

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Многопрофильный колледж

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ
ОП.01 «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ
ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ»**

**для обучающихся специальности
21.02.19 Землеустройство**

СОДЕРЖАНИЕ

1 Введение	3
2 Методические указания	5
Практическое занятие 1	5
Практическое занятие 2	7
Практическое занятие 3	8
Практическое занятие 4	9
Практическое занятие 5	11
Практическое занятие 6	13
Практическое занятие 7	15
Практическое занятие 8	17
Практическое занятие 9	18
Практическое занятие 10	21
Практическое занятие 11	22
Практическое занятие 12-13	23
Практическое занятие 14	24
Практическое занятие 15	26
Практическое занятие 16	28
Практическое занятие 17	30
Практическое занятие 18	31
Практическое занятие 19	32
Практическое занятие 20	33
Практическое занятие 21	35
Практическое занятие 22	37
Практическое занятие 23	38
Практическое занятие 24	39
Практическое занятие 25	41
Практическое занятие 26	43
Практическое занятие 27	44
Практическое занятие 28	46
Практическое занятие 29	47
Практическое занятие 30	49

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки обучающихся составляют практические занятия.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование профессиональных практических умений (умений выполнять определенные действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности) или учебных практических умений (умений решать задачи по математике), необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебного предмета «Математические методы решения прикладных профессиональных задач» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения обучающийся должен уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план;

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Содержание практических занятий ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению **профессиональными компетенциями**:

ПК 1.1 Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке;

ПК 2.1 Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости;

ПК 3.4 Осуществлять сбор, систематизацию и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости;

ПК 3.5 Проводить вспомогательные работы при определении стоимостей

Также формированию **общих компетенций**:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

Выполнение практических работ по учебной дисциплине «Математические методы решения прикладных профессиональных задач» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;

- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;

- формирование и развитие умений: наблюдать, сравнивать, сопоставлять, анализировать, делать выводы и обобщения, самостоятельно вести исследования, пользоваться различными приемами измерений, оформлять результаты в виде таблиц, схем, графиков;

- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;

- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся в рамках соответствующей темы, после освоения дидактических единиц, которые обеспечивают наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1 Матрицы и определители

Практическое занятие №1

Действия над матрицами

Цель: формирование умений выполнять арифметические действия с квадратными и прямоугольными матрицами, применять матрицы к решению задач.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности,

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix};$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}; G = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -7 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}; H = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Выполните действия:

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| а) $A \cdot B + C \cdot D$; | б) $A \cdot C - B \cdot D$; |
| в) $A \cdot D + C^2$; | г) $B \cdot A - C \cdot B$; |
| д) $B \cdot C - C \cdot A$; | е) $D \cdot A + B^2$; |
| ж) $D \cdot B + A^2$; | з) $D^2 - D \cdot C$; |
| и) $F \cdot G + G \cdot H$; | к) $F \cdot H - G \cdot F$; |
| л) $H \cdot F - G^2$; | м) $F \cdot G + H^2 - F^2$. |

2. Решите задачи:

а) Фирма оказывает услуги трёх видов и при этом использует ресурсы двух типов. Нормы затрат ресурсов на единицу услуг каждого вида заданы матрицей: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Стоимость единицы ресурсов каждого типа задана матрицей $B = \begin{pmatrix} 10 & 15 \end{pmatrix}$. Каковы общие затраты фирмы на оказание 100 единиц услуг первого вида, 200 единиц услуг второго вида и 150 единиц услуг третьего вида?

б) Поступление расходных материалов в одну геодезическую фирму описывается матрицей $A_1 = \begin{pmatrix} 16 & 20 & 100 \\ 30 & 19 & 50 \\ 26 & 34 & 82 \end{pmatrix}$, а поступление расходных материалов в другую геодезическую фирму описывается матрицей $A_2 = \begin{pmatrix} 110 & 32 & 49 \\ 28 & 25 & 75 \\ 37 & 16 & 86 \end{pmatrix}$. Найдите суммарный завоз в обе фирмы, годовой завоз в обе фирмы, если по договору производится ежемесячный завоз одинаковых партий расходных материалов.

в) По заказу с завода в магазин доставили товары, поступление которых описывается матрицей $A_1 = \begin{pmatrix} 1500 & 756 & 1234 \\ 864 & 1490 & 542 \\ 1681 & 438 & 981 \end{pmatrix}$, но данные товары не пользуются спросом. Найдите количество товаров, оставшихся на складе, если количество купленных товаров описывается матрицей $A_2 = \begin{pmatrix} 1272 & 426 & 899 \\ 141 & 1360 & 413 \\ 945 & 390 & 867 \end{pmatrix}$.

г) Найти общую стоимость сырья, планируемую для производства продукции двух видов P_1 и P_2 , если план выпуска продукции задан матрицей $P = \begin{pmatrix} 20 & 50 \end{pmatrix}$. Нормы расхода сырья трёх видов S_1, S_2, S_3 на единицу продукции задана матрицей $S = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, и известна стоимость единицы сырья каждого вида (усл.ед.) – матрица $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите задание.
2. Определите, какие действия, и по каким правилам необходимо выполнить. Прочитайте конспект.
3. Выполните действия. Проверьте правильность вычислений.

Ход работы:

Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдите: $A+B$; $2A$; AB ; BA .

$$A + B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -8 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 11 \\ 16 & -16 & -4 \\ 14 & -14 & -8 \end{pmatrix};$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -18 & 2 \\ -11 & -10 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка **"отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка **"хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка **"удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка **"неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.1 Матрицы и определители

Практическое занятие №2

Вычисление определителей 2-го и 3-го порядка

Цель: формирование умений находить определители матриц второго и третьего порядка, применять определители к решению задач.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Найдите определители:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix};$

б) $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix};$

в) $\begin{vmatrix} 1,2 & 3,7 \\ 1,1 & 8,5 \end{vmatrix};$

г) $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix};$

д) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix};$

е) $\begin{vmatrix} 8 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix};$

ж) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & -6 & 3 \\ 5 & 4 & 7 \end{vmatrix};$

з) $\begin{vmatrix} 0 & 6 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix};$

и) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -9 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -2 \end{vmatrix}.$

2. Решите задачи:

а) Потребление одной из отраслей трёхотраслевой системы зависит от некоторого изменяемого параметра. Установить, при каких положительных значениях параметра λ матрица прямых затрат данной системы будет являться продуктивной:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & \lambda & 0,4 \\ 0,5 & 2\lambda & 0,5 \\ 0,3 & \lambda & 0,3 \end{pmatrix}.$$

б) Выяснить, является ли продуктивной матрица прямых затрат трёхотраслевой экономической системы $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,3 \\ 0,6 & 0,5 & 0,7 \end{pmatrix}$, и в случае положительного ответа составить межотраслевой баланс, если вектор конечной продукции $Y = (100 \ 50 \ 400)$.

Порядок выполнения работы:

- 1 Запишите определитель, определите какого он порядка.
- 2 Используя соответствующее определение, вычислите значение определителя.

Ход работы:

Вычислить определители:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 3A_{11} + (-1)A_{21} + 0A_{31} + 1A_{41} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

= 122.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка **"отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка **"хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка **"удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка **"неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.1 Матрицы и определители

Практическое занятие №3

Нахождение обратной матрицы

Цель: научиться находить обратные матрицы и применять их для решения практических задач.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности,

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Найдите матрицы, обратные данным:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};$

г) $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix};$

д) $\begin{pmatrix} 2 & -6 & 7 \\ 1 & 5 & -7 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix};$

е) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix};$

ж) $\begin{pmatrix} -6 & -2 & 7 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix};$

з) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

2. Решите задачу:

По заданным в таблице 1 данным межотраслевого баланса (условные денежные единицы) найти необходимый объём валового выпуска каждой из двух отраслей, если конечное потребление первой отрасли увеличится на 100%, а второй – сохранится на прежнем уровне.

Отрасль	Потребление	Конечный	Валовый
---------	-------------	----------	---------

		P ₁	P ₂	продукт	выпуск
производство	P ₁	5	18	77	100
	P ₂	12	26	162	200

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте матричное уравнение.
3. Вычислите обратную матрицу.
4. Найдите значения неизвестных.
5. Запишите ответ.

