} \text{ Дж.}$$

$$\frac{m\mathrm{v}_{max}^2}{2} = T_{max} \text{, откуда } v_{max} = \sqrt{\frac{2T_{max}}{m}};$$

$$\mathrm{v}_{max} = \sqrt{\frac{2\cdot1{,}324\cdot10^{-18}}{9{,}1\cdot10^{-31}}} = 1{,}65\cdot10^{6}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Красная граница фотоэффекта λ_{max} находится из условия

$$A_{вых} = hc/\ \lambda_{max}, \text{ откуда}$$

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{A_{вых}} = \frac{6{,}62\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}}{7{,}52\cdot10^{-19}} = 2{,}6\cdot10^{-7}\text{ м}.$$

Задача 1.2.2.

На фотоэлемент с катодом из лития падает свет с длиной волны λ = 150 нм. Найти наименьшее значение задерживающей разности потенциалов $U_З$, которую нужно приложить к фотоэлементу, чтобы прекратить фототок.

Решение

Запишем закон Эйнштейна для фотоэффекта

$$hc/\lambda = A + mV^2_{max}/2,$$

где h- постоянная Планка, c- скорость света в вакууме; λ - длина волны; A - работа выхода электрона из лития (A=2,39 эВ); $T=mV^2_{max}/2$ – кинетическая энергия вылетевших с поверхности металла фотоэлектронов.

Фототок прекратится тогда, когда кинетическая энергия фотоэлектронов будет равна работе электрического поля по торможению электронов

$$T=mV^2_{max}/2=A_{эл}=eU_З, \text{ или } hc/\lambda=A + eU_З,$$

где e - заряд электрона; $U_З$ - задерживающий потенциал, ($h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж$\cdot$с; $c=3\cdot10^{8}$ м/с; $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл).

$$U_З = \frac{hc}{\lambda e} - \frac{A}{e},$$

$$U_З = \frac{6{,}62\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}}{1{,}5\cdot10^{-7}\cdot1{,}6\cdot10^{-19}} - 2{,}39 = 5{,}885 \text{ В}.$$

1.3. Эффект Комптона.

Задача 1.3.1.

В результате эффекта Комптона фотон при соударении с электроном был рассеян на угол $\theta=90^0$. Энергия рассеянного фотона ε_2=0,35 Мэв. Определить энергию фотона ε_1 до рассеяния и энергию, приходящуюся на электрон отдачи.

Решение

Для определения энергии первичного фотона воспользуемся формулой Комптона

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta),$$

где $\Delta\lambda$ – изменение длины волны фотона в результате рассеяния на свободном электроне; h – постоянная Планка; c – скорость света; m_0 – масса покоя электрона; θ – угол рассеяния фотона; λ_1 – длина волны падающего фотона; λ_2 – длина волны рассеянного фотона.

Энергия фотона $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$, поэтому $\lambda_1 = \frac{hc}{\varepsilon_1}$, $\lambda_2 = \frac{hc}{\varepsilon_2}$.

С учётом этого запишем $\Delta\lambda$ как

$\frac{hc}{\varepsilon_2} - \frac{hc}{\varepsilon_1} = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$. Умножим на $\frac{1}{hc}$, получим

$\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} = \frac{1}{mc^2}(1-\cos\theta)$, откуда $\frac{1}{\varepsilon_1} = \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{mc^2}(1-\cos\theta)$.

Так как $\cos 90^\circ = 0$, то $\frac{1}{\varepsilon_1} = \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{mc^2}$ или $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2 \cdot mc^2}{mc^2 - \varepsilon_2}$.

Подставив числовые значения, получим

$$\varepsilon_1 = \frac{0{,}35\cdot 1{,}6\cdot 10^{-13}\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 9\cdot 10^{16}}{8{,}19\cdot 10^{-14} - 5{,}6\cdot 10^{-14}} = 17{,}74\cdot 10^{-14}\text{Дж} = 1{,}11\text{ Мэв}.$$

Энергия, приходящаяся на электрон отдачи

$$T_e = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 1{,}11 - 0{,}35 = 0{,}76\ (\text{Мэв}).$$

Задача 1.3.2.

На какой угол рассеялся γ-квант с энергией ε=0,8 МэВ в результате столкновения с покоившимся электроном, если известно, что скорость электрона отдачи составляет V=0,6 с?

Решение

Если скорость V электрона близка к скорости света, то кинетическую энергию электрона вычисляем по релятивистской формуле

$T = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}-1\right)$, где $m_0=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг – масса покоя электрона.

Запишем закон сохранения энергии при комптоновском эффекте

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 + T,$$

где ε_1- энергия падающего фотона; ε_2- энергия рассеянного фотона.

Энергия фотона связана с длиной волны формулой

$$\varepsilon = hc/\lambda,$$

откуда длина волны падающего фотона

$$\lambda_1=hc/\varepsilon_1,$$

где $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж$\cdot$с – постоянная Планка.

Проведём вычисления:

$$\lambda_1 = \frac{6{,}62\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}}{0{,}8\cdot1{,}6\cdot10^{-13}} = 1{,}55\cdot10^{-12}\ \text{м};$$

$$T = 9{,}1\cdot10^{-31}\cdot9\cdot10^{16}\left(\frac{1}{\sqrt{1-0{,}36}}-1\right) = 20{,}475\cdot10^{-15}\ \text{Дж} = 0{,}128\ \text{МэВ};$$

$$\varepsilon_2 = 0{,}8\ \text{МэВ} - 0{,}128\ \text{МэВ} = 0{,}672\ \text{МэВ} = 1{,}075\cdot10^{-13}\ \text{Дж}.$$

Вычислим длину волны рассеянного фотона

$$\lambda_2=hc/\varepsilon_2 = 1{,}85\cdot10^{-12}\ \text{м}.$$

Изменение длины волны при комптоновском эффекте

$$\lambda_2-\lambda_1=\Delta\lambda=\frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta)=\lambda_c(1-\cos\theta),$$

где $\Delta\lambda = 0{,}297\cdot10^{-12}$ м; $\frac{h}{m_0c} = 2{,}42\cdot10^{-12}\ \text{м} = \lambda_c$, отсюда

$$1-\cos\theta = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_c}\ \text{ или }\ \cos\theta = 0{,}877;\ \theta = 31{,}9^0.$$

1.4. Фотоны и давление света.

Задача 1.4.1.

Определить энергию ε и импульс p фотона с длиной волны λ=1,5нм.

Решение

Энергия ε фотона, имеющего длину волны λ

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{1{,}5 \cdot 10^{-9}} = \frac{1{,}324 \cdot 10^{-16}}{1{,}6 \cdot 10^{-16}} = 0{,}8275 \text{ кэВ},$$

где h – постоянная Планка; c – скорость света в вакууме.

Импульс фотона

$$P = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{1{,}5 \cdot 10^{-9}} = 4{,}41 \cdot 10^{-25}\ кг \cdot м / с \cdot$$

Задача 1.4.2.

Пучок монохроматического света с длиной волны λ=700 нм и мощностью излучения Φ_e=0,8 Вт падает нормально на зеркальную поверхность. Определить: 1) силу давления F, испытываемую этой поверхностью; 2) число фотонов, ежесекундно падающих на поверхность.

Решение

Сила светового давления на поверхность равна произведению светового давления на площадь поверхности F=Ps.

Световое давление

$$P=E_e(\rho+1)/c,$$

где E_e– энергетическая освещённость; c – скорость света в вакууме; ρ – коэффициент отражения. Тогда

$$F=E_eS(\rho+1)/c, \text{ но } E_eS=\Phi_e=0{,}8 \text{ Вт по условию.}$$

Для зеркальной поверхности ρ=1. В результате получим

$$F= \Phi_e(\rho+1)/c =0{,}8(1+1)/3\cdot10^8 = 5{,}33\cdot10^{-9} \text{ Н.}$$

Произведение энергии ε одного фотона на число фотонов n, ежесекундно падающих на поверхность, равно мощности излучения, т.е. потоку излучения $\Phi_e=\varepsilon\cdot n$; ε= hc/λ; Φ_e= n(hc/λ). Отсюда

$$n = \frac{\Phi_e \lambda}{hc} = \frac{0{,}8 \cdot 7 \cdot 10^{-7}}{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}} = 2{,}82 \cdot 10^{18}\ c^{-1}.$$

2. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ.

Основные формулы.

- Дебройлевская длина волны частицы с импульсом p

$$\lambda = h / p = 2\pi \hbar / p.$$

- Соотношение неопределенностей:

а) $\Delta x \, \Delta p_x \geq \hbar$ (для координаты и импульса),

где Δx – неопределенность координаты; Δp_x – неопределенность проекции импульса на ось X;

б) $\Delta E \, \Delta t \geq \hbar$ (для энергии и времени),

где ΔE – неопределенность энергии; Δt – время жизни квантовой системы в данном энергетическом состоянии.