Ход работы:

Пусть задана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Найдем } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -104.$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -12, A_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -16, A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -31, A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 2, A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 13, A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 26, A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13.$$

Составим обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} -2 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix}.$$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка **"отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка **"хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка **"удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка **"неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.2 Системы линейных алгебраических уравнений

Практическое занятие №4

Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Цель: научиться решать системы линейных уравнений, используя формулы Крамера, решать практические задачи.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности,

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Решите системы уравнений методом Крамера:

- а) $\begin{cases} 2x + 3y = 3, \\ 5x + 6y = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ 2x + 5y = 16; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -7x + 3y = 1, \\ 2x - 6y = -10; \end{cases}$
- г) $\begin{cases} x + 2y + z = 9, \\ 2x - y - z = -5, \\ 3x + y + 2z = 6; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 7, \\ 5x - y - z = 2, \\ x + y + z = 4. \end{cases}$
- е) $\begin{cases} 2x - 5y + 3z = -3, \\ 3x - y + 2z = 2, \\ x + y - z = 2; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} 5x - 2y + 3z = 1, \\ x + 7y - 2z = 3; \\ 4x - 9y + 5z = 0; \end{cases}$
- з) $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 5x - z = 4, \\ 4y + 2z = 10; \end{cases}$ и) $\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 2, \\ 2x + 2y - 3z = 3, \\ -x + 4y + 4z = 6. \end{cases}$

2. Решите задачи:

- а) Издержки перевозки двумя транспортными средствами выражаются функциями $y=20x+100$ и $y=25x+70$, где x – дальность перевозки в сотнях километров, а y – транспортные расходы в денежных единицах. Определить, начиная с какого расстояния более экономичным становится первое транспортное средство.
- б) Вкладчик положил в банк 21000 р. на два разных счета. По первому из них банк выплачивает 4% годовых, а по второму – 6% годовых. Через год вкладчик получил по процентам 1020 р. Сколько рублей он положил на каждый счет?
- в) Периметр прямоугольного земельного участка равен 28 м. Если две противоположные стороны увеличить на 6 м, а две другие уменьшить на 2 м, то его площадь увеличится на 24м². Найдите стороны участка.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему уравнений.
2. Запишите и вычислите определитель системы.
3. Вычислите определители каждой неизвестной.
4. Найдите значения неизвестных, используя формулы Крамера.

Ход работы:

Рассмотрим пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Вычислим определители каждой переменной:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 40 - 15 + 10 - 0 = 20.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 30 + 0 + 45 - 0 - 20 = -10.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 30 - 0 - 20 - 5 = 0.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{10} = -1; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0.$$

Ответ: (2;-1;0).

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка **"отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка **"хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка **"удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка **"неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.2 Системы линейных алгебраических уравнений

Практическое занятие №5

Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы

Цель: Научиться решать системы линейных уравнений матричным способом, решать практические задачи.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности,

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Решить системы линейных уравнений:

$$a) \begin{cases} 4x + 7y + 3z = 4; \\ 5x - 2y - 2z = 0, \\ 3x + y - 3z = 4; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 5x - 3y + 2z = 5, \\ 3x + y + 2z = 8, \\ 2x - 4y = 10; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x + 3y - 2z = 0, \\ 4x - 3y + z = 3, \\ 2x + y - 2z = -1; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} 2x + 2y - z = 3, \\ 3x + 7y = 13, \\ 2x - 5z = -11. \end{cases}$$

2. Решите задачи:

- а) Если одну сторону прямоугольного участка увеличить на 30%, а другую уменьшить на 10%, то периметр увеличится на 12 м. Если же первую сторону уменьшить на 10%, а вторую уменьшить на 20%. То периметр уменьшится на 32 м. Найдите периметр участка.
- б) Предприятие выпускает 4 вида изделий с использованием четырёх видов сырья. Нормы расхода сырья даны как элементы матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти затраты сырья на каждый вид изделия при заданном плане их выпуска (60 50 35 40).

- в) На выделенных одинаковых площадях земли требуется разметить 20 садовых участков, 22 участка для индивидуальной жилой застройки и 17 участков для коммерческого строительства. При этом можно применить три метода разметки. Количество участков, получаемых на каждой выделенной площади при каждом способе разметки, указано в таблице:

Тип участка	Метод разметки		
	1	2	3
Садовые участки	3	2	1
Индивидуальная жилая застройка	1	6	2
Коммерческое строительство	4	1	5

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте матричное уравнение.
3. Вычислите обратную матрицу.
4. Найдите значения неизвестных.
5. Запишите ответ.

Ход работы:

Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -25 \end{cases}.$$

Найдем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = -104.$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -12; \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -16;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -31; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 13; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 26; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13.$$

Составим обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix}.$$

Решим матричное уравнение:

$$X = A^{-1}C = -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix} = -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} -120 + 64 + 56 \\ -310 - 8 - 98 \\ 130 - 104 + 182 \end{pmatrix} = -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} 0 \\ -416 \\ 208 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (0;4;-2).

$$\text{Сделаем проверку: } \begin{cases} 0 + 12 - 2 = 10 \\ 0 - 8 + 4 = -4 \quad . \text{ (верно)} \\ 0 - 4 - 10 = -14 \end{cases}$$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка **"отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка **"хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка **"удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка **"неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.2 Системы линейных алгебраических уравнений

Практическое занятие №6

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Цель: научиться решать системы линейных уравнений методом последовательного исключения переменных (методом Гаусса), решать прикладные задачи.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Решить системы линейных уравнений:

$$a) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3; \end{cases} \quad б) \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

2. Решите задачи:

а) Найти соотношение национальных доходов четырёх стран для сбалансированной торговли, если задана структурная матрица торговли:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

б) Найти равновесный вектор национальных доходов в модели международной торговли, если задана структурная матрица торговли, а суммарный доход стран равен 402 усл.ед.

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,5 & 0,7 \\ 0,3 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте расширенную матрицу.
3. Выполните элементарные преобразования строк матрицы, исключая последовательно переменные. В результате должна получиться ступенчатая матрица.
4. По ступенчатой матрице составьте систему.
5. Последовательно найдите значения всех неизвестных.
6. Запишите ответ.

Ход работы:

Рассмотрим пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Полученной матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1; \\ -2x_3 = 0 \end{cases}$$

Начиная снизу вверх, находим значения неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x_1 + 2 \cdot (-1) = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1. \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{Ответ: } (2; -1; 0).$$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "**отлично**" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "**хорошо**" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "**удовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "**неудовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.2 Системы линейных алгебраических уравнений

Практическое занятие №7

Решение систем линейных уравнений различными способами

Цель: научиться решать системы линейных уравнений различными методами, решать прикладные задачи.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Решить системы линейных уравнений:

$$1) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 7x_3 = -1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -25 \end{cases}$$

Порядок выполнения работы

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Чтобы решить систему методом Крамера, составим определитель из коэффициентов при неизвестных.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Этот определитель называется определителем системы:

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель Δ_3 получается из определителя Δ путем замены третьего столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Чтобы вычислить значения неизвестных, воспользуемся формулами Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$;
 $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

Для решения системы методом Гаусса используйте алгоритм:

- 1) Запишите систему линейных уравнений.
- 2) Составьте расширенную матрицу.
- 3) Выполните элементарные преобразования строк матрицы, исключая последовательно переменные. В результате должна получиться ступенчатая матрица.
- 4) По ступенчатой матрице составьте систему.
- 5) Последовательно найдите значения всех неизвестных.
- 6) Запишите ответ.

Для решения системы матричным методом:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте матричное уравнение.
3. Вычислите обратную матрицу.

Чтобы вычислить обратную матрицу, нужно:

- а) вычислить определитель матрицы A ($\Delta A \neq 0$);
- б) найти алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы A ;
- в) транспонировать матрицу из алгебраических дополнений;

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

- г) найти обратную матрицу:

Чтобы найти неизвестную матрицу X , нужно умножить обратную матрицу A^{-1} на матрицу B , состоящую из свободных членов.

4. Найдите значения неизвестных.