- Одномерное уравнение Шрёдингера для стационарных состояний

$$d^2 \Psi / dx^2 + (2m/ \hbar^2) (E - U) \Psi = 0,$$

где Ψ - волновая функция, описывающая состояние частицы; m – масса частицы; E – полная энергия; U – потенциальная энергия частицы.

- Условие нормировки волновой функции

$$\int | \Psi(x) |^2 \, dx = 1,$$

где интегрирование производится по всей области определения волновой функции $\Psi(x)$.

- Вероятность обнаружения частицы в интервале от x_1 до x_2

$$\varpi = \int_{x_1}^{x_2} |\Psi(x)|^2 dx \cdot$$

- Решение уравнения Шрёдингера для частицы массы m, заключенной внутри одномерного, бесконечно глубокого, прямоугольного потенциального ящика:

а) при $0 \leq x \leq L$, где потенциальная энергия частицы U = 0, собственная нормированная волновая функция имеет вид

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi n}{L} x \ ,$$

а собственное значение энергии частицы в этом состоянии равно

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2mL^2} ,$$

где n – квантовое число (номер квантового состояния); L– ширина ящика;

б) вне ящика, при $x \leq 0$ и $x \geq L$, где потенциальная энергия $U = \infty$,

$\Psi(x) = 0$.

2.1. Волны де Бройля.

Задача 2.1.1.

Найти длину волны де Бройля для электрона, обладающего кинетической энергией: 1) T=100 эВ; 2) T=3,0 МэВ.

Решение

Длина волны де Бройля для частицы, имеющей импульс **p,** равна

$$\lambda_{дБ} = \frac{h}{p},$$

где $h = 6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка.

Следовательно, задача сводится к выражению импульса **P** электрона через его кинетическую энергию T. Решение задачи зависит от того, классической или релятивистской частицей является электрон.

Если кинетическая энергия электрона $T \ll m_0c^2$, где m_0c^2=0,51 МэВ – энергия покоя электрона, то электрон является классической частицей, значит, его импульс и кинетическая энергия связаны соотношением

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \quad \text{или} \quad p = \sqrt{2mT}.$$

Если кинетическая энергия электрона $T \geq m_0c^2$, то электрон считается релятивистской частицей и в этом случае импульс связан кинетической энергией соотношением

$$P = \frac{1}{c}\sqrt{T\left(2m_0c^2 + T\right)}.$$

Таким образом, при T = 100 эВ $\ll m_0c^2$, получим

$$\lambda_1 = h/(2mT)^{1/2} = 6{,}62\cdot10^{-34}/(2\cdot9{,}1\cdot10^{-31}\cdot100\cdot1{,}6\cdot10^{-19})^{1/2} = 1{,}23\cdot10^{-10}\ (\text{м}).$$

Если кинетическая энергия электрона T=3,0 МэВ, т.е. T>0,51 МэВ, то электрон следует считать релятивистским, следовательно

$$\lambda_2 = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{T\left(T + 2m_0c^2\right)}}.$$

Произведя вычисление, найдём

$$\lambda_2 = \frac{6{,}62\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^8}{\sqrt{3\left(3 + 2\cdot0{,}51\right)}\cdot1{,}6\cdot10^{-13}} = 3{,}6\cdot10^{-13}\,\text{м}.$$

Примечание. Здесь учтено, что 1 эВ = 1,6 10^{-19}Дж, 1 МэВ = 1,6 10^{-13}Дж.

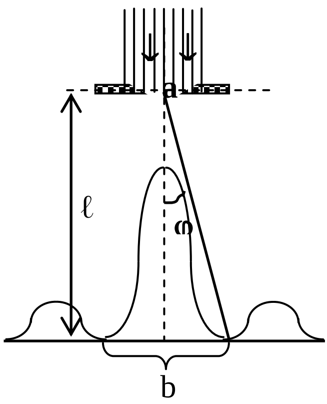
Задача 2.1.2.

Параллельный пучок моноэнергетических электронов падает нормально на диафрагму с узкой прямоугольной щелью, ширина которой a=2,0 мкм. Определить скорость электронов, если известно, что на экране, отстоящем от щели на расстоянии *l*=50 см, ширина центрального максимума b=80 мкм.

Решение

Дифракция электронов является следствием волновой природы частиц. Поэтому для определения скорости электронов применим формулу де Бройля для классических частиц

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{mv}\text{, откуда } v = \frac{2\pi\hbar}{m\lambda}.$$



Чтобы найти длину волны де Бройля λ, воспользуемся тем обстоятельством, что дифракционная картина, возникающая при прохождении через узкую щель параллельного пучка электронов, вполне соответствует дифракционной картине, полученной от этой же щели при освещении её параллельным пучком монохроматического света, длина волны которого равна длине волны де Бройля для электрона.

Это значит, что в случае дифракции электронов положение дифракционных минимумов можно определять по формуле

$$a \cdot \sin\varphi = \pm k\lambda\text{, где } (k = 1,2,3,...),$$

если понимать в ней под λ длину волны де Бройля для электрона.
Считая, что центральный дифракционный максимум заключён между двумя минимумами первого порядка и учитывая соответствие между величинами b и *l*, получим

$$\sin\varphi \approx \mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{2\ell},$$

отсюда имеем $\lambda = \frac{ab}{2\ell}$. Подставив это значение в выражение для скорости, получим $v = 4\pi\hbar\ell/mab$.
Произведём вычисления

$$v = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-34} \cdot 0{,}5}{9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-6} \cdot 80 \cdot 10^{-6}} = 4{,}5 \cdot 10^{6}\ (\text{м/с}).$$

2.2. Соотношение неопределенностей.

Задача 2.2.1.

Кинетическая энергия T электрона в атоме водорода составляет величину порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределённостей, оценить минимальные линейные размеры атома.

Решение

Неопределённости координаты и импульса электрона связаны соотношением Гейзенберга

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = \hbar ,$$

где Δx – неопределённость координаты электрона; Δp_x – неопределённость x-проекции его импульса. Из этого соотношения следует, что чем точнее определяется положение частицы в пространстве, тем более неопределённым становится импульс, а следовательно, и энергия частицы. Пусть атом имеет линейные размеры L, тогда электрон атома будет находиться где–то в пределах области с неопределённостью $\Delta x = L/2$. Соотношения неопределённостей можно записать в этом случае в виде $(L/2)\Delta p \geq \hbar$, откуда $L \geq 2\hbar/\Delta p$. Физически разумная неопределённость импульса Δp, во всяком случае не должна превышать значение самого импульса p, т.е. $\Delta p \leq p$. Импульс p связан с кинетической энергией T соотношением $p = \sqrt{2mT}$. Заменим Δp значением p (такая замена не увеличит L). Переходя от неравенства к равенству, получим

$$L_{min} = 2\frac{\hbar}{\sqrt{2mT}} .$$

Подставим числовые значения и произведём вычисления, найдём

$$L_{min} = \frac{2 \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}} = 1{,}24 \cdot 10^{-10}\,\text{м} = 1{,}24\,\text{Å}.$$

2.3. Частица в потенциальной яме.

Задача 2.3.1.

Частица находится в основном состоянии (n=1) в одномерном потенциальном ящике шириной L с абсолютно непроницаемыми стенками. Найти вероятность пребывания частицы в областях 0< x <(L/3) и (L/3) < x < (2L/3).

Решение

Вероятность dP пребывания частицы в интервале dx выражается формулой

$$dP = |\Psi(x)|^2 dx .$$

Отсюда вероятность найти частицу в области 0<x<(L/3) определится интегралом

$$\omega_1 = \int_0^{L/3} |\Psi(x)|^2 dx .$$

Так как частица находится в бесконечно глубоком потенциальном ящике, то воспользуемся собственной волновой функцией частицы

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\frac{\pi n x}{L} .$$

Так как в основном состоянии n=1, то

$$\omega_1 = \frac{2}{L}\int_0^{L/3} \sin^2\frac{\pi x}{L} dx .$$

Используя соотношение $\sin^2\alpha = (1-\cos 2\alpha)/2$, получим

$$\omega_1 = \frac{1}{L}\left[\int_0^{L/3} dx - \int_0^{L/3}\cos\frac{2\pi x}{L} dx\right] =$$

$$= \frac{1}{L}\left[\frac{L}{3} - \frac{L}{2\pi}\sin\frac{2\pi(L/3)}{L}\right] = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = 0{,}195.$$

Вероятность ω_2 пребывания частицы в области (L/3) < x < (2L/3) (т.е. в средней трети ящика) можно вычислить тем же способом, которым найдена вероятность ω_1. Но можно поступить проще. Если сложить вероятности ω_1, ω_2 и ω_3 пребывания частицы соответственно в первой, второй и третьей частях ящика, то получим вероятность пребывания частицы во всём ящике, которая равна единице, как вероятность достоверного события. Учитывая при этом, что в силу симметрии ящика $\omega_1 = \omega_3$, получим $\omega_2 = 1 - 2\omega_1 = 0{,}61$.