5. Запишите ответ.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "**отлично**" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "**хорошо**" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "**удовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "**неудовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.1 Векторы. Прямоугольная и полярная системы координат

Практическое занятие №8

Векторы. Действия с векторами. Декартова система координат в пространстве.

Расстояние между точками. Угол между векторами

Цель: формирование умений выполнять действия с векторами на плоскости и в пространстве, решать прикладные задачи.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Решите задачи:

- Три угла некоторого земельного участка имеют координаты $(-3; -2)$, $(0; -1)$ и $(-2; 5)$. Докажите, что участок имеет прямоугольную форму, и найдите площадь участка.
- На склоне горы имеются четыре сооружения, условно обозначенные A , B , C и D . Даны координаты расположения трёх сооружений: $A(2; -1; 4)$, $B(3; 2; -6)$, $C(-5; 0; 2)$. Сооружение D расположено в середине между сооружениями B и C . Найдите расстояние между сооружениями A и D .
- Дорога из одного населённого пункта в другой проходит сначала 12 км на север, а затем 5 км на восток. Найдите длину дороги и расстояние между населёнными пунктами.
- Предприятие выпускает ежедневно четыре вида изделий, основные производственно – экономические показатели которых приведены в таблице:

Вид изделия	Количество изделий	Расход сырья	Норма времени изготовления	Цена изделия
-------------	--------------------	--------------	----------------------------	--------------

1	20	5	10	30
2	50	2	5	15
3	30	7	15	45
4	40	4	8	20

Требуется определить следующие ежесуточные показатели: расход сырья S , затраты рабочего времени T и стоимость P выпускаемой продукции предприятия.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектами лекций, выберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

Даны точки $A(-3; 1; -1)$ и $B(2; -4; 1)$. Разложите вектор $\overrightarrow{AB}$ по векторам базиса и найдите его длину.

Решение.

$$1) \overrightarrow{AB} = \{2 - (-3); -4 - 1; 1 - (-1)\} = \{5; -5; 2\} - \text{координаты вектора.}$$

2) Разложим $\overrightarrow{AB}$ по векторам базиса:

$$\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}.$$

3) Длину вектора найдем по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}.$$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "**отлично**" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "**хорошо**" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "**удовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "**неудовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.1 Векторы. Прямоугольная и полярная системы координат

Практическое занятие №9

Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов

Цель: формирование умений применять теоретические знания при решении практических задач.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

m- количество букв в имени

n- количество букв в фамилии

r- месяц рождения

- 1) Найти длину векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$,
если

$$|a| = 4, |b| = 5, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$$

- 2) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если
 $|a| = 4, |b| = 5, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$

- 3) Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = (m, n, k), \vec{b} = (m + 2, n - 5, k - 2)$ и его длину

- 4) Даны векторы $\vec{a} = (m, n, k), \vec{b} = (m + 2, n - 5, k - 2), \vec{c} = (m - 3, n, k + 1)$

Вычислить: смешанное произведение векторов;

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектами лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи

Ход работы:

Пример 1

- а) Найти длину векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$,
если

$$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$$

- б) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если

$$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$$

Решение:

- а) По условию требуется найти длину вектора (векторного произведения). По соответствующей формуле:

$$|[\vec{a} \times \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 3 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Ответ: $|[\vec{a} \times \vec{b}]| = 3\sqrt{3}$ ед. $\approx 5,20$ ед.

- б) По условию требуется найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Площадь данного параллелограмма численно равна длине векторного

произведения:

$$S_{\pi\text{-грамма}} = |[\vec{a} \times \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 3 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Ответ: $S_{\pi\text{-грамма}} = 3\sqrt{3} \text{ ед}^2 \approx 5,20 \text{ ед}^2$.

Пример 2

Найти векторное произведение векторов $\vec{a}(-1; 2; -3)$, $\vec{b}(0; -4; 1)$ и его длину.

Решение:

Задача состоит из двух частей: во-первых, необходимо найти само векторное произведение (вектор), и во-вторых, его длину.

1) Найдём векторное произведение:

$$\begin{aligned}\vec{N} = [\vec{a} \times \vec{b}] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \\ &= (2 - 12) \cdot \vec{i} - (-1 - 0) \cdot \vec{j} + (4 - 0) \cdot \vec{k} = -10\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}\end{aligned}$$

В результате получен вектор $\vec{N} = -10\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$, или, ещё можно записать $\vec{N}(-10; 1; 4)$.

Существует очень хороший способ проверки: как следует из определения, вектор $\vec{N}$ должен быть ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ортогональность векторов, как мы разбирались, проверяется с помощью скалярного произведения:

$$\vec{N} \cdot \vec{a} = -10 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = 10 + 2 - 12 = 0 \Rightarrow \vec{N} \perp \vec{a};$$

$$\vec{N} \cdot \vec{b} = -10 \cdot 0 + 1 \cdot (-4) + 4 \cdot 1 = 0 - 4 + 4 = 0 \Rightarrow \vec{N} \perp \vec{b}.$$

2) Вычислим длину векторного произведения. Используем простейшую формулу для вычисления длины вектора

$$|\vec{N}| = \sqrt{(-10)^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{100 + 1 + 16} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$$

Ответ: $\vec{N} = -10\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$, $|\vec{N}| = 3\sqrt{13} \text{ ед} \approx 10,82 \text{ ед}$.

Пример 3

Даны векторы $\vec{a}(1; -1; 2)$, $\vec{b}(0; 4; 3)$, $\vec{c}(3; 2; -6)$.

Вычислить:

смешанное произведение векторов;

Решение:

а) По формуле смешанного произведения:

$$p = (\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-24 - 6) + 3 \cdot (-3 - 8) = -30 - 33 = -63$$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.1 Векторы. Прямоугольная и полярная системы координат

Практическое занятие №10

Решение задач на использование векторного и смешанного произведения для нахождения площадей и объёмов

Цель: формирование умений применять теоретические знания при решении практических задач.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

m- количество букв в имени

n- количество букв в фамилии

p- месяц рождения

1. Являются ли точки $A(-3, n-5)$, $B(4, n-5)$, $C(4, m)$ углами прямоугольного участка земли?

2. Проверить, являются ли точки $A(m, n-4, 3)$, $B(k, n-2, 12)$, $C(m+2, n, 5)$ и $D(5, m+3, k-7)$ вершинами трапеции.

3. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

4. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = (m, n, k)$, $\vec{b} = (m+2, n-5, k-2)$ и его длину.

5. Даны векторы $\vec{a} = (m, n, k)$, $\vec{b} = (m+2, n-5, k-2)$, $\vec{c} = (m-3, n, k+1)$. Вычислить смешанное произведение векторов.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.

2. Пользуясь конспектами лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

а) Найти длину векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

б) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение:

а) По условию требуется найти длину вектора (векторного произведения). По соответствующей формуле:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha = 2 \cdot 3 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}.$$

б) По условию требуется найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Площадь данного параллелограмма численно равна длине векторного произведения: $S_{пар.} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle \alpha = 2 \cdot 3 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка **"отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка **"хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка **"удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка **"неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.2 Линии на плоскости

Практическое занятие №11

Составление уравнений прямых и решение задач на взаимное расположение прямых на плоскости

Цель: формирование умений применять теоретические знания при решении практических задач.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

m- количество букв в имени

n- количество букв в фамилии

p- месяц рождения

Решите задачи

1. Геометрист находится в точке пересечения прямых $mx - py + n = 0$ и $x - y - p = 0$. Найти координаты точки нахождения геометриста.

2. Найдите острый угол между прямыми: $mx + ny - p = 0$ и $px - py - pm = 0$.

3. Через точку с координатами $(-n; 1)$ будет проложена новая дорога, которая параллельна дороге, проходящей по прямой $px + y - m = 0$. Составить уравнение прямой, по которой будет проходить новая дорога.

4. Из точки $A(m; -1)$ на прямую $px + py + l = 0$ опущен перпендикуляр. Составьте его уравнение.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.