3. ФИЗИКА АТОМА.

Основные формулы.

- Обобщенная формула Бальмера, позволяющая найти частоты ν и длины волн λ, соответствующие линиям спектра излучения водорода и водородоподобных ионов, имеет вид

$$\nu = c / \lambda = c\, R\, Z^2(1/m^2 - 1/n^2),$$

где $n > m$; c – скорость света в вакууме; $R = 1{,}097 \cdot 10^7$ $м^{-1}$ – постоянная Ридберга; Z – порядковый номер элемента.

- Длины волн спектров водородоподобных ионов

$$\frac{1}{\lambda} = RZ^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где Z – порядковый номер элемента; R – постоянная Ридберга; k – номер уровня на который происходит переход электрона; n – номер уровня, с которого переходит электрон.

3.1. Теория Бора.

Задача 3.1.1.

Определить потенциал ионизации атома водорода.

Решение

Потенциалом ионизации U_i называют наименьшую разность потенциалов, которую должен пройти электрон в ускоряющем поле, чтобы при столкновении с невозбужденным атомом ионизировать его. Работа по удалению электрона из атома A_i равна работе электрического поля, ускоряющего электрон

$$A_i = eU_i .$$

Работа ионизации равна кванту энергии $h\nu$, поглощенному атомом водорода при удалении электрона из атома, находящегося в основном (невозбужденном) состоянии.

$$A_i = h\nu = hc\cdot\frac{1}{\lambda} = hcR\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) = hcR,$$

где $n_1 = 1$; $n_2 = \infty$.

Итак $eU_i = hcR$, откуда

$$U_i = \frac{hcR}{e} = \frac{6{,}62\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}\cdot1{,}1\cdot10^{7}}{1{,}6\cdot10^{-19}} = 13{,}6\ В.$$

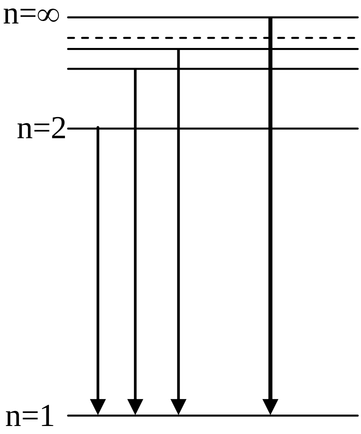
3.2. Спектры водорода и водородоподобных ионов.

Задача 3.2.1.

Найти наименьшую длину волны в ультрафиолетовой серии спектра водорода. Какую наименьшую скорость должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами таких электронов появилась эта линия?

Решение

Линии ультрафиолетовой серии спектра водорода возникают при переходе электрона с вышележащего энергетического уровня на первый.



Длины волн λ_{1n} этой серии определяются по формуле

$$\frac{1}{\lambda} = Rz^2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right),$$

где $R = 1{,}1\cdot10^{7}$ м$^{-1}$ – постоянная Ридберга; $Z = 1$ – порядковый номер водорода в периодической системе химических элементов; n_1 – номер уровня, на который совершается переход; n_2 – номер уровня, с которого совершается переход.

Наименьшей длине волны ультрафиолетовой серии соответствует переход с $n_2 = \infty$ на $n_1 = 1$, т. е.

$$\frac{1}{\lambda_{1\infty}} = R\cdot 1^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty^2}\right), \text{ откуда}$$

$$\lambda = R^{-1} = 0{,}909\cdot10^{-7} \text{ м} \approx 91 \text{ нм}.$$

При возбуждении атомов водорода ударами электронов кинетическая энергия электронов должна быть не меньше, чем энергия кванта, излучаемого возбужденным атомом при переходе в невозбужденное состояние

$$\frac{mv^2}{2} \geq h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \text{ откуда}$$

$$v_{min} = \sqrt{\frac{2hc}{\lambda m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}62\cdot10^{-34}\cdot 3\cdot10^{8}}{0{,}91\cdot10^{-7}\cdot 9{,}1\cdot10^{-31}}} \cong 2\cdot10^{6} \text{ м/с}.$$

4. ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА.