2. Пользуясь конспектами лекций, выберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

Найти точку пересечения прямых:

$$2x + 3y - 12 = 0 \text{ и } x - y - 1 = 0.$$

Решим систему:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 12 = 0, \\ x - y - 1 = 0, \end{cases} \begin{cases} 2(1 + y) + 3y - 12 = 0, \\ x = 1 + y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + 2y + 3y - 12 = 0, \\ x = 1 + y, \end{cases} \begin{cases} 5y = 10, \\ x = 1 + y, \end{cases} \begin{cases} y = 2, \\ x = 3. \end{cases}$$

Ответ: точка $M(3; 2)$.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "**отлично**" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "**хорошо**" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "**удовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "**неудовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.2 Линии на плоскости

Практическое занятие №12-13

Решение задач на составление уравнений кривых второго порядка. Построение кривых второго порядка

Цель: формирование умений применять теоретические знания при решении практических задач.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Построить линии, заданные уравнениями:

а) $x^2 + y^2 = 25$;

б) $(x - 3)^3 + (y + 2)^2 = 9$;

в) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$;

г) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1$;

д) $\frac{y^2}{9} - x^2 = 1$;

е) $x^2 = -10y$.

2. Решите задачи:

а) Клумба имеет форму эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{121} = 1$. Найдите длину и ширину клумбы.

- б) Составить уравнение гиперболы, если её фокусы находятся в точках $(-4; 0)$ и $(4; 0)$ и длина вещественной оси равна 6.
- в) Найти эксцентриситет гиперболы $24x^2 - 25y^2 = 600$.
- г) Составить уравнения парабол с вершиной в начале координат, для которых директрисами служат прямые $x = -2$ и $x = 3$.
- д) Найти площадь четырёхугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $x^2 + 5y^2 = 20$, а две другие совпадают с концами его малой оси.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектами лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $F(8;0)$ вдвое больше, чем от прямой $x-2=0$.

Решение

Пусть $M(x;y)$ – точка линии. По условию задачи $MF=2MN$.

Тогда

$$\sqrt{(x_M - x_F)^2 + (y_M - y_F)^2} = 2\sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2};$$

$$\sqrt{(x - 8)^2 + (y - 0)^2} = 2\sqrt{(x - 2)^2 + (y - y)^2};$$

Возводя в квадрат и раскрывая скобки, получим

$$3x^2 - y^2 = 48, \text{ или } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1. \text{ Получили уравнение гиперболы.}$$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "**отлично**" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "**хорошо**" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "**удовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "**неудовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1 Комплексные числа

Практическое занятие №14

Алгебраическая форма комплексных чисел. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Цель: Научиться выполнять действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 3 + 2i,$$

$$z_2 = 4 - i,$$

$$z_3 = 5 + 2i,$$

$$z_4 = 6 - 3i.$$

Выполните действия:

а) $z_1 \cdot z_2 + z_3 \cdot z_4$;

б) $z_1 \cdot z_4 + z_2 \cdot z_3$

в) $z_1 \cdot z_3 - z_2 \cdot z_4$;

г) $\frac{z_1}{z_2}$;

д) $\frac{z_2}{z_3}$;

е) $\frac{z_3}{z_4}$;

ж) $\frac{z_4}{z_1}$;

з) $|z_1|, |z_2|, |z_3|, |z_4|$.

2. Решите задачи:

а) Дан квадратный участок земли и комплексные координаты двух его вершин, прилежащих к одной стороне, a и b . Найти комплексные координаты двух других вершин участка.

б) Дан четырёхугольный участок земли и комплексные координаты его вершин a, b, c и d . Докажите, что участок имеет форму параллелограмма, если выполняется условие $a+c=b+d$.

в) Геодезист находится в точке с комплексными координатами $A(3-5i)$. На некотором расстоянии от него проходит прямая дорога, которая задаётся уравнением $(2-i)z + (2+i)\bar{z} - 7 = 0$. Составить уравнение прямой, по которой будет проходить новая дорога, параллельная данной и содержащая точку, в которой стоит геодезист.

г) Геодезист стоит в точке с комплексными координатами $A(4-3i)$. На некотором расстоянии от него проходит прямая дорога, которая задаётся уравнением $(5+2i)z + (5-2i)\bar{z} + 20 = 0$. Составить уравнение прямой, по которой будет проходить новая дорога, перпендикулярная данной и содержащая точку, в которой находится геодезист

Порядок выполнения работы:

Внимательно ознакомьтесь с условием задания.

Пользуясь своими школьными знаниями (в случае затруднения воспользуйтесь справочными материалами), выполните задание.

Ход работы:

Пример. Найти $(8+i):(2-3i)$.

Решение. Перепишем это отношение в виде дроби: $\frac{8+i}{2-3i}$

Умножив, её числитель и знаменатель на $2+3i$ и выполнив все преобразования, получим:

$$\frac{(8+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{13+26i}{13} = 1 + 2i$$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка **"отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка **"хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка **"удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка **"неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1 Комплексные числа

Практическое занятие №15

Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Цель: Научиться записывать комплексные числа в тригонометрической форме, выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Даны комплексные числа $z_1 = -3 - 5i$, $z_2 = -7,2 + 7,2i$, $z_3 = 2 + 6i$. Записать эти числа в тригонометрической форме.

2. Вычислите:

а) $z_2 \cdot z_3$;

б) $\frac{z_1}{z_3}$;

в) z_1^5 ;

г) $\sqrt{z_2}$.

3. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

а) $(3 \cdot (\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}))^2$

б) $\frac{24(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)}{3(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)}$.

4. Решите задачи:

а) На некотором расстоянии от квадратного участка земли в точке С стоит геодезист. Он видит сторону этого участка АВ под прямым углом (рис.1). Расстояние от геодезиста до углов участка А и В равны а и b соответственно. На каком расстоянии от центра участка находится геодезист?

б) Найти образы точек $z_1 = 1$; $z_2 = i$, $z_3 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ при стереографической проекции.

в) На прямой, содержащей медиану АД прямоугольного треугольника ABC с прямым углом С, взята точка Е, удаленная от вершины А на расстояние, равное 4. Найдите площадь треугольника BCE, если BC=6, AC=4.

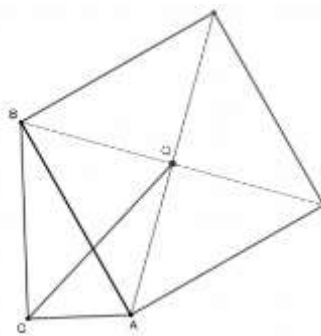


Рис. 1

Порядок выполнения работы:

1. Запишите заданные числа в тригонометрической форме, используя алгоритм перехода к тригонометрической форме.

2. Выполните заданные действия.

Ход работы:

Даны комплексные числа: $z_1=(7;1)$, $z_2=(-1,5;1,5)$, $z_3=(4;-3)$. Записать числа z_1 , z_2 и z_3 в тригонометрической форме.

Решение:

$$1) z_1 = 7 + i$$

$$|z_1| = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2},$$

Число находится в первой четверти, значит

$$\varphi = \arctg \frac{1}{7} = \arctg 0,1429.$$

$$\square_1 = 7 + \square = 5\sqrt{2}(\cos 8^\circ 8' + \square\square\square\square 8^\circ 8').$$

$$2) \square_2 = -1,5 + 1,5\square$$

$$|\square_2| = \sqrt{(-1,5)^2 + 1,5^2} = \sqrt{2,25 + 2,25} = \sqrt{4,5} = 2,1$$

Число находится во второй четверти, значит $\square = \square\square\square\square\square \frac{\square}{\square} + \square = \square\square\square\square\square(-1) + \square = -\frac{\square}{4} + \square = \frac{3\square}{4};$

$$\square_2 = -1,5 + 1,5\square = 2,1(\cos \frac{3\square}{4} + \square\square\square\square \frac{3\square}{4}).$$

$$3) \square_3 = 4 - 3\square$$

$$|\square_3| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Число находится в четвертой четверти, значит

$$\square = \square\square\square\square\square \frac{-3}{4} = \square\square\square\square\square(-0,75) = -36^\circ 52'.$$

$$\square_3 = 4 - 3\square = 5(\cos(-36^\circ 52' + \square\square\square\square(-36^\circ 52')).$$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "**отлично**" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "**хорошо**" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "**удовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "**неудовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1 Комплексные числа

Практическое занятие №16

Переход из одной формы комплексных чисел к другой

Цель: Научиться записывать комплексные числа в тригонометрической, алгебраической и показательной форме.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

- Даны комплексные числа: $z_1=(-3;-5)$, $z_2=(-7,2;7,2)$, $z_3=(2;6)$.

Записать эти числа в тригонометрической форме.

- Вычислите:

1) $\square_2 \cdot \square_3$;

2) $\frac{\square_1}{\square_3}$;

3) $\square_1^5$;

4) $\sqrt{\square_2}$;

- Вычислите действия и запишите результат в алгебраической форме:

а) $(3 \cdot (\square \square \square \frac{5\square}{4} + \square \square \square \frac{5\square}{4}))^2$ б) $\frac{24(\square \square \square 75^\circ + \square \square \square 75^\circ)}{3(\cos 30^\circ + \square \square \square 30^\circ)}$.

Порядок выполнения работы:

- Запишите заданные числа в тригонометрической форме, используя алгоритм перехода к тригонометрической форме.
- Выполните заданные действия.

Ход работы:

Даны комплексные числа: $z_1=(7;1)$, $z_2=(-1,5;1,5)$, $z_3=(4;-3)$.

- Записать числа z_1 , z_2 и z_3 в тригонометрической форме.

Решение:

1) $\square_1 = 7 + \square$

$|\square_1| = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$,

Число находится в первой четверти, значит

$\square = \square \square \square \square \frac{1}{7} = \square \square \square \square 0,1429$.

$\square_1 = 7 + \square = 5\sqrt{2}(\cos 8^\circ 8' + \square \square \square \square 8^\circ 8')$.

2) $\square_2 = -1,5 + 1,5\square$

$|\square_2| = \sqrt{(-1,5)^2 + 1,5^2} = \sqrt{2,25 + 2,25} = \sqrt{4,5} = 2,1$

Число находится во второй четверти, значит $\square = \square \square \square \square \square \frac{\square}{\square} + \square = \square \square \square \square (-1) + \square = -\frac{\square}{4} + \square = \frac{3\square}{4}$;

$$\square_2 = -1,5 + 1,5i = 2,1(\cos \frac{3i}{4} + i \sin \frac{3i}{4}).$$

$$3) \square_3 = 4 - 3i$$

$$|\square_3| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Число находится в четвертой четверти, значит

$$\square = \square \square \square \square \square \frac{-3}{4} = \square \square \square \square \square (-0,75) = -36^\circ 52'.$$

$$\square_3 = 4 - 3i = 5(\cos(-36^\circ 52' + i \sin(-36^\circ 52')).$$

2. Вычислите:

$$1) \square_2 \cdot \square_3;$$

$$2) \frac{\square_1}{\square_3};$$

$$3) \square_1^5;$$

$$4) \sqrt{\square_2};$$

Решение:

$$\square_2 \cdot \square_3 = 2,1 \cdot 5 (\cos(135^\circ - 36^\circ 52') + i \sin(135^\circ - 36^\circ 52')) = 10,5(\cos 98^\circ 8' + i \sin 98^\circ 8');$$

$$\frac{\square_1}{\square_3} = \frac{5\sqrt{2}}{5} (\cos(8^\circ 8' - (-36^\circ 52')) + i \sin(8^\circ 8' + 36^\circ 52')) = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ);$$

$$\square_1^5 = (5\sqrt{2})^5 (\cos 5 \cdot 8^\circ 8' + i \sin 5 \cdot 8^\circ 8') = 12500\sqrt{2}(\cos 40^\circ 40' + i \sin 40^\circ 40');$$

Воспользуемся формулой:

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} (\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n})$$

В нашем примере n=2.

$$\sqrt{\square_2} = \square_0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}} (\cos \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 0}{2} + i \sin \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 0}{2});$$

$$\square_0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}} (\cos \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 0}{2} + i \sin \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 0}{2}) = \sqrt{2,1}(\cos 67^\circ 30' + i \sin 67^\circ 30');$$

$$\square_1 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}} (\cos \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 1}{2} + i \sin \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 1}{2}) = \sqrt{2,1}(\cos 247^\circ 30' + i \sin 247^\circ 30').$$

3. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

$$(2 \cdot (\cos \frac{5i}{24} + i \sin \frac{5i}{24}))^6 = 2^6 (\cos \frac{5i}{24} \cdot 6 + i \sin \frac{5i}{24} \cdot 6) = 64 (\cos \frac{5i}{4} +$$

$$i \sin \frac{5i}{4}) = 64 (-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}) = -32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}i;$$

$$\frac{24(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)}{3(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)} = \frac{24}{3} (\cos(75^\circ - 15^\circ) + i \sin(75^\circ - 15^\circ)) = 8(\cos 60^\circ +$$

$$i \sin 60^\circ) = 8(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}) = 4 + 4\sqrt{3}i;$$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "**отлично**" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "**хорошо**" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "**удовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "**неудовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.1 Функция. Предел функции

Практическое занятие №17

Вычисление пределов. Раскрытие неопределённостей

Цель: Научиться вычислять пределы функций.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Вычислить пределы функций:

а) $\lim_{x \rightarrow -2} (-x^3 + 2x^2 - 4x - 1);$

б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{3x^3+24};$

в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2-7x-2}{5x^2-9x-2};$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2+3x};$

д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+5x^2+10}{3x^3+4x^2-1};$

е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin 3x}{x};$

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x};$

з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x+1} \right)^x.$

2. Решите задачу:

Пусть вклад $\square_0$ денежных единиц положен в банк под p процентов годовых. Найти размер вклада через T лет при условии, что начисление процентов производится n раз в год. По заданной сумме, которую следует уплатить через некоторое время банку, необходимо определить сумму полученной ссуды.

Порядок выполнения работы:

1. Найдите предел функции, используя теоремы о пределах.
2. Если получилась неопределенность, определите ее вид и способ раскрытия.
3. Преобразуйте функцию и раскройте неопределенность.
4. Вычислите предел.

Ход работы:

Найти предел функции:

$$\lim_{\square \rightarrow 3} \frac{3\square^2 - 11\square + 6}{2\square^2 - 5\square - 3}$$

Функция представляет собой отношение двух многочленов, обращающихся в нуль в точке $\square = 3$. Поэтому сначала преобразуем данную функцию.

Любой квадратный трехчлен можно разложить на множители с помощью формулы

$$\square\square^2 + \square\square + \square = \square(\square - \square_1)(\square - \square_2), \text{ где } \square_1 \text{ и } \square_2 \text{ корни квадратного трехчлена.}$$

Корнями квадратного трехчлена $3\square^2 - 11\square + 6$ являются числа $\frac{2}{3}$ и 3 ; значит

$$3x^2 - 11x + 6 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 3)$$

А корни квадратного трехчлена $2x^2 - 5x - 3$ равны $\frac{1}{2}$ и 3, следовательно

$$2x^2 - 5x - 3 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3).$$

Возвращаясь к пределу, имеем: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 3)}{2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - 2}{2x + 1} = \frac{9 - 2}{6 + 1} = \frac{7}{7} = 1.$$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка **"отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка **"хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка **"удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка **"неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.1 Функция. Предел функции

Практическое занятие №18

Первый замечательный предел. Второй замечательный предел

Цель: Научиться вычислять пределы функций.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Вычислить пределы функций:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \frac{x}{2}}{x}$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{5x}$

Порядок выполнения работы:

1. Найдите предел функции, используя теоремы о пределах.
2. Если получилась неопределенность, определите ее вид и способ раскрытия.
3. Преобразуйте функцию и раскройте неопределенность.
4. Вычислите предел.

Ход работы:

Найти предел функции:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x}$$

Чтобы вычислить предел функции, нужно воспользоваться формулой первого замечательного предела: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x} = 1$.