Основные формулы.

- Массовое число ядра (число нуклонов в ядре)

$$A = Z + N,$$

где Z - порядковый номер элемента (число протонов); N – число нейтронов в ядре.

- Закон радиоактивного распада

$$dN = -\ \lambda N\,dt \quad \text{или} \quad N = N_0\, e^{-\lambda t},$$

где dN – число ядер, распадающихся за интервал времени dt; N – число ядер, не распавшихся к моменту времени t; N_0 - число ядер в начальный момент времени (t = 0); λ - постоянная радиоактивного распада.

- Постоянная распада λ связана с периодом полураспада T

$$\lambda = (\ln 2)/\,T.$$

- Активность радиоактивного изотопа

$$A = -\,dN/dt = \lambda N = \lambda N_0\, e^{-\lambda t} = A_0\, e^{-\lambda t},$$

где A_0 – активность изотопа в начальный момент времени.

- Дефект массы ядра

$$\Delta m = Z\, m_p + (A - Z)\, m_n - m_я,$$

где m_p – масса протона; m_n – масса нейтрона; $m_я$ – масса ядра.

- Энергия связи ядра

$$E_{св} = \Delta m\, c^2 .$$

- Энергия ядерной реакции

$$Q = c^2[(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)] = c^2\, \Delta m,$$

где m_1 и m_2 – массы ядра-мишени и бомбардирующей частицы; m_3 и m_4 – массы ядер продуктов реакции; Δm – дефект масс ядерной реакции. При $\Delta m > 0$ реакция сопровождается выделением энергии (реакция экзотермическая), при $\Delta m < 0$ – энергия поглощается (реакция эндотермическая).

4.1. Радиоактивность.

Задача 4.1.1.

Определить, сколько ядер в m_0=1,0 мг радиоизотопа церия $_{58}Ce^{144}$ распадётся в течение промежутков времени: 1) Δt = 1 с; 2) Δt = 1 год. Период полураспада церия $T_{1/2}$=285 суток.

Решение

Задача решается с помощью закона радиоактивного распада.

1) В первом случае $\Delta t \ll T_{1/2}$, тогда для нахождения числа распавшихся ядер ΔN воспользуемся приближённой формулой

$$\Delta N = \lambda N_0 \Delta t,$$

где $\lambda = \ln 2/T_{1/2}$ – постоянная радиоактивного распада; T – период полураспада; $N_0 = (m_0/\mu)\cdot N_A$ – число радиоактивных ядер, содержащихся в массе m_0 радиоизотопа молярной массы μ в начальный момент времени; N_A – число Авогадро.

Рассчитаем $\Delta N = \dfrac{0{,}693 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-6} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{285 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 144 \cdot 10^{-3}} = 1{,}2 \cdot 10^{11}$.

2) Во втором случае Δt и $T_{1/2}$ – величины одного порядка. Число распавшихся ядер определится по формуле

$$\Delta N = N_0\left(1 - e^{-\lambda \Delta t}\right).$$

Рассчитаем $\Delta N = \dfrac{1{,}0 \cdot 10^{-6} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{144 \cdot 10^{-3}} \cdot (1 - e^{-\frac{0{,}693}{285}\cdot 365}) = 2{,}5 \cdot 10^{18}$.

Задача 4.1.2.

На какую часть уменьшается активность A изотопа ^{235}U за время Δt? Рассмотреть случаи: 1) Δt=1000 лет; 2) $\Delta t = T_{1/2}$, где $T_{1/2}=7{,}1\cdot 10^8$ лет; 3) $\Delta t=4{,}5\cdot 10^9$ лет.

Решение

Согласно определению, активность радиоактивного препарата – это число распадов в единицу времени

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N,$$

где N – число не распавшихся ядер к моменту времени t.

По закону радиоактивного распада

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

где N_0 – число радиоактивных ядер в момент времени t=0; λ– постоянная радиоактивного распада. Тогда активность радиоактивного препарата можно представить в виде

$$A = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t},$$

где $\lambda \cdot N_0 = A_0$ – активность препарата в начальный момент времени.