Умножим числитель и знаменатель дроби на $\frac{1}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}(x^2 - 2x)}{\frac{1}{x}x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{5x}$$

Преобразуем функцию так, чтобы можно было применить второй замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. Введем новую переменную: $x = -3y$; $x \rightarrow \infty$; $y \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{5x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{-3y}\right)^{5 \cdot (-3y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{-15y} = e^{-15} = \frac{1}{e^{15}}$$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "**отлично**" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "**хорошо**" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "**удовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "**неудовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.1 Функция. Предел функции**Практическое занятие №19****Асимптоты функции. Точки разрыва**

Цель: Научиться находить точки разрыва функций, определять их род, находить асимптоты графиков функций.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Исследовать функции на непрерывность. Найти точки разрыва и определить их род. Найти асимптоты функций.

$$1) y = \frac{2x^2+3}{x^2-9};$$

$$2) y = \frac{2x^2-4x-30}{x^2-25}.$$

Порядок выполнения работы:

Исследовать функцию на непрерывность. Найти асимптоты функции.

$$y = \frac{x^2}{2x-2}.$$

Область определения функции $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

Точка $x = 1$ является точкой разрыва 2 рода, т.к.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2}{2x-2} = \left[\frac{1}{0} \right] = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2}{2x-2} = \left[\frac{1}{0} \right] = +\infty$$

Прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2x-2)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{2x-2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

Конечный вид прямой следующий

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "**отлично**" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "**хорошо**" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "**удовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "**неудовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.2 Дифференциальное исчисление**Практическое занятие №20****Дифференцирование сложных функций**

Цель: Научиться находить производные сложных функций.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Задание:

1. Найти производные функций

а) $y = (5x^3 - 2x)^6$

б) $f(x) = 3 \sin(2x - \frac{\pi}{4})$

в) $f(x) = \arcsin 4x + \arccos^2 x$

г) $f(x) = \log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$

д) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

2. Решите задачу

Масса горных пород в момент времени t выражается по формуле $m = M \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{2t}}$, где M – первоначальная масса горных пород. Найти скорость распада горных пород.

Порядок выполнения работы:

Определить вид функции. Ввести промежуточный аргумент. Определить, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Применить соответствующее правило. Используя таблицу производных, найти производные функций. Раскрыть скобки и привести подобные, если это упростит запись функции.

Ход работы:

Найти производные функций:

1. $g(x) = (1 - 4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u = 1 - 4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$$y' = 10(1 - 4x^2)^9 \cdot (1 - 4x^2)' = 10(1 - 4x^2)^9(-8x) = -80x(1 - 4x^2)^9$$

2. $f(x) = \sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = (\sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (\sin \frac{1}{2}x)' \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x (\cos 2x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$, $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (\sin \frac{1}{2}x)' \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x (\cos 2x)' \\ &= \cos \frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)' \\ &= \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x - 2 \sin \frac{1}{2}x \cdot \sin 2x. \end{aligned}$$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "**отлично**" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "**хорошо**" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но

допущены 2-3 недочета.

Оценка "**удовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "**неудовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.2 Дифференциальное исчисление

Практическое занятие №21

Применение производной к исследованию функций

Цель: Научиться исследовать функции и строить графики.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Исследовать функцию по общей схеме и построить ее график:

1. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.

2. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$.

Порядок выполнения работы:

1. Провести анализ заданной функции по общей схеме.

2. Построить график функции.

Ход работы:

Исследовать функцию и построить ее график.

$$y = \frac{x^2}{2x-2}$$

1. Область определения функции $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

2. При подстановке значения $x = 0$ получим $y(0) = 0$.

Такую же точку получим, если приравняем функцию к нулю. Точка $x = 0$ - единственная точка пересечения с осями координат.

3. Проверяем функцию на четность

$$y(-x) = \frac{(-x)^2}{-2x-2} = -\frac{x^2}{2x+2}$$

$$y(-x) \neq y(x); y(-x) \neq -y(x).$$

Итак, функция ни четная, ни нечетная, непериодическая.

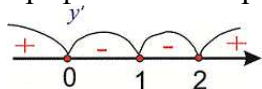
4. Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную функции

$$y' = \frac{2x(2x-2) - x^2 \cdot 2}{(2x-2)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2}{(2x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(2x-2)^2}$$

Приравняв ее к нулю, получим критические точки $x = 0$; $x = 2$. Они разбивают область определения на следующие интервалы монотонности $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения.

Графически интервалы монотонности будут иметь вид



Исследуемая функция возрастает на интервалах $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ и убывает $(0; 1) \cup (1; 2)$.

5. Точка $x = 0$ – точка локального максимума, $x = 2$ – локального минимума. Найдем значение функции $y_{\max} = 0$; $y_{\min} = 2$.

6. Для отыскания интервалов выпуклости найдем вторую производную

$$y'' = \frac{(4x - 4)(2x - 2)^2 - (2x^2 - 4x) \cdot 2(2x - 2) \cdot 2}{(2x - 2)^4} = \frac{8}{(2x - 2)^3} = \frac{8}{8(x - 1)^3} = \frac{1}{(x - 1)^3}$$

Таких интервалов нет, поскольку вторая производная не принимает нулевых значений в области определения.

7. Прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$.

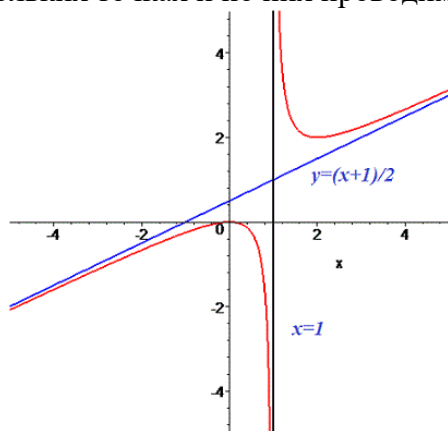
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2x - 2)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{2x - 2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x(x - 1)}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

Конечный вид прямой следующий

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

8. На основе проведенного анализа выполняем построение графика функции. Для этого сначала строим вертикальные и наклонные асимптоты, затем находим значение функции в нескольких точках и по ним проводим построение.



Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "**отлично**" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "**хорошо**" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "**удовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "**неудовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.2 Дифференциальное исчисление

Практическое занятие №22

Применение производной к решению задач профессиональной направленности

Цель: Научиться решать задачи профессиональной направленности.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. На двух стройплощадках возводятся два одноэтажных склада общей площадью 600м^2 . Стоимость постройки склада прямо пропорциональна квадрату его площади. Кроме того, известно, что строительство 1м^2 на второй площадке обходится на 40% дороже, чем на первой. Какой должна быть площадь каждого склада, чтобы стоимость строительства была минимальной?

2. Требуется огородить забором прямоугольный участок земли площадью 1км^2 и разделить его на два прямоугольных участка. Какой наименьшей длины забор при этом может получиться?

3. В Челябинской области ежегодно выбрасываются в водоёмы миллион кубометров неочищенных вод. При постройке канала водоочистительных сооружений необходимо использовать канал с наибольшей площадью сечения, которое по форме представляет равностороннюю трапецию (боковые стороны и одно из оснований равны). При каком угле наклона боковых сторон площадь сечения канала является наибольшей?

4. При извержении вулкана камни горной породы выбрасываются перпендикулярно вверх с начальной скоростью 120м/с . Какой наибольшей высоты достигнут камни, если сопротивлением ветра пренебречь?

Порядок выполнения работы:

1. Составить функцию, удовлетворяющую условию задачи.

2. Провести анализ заданной функции по общей схеме.

Ход работы:

Исследовать функцию.

$$y = \frac{x^2}{2x-2}.$$

Область определения функции $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

Такую же точку получим, если приравняем функцию к нулю. Точка $x = 0$ - единственная точка пересечения с осями координат.

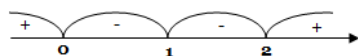
Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную функции

$$y' = \frac{2x(2x-2) - x^2 \cdot 2}{(2x-2)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2}{(2x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(2x-2)^2}$$

Приравнивая ее к нулю, получим критические точки $x = 0$; $x = 2$. Они разбивают область определения на следующие интервалы монотонности $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения.

Графически интервалы монотонности будут иметь вид



Исследуемая функция возрастает на интервалах $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ и убывает $(0; 1) \cup (1; 2)$.

Точка $x = 0$ — точка локального максимума, $x = 2$ — локального минимума. Найдем значение функции $y_{\max} = 0$; $y_{\min} = 2$.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "**отлично**" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "**хорошо**" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "**удовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "**неудовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Интегральное исчисление функции одной переменной

Практическое занятие №23

Нахождение неопределённых интегралов по таблице интегралов и методом замены

Цель: Научиться интегрировать функции, используя различные методы интегрирования.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Найдите неопределенные интегралы:

а) $\int (8x^4 - 6x^2 + 2x - 3)dx$;

б) $\int \frac{3x^4 + 2x^2 - 3x + 7}{x^2} dx$

в) $\int \cos(10x - 5) dx$

г) $\int 3^{4x^2} x dx$

д) $\int \frac{5dx}{25 + 16x^2}$

е) $\int \frac{x^2 dx}{(1-2x^3)^2}$

ж) $\int \frac{2x^4 - 4x^2 - 3x - 1}{\sqrt[3]{x}} dx$

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.

2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать.

3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл. В случае неопределенного интеграла вернуться к старой переменной.

Ход работы

Найти интеграл

$$\int \frac{15x^2 dx}{(1-x^3)^4}.$$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int \frac{15x^2 dx}{(1-x^3)^4} = \left[\begin{array}{l} 1 - x^3 = t \\ d(1 - x^3) = dt \\ -3x^2 dx = dt \\ x^2 dx = -\frac{dt}{3} \end{array} \right] = \int \frac{15dt}{-3t^4} = -5 \int t^{-4} dt = -5 \frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{5}{3t^3} + C = \frac{5}{3(1-x^3)^3} + C.$$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "**отлично**" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "**хорошо**" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "**удовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "**неудовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Интегральное исчисление функции одной переменной

Практическое занятие №24

Нахождение неопределённых интегралов методом интегрирования по частям

Цель: Научиться интегрировать функции, используя метод интегрирования по частям.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи;

составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

- 1) $\int (x^2 + 5x + 7) \cdot \ln x dx$;
- 2) $\int e^{2x} \cos 3x dx$;
- 3) $\int (x^2 + 4x + 3)e^{2x} dx$.

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл нельзя найти другими способами, то примените формулу интегрирования по частям $\int U dV = UV - \int V dU$. Этот метод заключается в том, что подынтегральное выражение представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей U и dV . Затем, после нахождения dU и V , используйте формулу интегрирования по частям.

Виды интегралов, берущихся по частям:

-Интегралы вида $\int P(x)e^{kx} dx$, $\int P(x)\sin kx dx$, $\int P(x)\cos kx dx$, где $P(x)$ - многочлен, k - число.

Удобно положить $U = P(x)$, а все остальные множители принять за dV .

-Интегралы вида $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$, $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arctg x dx$, $\int P(x)\operatorname{arccot} x dx$.

Удобно положить $P(x)dx = dV$, а остальные множители принять за U .

- Интегралы вида $\int e^{ax} \sin bx dx$, $\int e^{ax} \cos bx dx$, где a и b числа. За U можно принять функцию $U = e^{ax}$.

Ход работы:

Найти интегралы:

1) $\int (x^3 - 4x) \ln x \cdot dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится ко второму виду, поэтому $U = \ln x$, $dV = (x^3 - 4x)dx$.

$$dU = \frac{1}{x} dx, \quad V = \int (x^3 - 4x) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int (x^3 - 4x) \ln x \cdot dx &= \ln x \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) - \int \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \frac{1}{x} dx = \\ \ln x \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) - \int \left(\frac{x^3}{4} - 2x \right) dx &= \ln x \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) - \frac{x^4}{16} + x^2 + C \end{aligned}$$

2) $\int (x^2 - 2x) \cos 4x dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится к первому виду, поэтому $U = x^2 - 2x$, $dV = \cos 4x dx$.

$$dU = (2x - 2) dx, \quad V = \int \cos 4x dx = \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 2x) \cos 4x dx &= (x^2 - 2x) \frac{1}{4} \sin 4x - \int \frac{1}{4} \sin 4x (2x - 2) dx = \\ (x^2 - 2x) \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} \int \sin 4x (2x - 2) dx &= \frac{1}{4} (x^2 - 2x) \sin 4x - \frac{1}{2} \int \sin 4x (x - 1) dx = \end{aligned}$$

Чтобы найти оставшийся интеграл, снова применяем формулу интегрирования по частям.

$$U = x - 1, \quad dV = \sin 4x dx.$$

$$dU = dx, \quad V = \int \sin 4x dx = -\frac{1}{4} \cos 4x$$

$$= \frac{1}{4} (x^2 - 2x) \sin 4x - \frac{1}{2} ((x - 1) \left(-\frac{1}{4} \cos 4x \right) - \int -\frac{1}{4} \cos 4x dx =$$

$$\frac{1}{4} (x^2 - 2x) \sin 4x - \frac{1}{2} ((x - 1) \left(-\frac{1}{4} \cos 4x \right) + \frac{1}{4} \int \cos 4x dx =$$

$$= \frac{1}{4} (x^2 - 2x) \sin 4x + \frac{1}{8} ((x - 1) (\cos 4x) - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx =$$

$$\frac{1}{4} (x^2 - 2x) \sin 4x + \frac{1}{8} ((x - 1) (\cos 4x) - \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка **"отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка **"хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка **"удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка **"неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Интегральное исчисление функции одной переменной

Практическое занятие №25

Нахождение определённых интегралов различными методами

Цель: научиться находить определенные интегралы, используя различные методы интегрирования, вычислять приближенные значения определенных интегралов.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Вычислите определенные интегралы

$$1. \int_{-2}^3 (4x^3 + 3x^2 + 2x + 1) dx$$

$$2. \int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$3. \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{3\sqrt{1-x^2}}$$

$$4. \int_{-2}^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}$$

$$5. \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x} \cos x dx$$

$$6. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$$

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.

2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать. Вычислить значение определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.

3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл.

4. Если интеграл нельзя найти вышеуказанными способами, то применить формулу интегрирования по частям $\int U dV = UV - \int V dU$.

Ход работы:

$$1) \int_{-1}^3 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 5) dx = 4 \int_{-1}^3 x^3 dx - 3 \int_{-1}^3 x^2 dx + 2 \int_{-1}^3 x dx + 5 \int_{-1}^3 dx = x^4 - x^3 + x^2 + 5x \Big|_{-1}^3 = 3^4 - 3^3 + 3^2 + 5 \cdot 3 - (1 + 1 + 1 - 5) = 81 - 27 + 9 + 15 + 2 = 80$$

$$2) \int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2}$$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2} = \frac{5}{4} \int_0^{0,4} \frac{dx}{1+\frac{25}{4}x^2} = \frac{5}{4} \int_0^{0,4} \frac{dx}{1+(\frac{5}{2}x)^2} = \left[\begin{array}{l} \frac{5}{2}x = t \\ \frac{5}{2}dx = dt \\ dx = \frac{2}{5}dt \\ x_H = 0 \quad t_H = 0 \\ x_B = 0,4 \quad t_B = 1 \end{array} \right] =$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{5} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \arctg t \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (\arctg 1 - \arctg 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos^4 x}$$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos^4 x} = \left[\begin{array}{l} \cos x = t \\ d\cos x = dt \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \\ x_H = 0 \quad t_H = \cos 0 = 1 \\ x_B = \frac{\pi}{3} \quad t_B = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{array} \right] = \int_1^{0,5} \frac{-dt}{t^3} = -\frac{t^{-2}}{-2} \Big|_1^{0,5} = \frac{1}{2t^2} \Big|_1^{0,5} = \frac{1}{2 \cdot 0,25} - \frac{1}{2} = 2 - 0,5 =$$

1,5.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но

допущены 2-3 недочета.

Оценка "**удовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "**неудовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Интегральное исчисление функции одной переменной

Практическое занятие №26

Нахождение площадей фигур и объёмов тел

Цель: научиться применять интегрирование для решения задач геометрии.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Найдите площади плоских фигур, ограниченных линиями:

а) $y = x^2 + 1, y = 0, x = 1, x = 4;$

б) $y = \ln x, y = 0, x = 1, x = e;$

в) $y^2 = x^3; x = 4.$

2. Решить задачи

а) Найти объём котлована круглой формы диаметром 6м, осевое сечение которого имеет форму параболы, заданной уравнением $y = \frac{1}{2}x^2$.

б) Дорога проходит через вершину холма, форму осевого сечения можно описать уравнением $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$. Диаметр холма 200м. Найти длину дороги, проходящей по холму.