Необходимо найти

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{A_0 - A}{A_0} = \frac{A_0 - A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t}}{A_0} = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t}.$$

Полученное выражение нужно применить для трёх случаев:

1) Δt=1000 лет. Из сравнения с периодом полураспада $T_{1/2}$ видим, что Δt « $T_{1/2}$. Используя формулы приближённого вычисления

$$e^{\pm x} \approx 1 \pm x, \text{ при x «1},$$

где для нашей задачи x=(ln2/T)·Δt «1. Тогда получим

$$\frac{\Delta A}{A_0} \approx \ln 2 \cdot \frac{\Delta t}{T_{1/2}}.$$

Произведём вычисления

$$\frac{\Delta A}{A_0} \approx 0{,}69 \cdot \frac{10^3}{7{,}1 \cdot 10^8} = 0{,}97 \cdot 10^{-6} = 0{,}97 \cdot 10^{-4}\%,$$

это означает, что за время Δt=1000 лет активность практически не изменится.

2) Δt = $T_{1/2}$. В этом случае получим

$$\frac{\Delta A}{A_0} = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}T_{1/2}} = 1 - e^{-\ln 2} = 1 - 0{,}5 = 0{,}5 = 50\%.$$

3) Δt=4,5·10^9лет. В этом случае получим

$$\frac{\Delta A}{A_0} = 1 - e^{-\frac{0{,}69}{7{,}1 \cdot 10^8} \cdot 4{,}5 \cdot 10^9} = 0{,}62 = 62\%.$$

4.2. Энергия связи.

<u>Задача 4.2.1</u>.

Найти энергию связи нейтрона в ядре $^{17}_{8}O$.

Решение

Энергией связи частицы в ядре называется та энергия, которую надо затратить, чтобы отделить частицу от ядра, без сообщения ей кинетической энергии. Если отделить нейтрон $_0n^1$ от ядра изотопа кислорода $_8O^{17}$, то в соответствии с законом сохранения заряда и числа нуклонов останется ядро изотопа кислорода $_8O^{16}$. Затраченную для отрыва энергию можно определить по формуле

$$E_{св} = \Delta m\, c^2 ,$$

где Δm – дефект массы (для данной задачи это изменение массы системы в результате отрыва нейтрона). Тогда для энергии связи нейтрона получим

$$E_{св} = c^2 \cdot \left[\left(m_{^{16}O} + m_n\right) - m_{^{17}O}\right],$$

где $m_{^{16}O}, m_{^{17}O}, m_n$ – соответственно массы ядер изотопов кислорода O^{16}, O^{17} и нейтрона. Очевидно, разность, стоящая в скобках, не изменится, если заменить массы ядер изотопов O^{16}, O^{17} массами их атомов, значения которых приведены в таблицах.

Если квадрат скорости света умножить на массу, равную массе 1 а.е.м. (1 а.е.м. = $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг), и полученную энергию выразить в МэВ (1 МэВ=$1{,}6 \cdot 10^{-13}$ Дж), то получим коэффициент К=931,4 МэВ/а.е.м. перехода от дефекта масс Δm, выраженного в а.е.м., к энергии связи, выраженной в МэВ, т.е.

$$\Delta E_{св} = К\, \Delta m.$$

$$E_{св} = 931{,}4\left[\left(15{,}99491 + 1{,}00867\right) - 16{,}99913\right] \text{ МэВ} = 4{,}14 \text{ МэВ}.$$

Задача 4.2.2.

Определить удельную энергию связи для ядра $_8O^{17}$.

Решение

Удельной энергией связи ядра называется отношение энергии связи $E_{св}$ к массовому числу (числу нуклонов в ядре) A.

Энергией связи $E_{св}$ ядра называется энергия, которую необходимо затратить, чтобы разделить ядро на составляющие его частицы (нуклоны) без сообщения им кинетической энергии. Она вычисляется по формуле

$$E_{св} = c^2 \cdot \Delta m \text{ или } E_{св} = 931{,}4\left[m_p + (A - z)m_n - m_я\right] \text{ МэВ},$$

где Δm – дефект массы ядра, представляющий собой разность между суммой масс частиц, составляющих ядро, и массой ядра; z – порядковый номер (или зарядовое число), равный числу протонов в ядре; A – массовое число (суммарное число нуклонов в ядре); m_p, m_n, $m_я$ – массы протона, нейтрона и ядра соответственно.

Поскольку в справочных таблицах приводятся значения масс атомов (в а.е.м)., а не ядер, то удобнее вычислять энергию связи ядра по формуле

$$E_{св} = 931\left[zm_H + (A - z)m_n - m_a\right] \text{ МэВ},$$

где m_H – масса атома водорода $_1H^1$; m_a – масса данного атома.

С учётом выше сказанного, запишем удельную энергию связи $_8O^{17}$ и рассчитаем её в единицах МэВ/нуклон.

$$\varepsilon_{уд} = \frac{E_{св}}{A} = 931\left[zm_H + (A - z)m_n - m_{^{17}_{8}O}\right]/A =$$

$$= \frac{931{,}4}{17}\left[8 \cdot 1{,}00783 + (17 - 8) \cdot 1{,}00867 - 16{,}99913\right] =$$

$$= 7{,}75 \text{ МэВ/нуклон.}$$

4.3. Ядерные реакции.

Задача 4.3.1.

Определить энергию реакции $_5B^{10}(n,\alpha)_3Li^7$, протекающей в результате взаимодействия весьма медленных нейтронов с покоящимися ядрами бора. Найти также кинетические энергии продуктов реакции.

Решение

В развёрнутом виде ядерная реакция записывается так

$$_5B^{10} + {_0n^1} \rightarrow {_3Li^7} + {_2\alpha^4}.$$

Энергию реакции Q найдём по формуле

$$Q = c^2\left[\left(m_{B^{10}} + m_n\right) - \left(m_{Li^7} + m_{He^4}\right)\right].$$

Заменив массы ядер атомов массами самих атомов, значения которых даны в таблицах, получим

$$Q = 931{,}4\left[\left(10{,}01294 + 1{,}00867\right) - \left(7{,}01601 + 4{,}00260\right)\right] = 2{,}79 \text{ МэВ}.$$

Чтобы найти кинетические энергии продуктов реакции – ядра лития Li^7 и α– частицы, применим закон сохранения энергии в виде

$$\sum T + Q = \sum T',$$

где $\sum T$ – сумма кинетических энергий частиц до реакции; $\sum T'$ – сумма кинетических энергий частиц (продуктов реакции) после реакции. Из условия задачи следует, что величиной $\sum T$ можно пренебречь.

Тогда получим для суммы кинетических энергий частиц Li^7 и He^4

$$T_{Li} + T_{He} = Q.$$

Чтобы составить второе уравнение, связывающее неизвестные T_{Li} и T_{He}, применим закон сохранения импульса. Полагая суммарный импульс частиц до реакции равным нулю, приходим к выводу, что и после реакции он должен быть равен нулю

$$P_{Li} + P_{He} = 0,$$

отсюда для модулей импульсов имеем $P_{Li} = P_{He}$.

Переходя от импульсов частиц к их кинетическим энергиям $\left(P = \sqrt{2mT}\right)$, получим $m_{Li} \cdot T_{Li} = m_{He} \cdot T_{He}$.

Отсюда $$T_{Li} = \frac{Q \cdot m_{He}}{m_{Li} + m_{He}}; \quad T_{He} = \frac{Q \cdot m_{Li}}{m_{Li} + m_{He}}.$$

Округлив значения масс ядер m_{Li}, m_{He} до целых чисел, получим

$$T_{Li} = \frac{4Q}{11} = \frac{4 \cdot 2{,}79}{11} = 1{,}02 \text{ МэВ}; \qquad T_{He} = \frac{7Q}{11} = 1{,}78 \text{ МэВ}.$$

Таблицы масс частиц и изотопов.

Элементарная частица		Масса, а.е.м.
Фотон	${}^{0}_{0}\gamma$	0
Электрон	${}^{0}_{-1}e$	0,000549
Протон	${}^{1}_{1}p$	1,007276
Нейтрон	${}^{1}_{0}n$	1,008665

Нейтральный атом		Масса, а.е.м.
Водород	${}^{1}_{1}H$	1,007825
	${}^{2}_{1}H$	2,014102
	${}^{3}_{1}H$	3,016049
Гелий	${}^{3}_{2}He$	3,016030
	${}^{4}_{2}He$	4,002603
Литий	${}^{6}_{3}Li$	6,015126
	${}^{7}_{3}Li$	7,016005
Бериллий	${}^{9}_{4}Be$	9,012186
	${}^{10}_{4}Be$	10,013535
Бор	${}^{10}_{5}B$	10,012939
	${}^{11}_{5}B$	11,009305
Углерод	${}^{12}_{6}C$	12,000000
	${}^{13}_{6}C$	13,003354
Натрий	${}^{22}_{11}Na$	21,994435
	${}^{23}_{11}Na$	22,989773
Свинец	${}^{206}_{82}Pb$	205,974446