Порядок выполнения работы:

1. Изобразите фигуру на координатной плоскости;
2. Определите, является ли фигура криволинейной трапецией.
3. Вычислите площадь фигуры.

Ход работы:

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 3x + 2$ и $y = x - 1$.

Найдем пределы интегрирования - точки пересечения графиков функций, для этого приравняем правые части исходных функций и решим получившееся уравнение $x^2 - 3x + 2 = x - 1$. Корнями этого уравнения являются числа $x = 1$ и $x = 3$, следовательно, они и являются пределами интегрирования.

Значит, площадь фигуры равна:

$$S = \int_1^3 (x-1)dx - \int_1^3 (x^2 - 3x + 2)dx = \frac{x^2}{2} - x - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right) = \frac{9}{2} - 3 - \frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{27}{3} - \frac{3 \cdot 9}{2} + 6 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2\right) = 1\frac{1}{3}.$$

Получили, что площадь фигуры равна $1\frac{1}{3}$ (кв. ед.)

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка **"отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка **"хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка **"удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка **"неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Интегральное исчисление функции одной переменной

Практическое занятие №27

Применение определенных интегралов к решению прикладных задач

Цель: научиться применять интегрирование для решения задач профессиональной направленности.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 18t - 6t^2$.

2. Найдите путь, пройденный точкой за четвертую секунду, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 3t^2 - 2t - 3$.

3. Найти площадь области, ограниченной линиями $x \cdot y = -5$, $y = x + 6$.

4. Сила упругости пружины, растянутой на 0,05 м, равна 3Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,05м?

5. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05м, если сила 100Н растягивает пружину на 0,01м.

6. Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 20 м, а высота 5 м (считая шлюз доверху заполненным водой).

Порядок выполнения работы:

1. Прочитать задачу и определить способ ее решения.
2. Применить формулу интегрального исчисления для решения задачи.
3. Записать ответ.

Ход работы:

Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

Решение: По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x , т. е. $F = kx$, где k — коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила $F = 100$ Н растягивает пружину на $x = 0,01$ м; следовательно, $100 = k \cdot 0,01$, откуда $k = 10000$; следовательно, $F = 10000x$.

Искомая работа на основании формулы равна

$$A = \int_0^{0,05} 10000x dx = 5000x^2 = 12,5 \text{ (Дж)}.$$

В воду опущена прямоугольная пластинка, расположенная вертикально. Ее горизонтальная сторона равна 1 м, вертикальная 2 м. Верхняя сторона находится на глубине 0,5 м. Определить силу давления воды на пластинку.

Решение:

Здесь $y = 1$, $a = 0,5$, $b = 2 + 0,5 = 2,5$ (м), $\gamma = 1000$ кг/м³. Следовательно,

$$P = 9810 \int_a^b xy dx = 9810 \int_a^b x dx = 9810 \frac{x^2}{2} = 9810 \frac{2,5^2 - 0,5^2}{2} = 29430$$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "**отлично**" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "**хорошо**" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "**удовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "**неудовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 5.1 События, комбинаторика, вероятность

Практическое занятие №28

Решение комбинаторных задач

Цель: формирование умений решать комбинаторные задачи.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Сколькими способами можно расставить 6 геодезистов на 6 различных точек?
2. Из 12 человек необходимо выбрать 3 человека в комиссию по оценке имущества.

Сколько существует различных способов такого выбора.

3. Сколькими способами можно добраться из пункта А в пункт С (рис.1)?

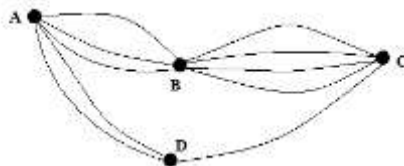


Рис. 1

4. На местности отмечены 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

5. Предприятие может предоставить работу по одной специальности 4 женщинам, по другой - 6 мужчинам, по третьей - 3 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить вакантные места, если имеются 14 претендентов: 6 женщин и 8 мужчин?

Порядок выполнения работы:

1. Определите вид выборки без повторения.
2. Выберите соответствующую формулу для вычисления возможных комбинаций.
3. Произведите вычисления, используя понятие факториала.

Ход работы:

1. Кодовый замок открывается последовательным набором четырёх разных цифр. Требуется определить число возможных кодов, которые можно подобрать для этого замка.

Решение.

Возможных цифр всего десять (1,2,3,4,5,6,7,8,9,0). Каждая набранная комбинация кода отличается от другой комбинации хотя бы одной цифрой (1,4,5,7 $\neq$ 2,4,5,7), либо порядком набора одинаковых цифр (1,4,5,7 $\neq$ 4,5,7,1), поэтому для подсчёта числа возможных комбинаций кодов используем формулу числа размещений.

2. Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,9, если цифры не повторяются.

Решение.

По условию дано множество из четырёх элементов, которые требуется расположить в определённом порядке. Значит, требуется найти количество перестановок из четырёх элементов.

Формула перестановок из n –элементов имеет вид: $P_n = n!$ В нашем случае $n = 4$.

Произведём расчёт: $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но

допущены 2-3 недочета.

Оценка "**удовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "**неудовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 5.1 События, комбинаторика, вероятность

Практическое занятие №29

Решение задач на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики

Цель: Научиться находить вероятность событий, используя формулы комбинаторики.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Вероятность правильного проведения измерений геодезистом составляет 0,95. Во время проверки были взяты два результата измерений. Какова вероятность того, что только одно измерение было проведено правильно?

2. Стороны прямоугольного участка X и Y в результате погрешности измерения оказываются случайными величинами с такими распределениями:

X	19,5	19,7	20,,	20,2	Y	29,5	29,8	30,0	30,1
P	0,20	0,05	0,70	0,05	P	0,15	0,15	0,65	0,005

Найти математическое ожидание площади участка, если известно, что измерения проводились независимыми способами.

3. На предприятии работают две бригады рабочих: первая производит в среднем три четверти продукции с процентом брака 4%, вторая – четверть продукции с процентом брака 6%. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие: а) окажется бракованным; б) изготовлено второй бригадой при условии, что изделие оказалось бракованным.

4. Вероятность правильного оформления накладной при передаче продукции равна 0,8. Найти вероятность того, что из трёх накладных только две оформлены правильно.

5. В районе 100 посёлков. В пяти из них находятся пункты проката сельхозтехники. Случайным образом отобраны два посёлка. Какова вероятность того, что в них окажутся пункты проката?

6. На предприятие поступают заявки от нескольких торговых пунктов. Вероятности поступления заявок от пунктов A и B равны соответственно 0,5 и 0,4. Найти вероятности поступления заявок от пункта A или от пункта B , считая события поступления заявок от этих пунктов независимыми, но совместными.

7. Вероятности своевременного выполнения задания тремя независимо работающими предприятиями соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7. Найти вероятность своевременного выполнения задания хотя бы одним предприятием.

Порядок выполнения работы:

1. Определите событие А, вероятность которого нужно вычислить.
2. Просчитайте общее число(п) возможных исходов.
3. Просчитайте число исходов(м), благоприятствующих наступлению события А.
4. Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Ход работы

Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры и набрал их наудачу, помня, что они различны. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение.

а) Событие А-«номер набран верно».

б) Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Всего имеется 10 цифр, т.е.. число элементов равно 10; в каждое соединение входит по 3 цифры; порядок цифр(элементов) существен при наборе номера, значит, нужно найти число размещений из 10 элементов по 3 по формуле $A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 720$. Итак, n=720

в) Число m=1, т.к. только один набор из трёх цифр является нужным.

г) $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$

2. Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 чёрных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся чёрными?

Решение.

а) Событие А-«оба шара окажутся чёрными».

б) Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов (12+8) по два: $n = C_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{2 \cdot 18!} = 190$.

в) Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно числу сочетаний из 8 элементов (8 черных шаров) по два: $n = C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2 \cdot 6!} = 28$

г) $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{28}{190} \approx 0,147$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 5.2 Основные понятия мат. статистики. Выборочные ряды распределения

Практическое занятие №30

Анализ, обработка и графическое представление данных

Цель: Рассмотреть отдельные примеры, характерные для выборочного метода.

Выполнив работу, вы будете уметь:

Уд1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план,

Уо 02.01 определять необходимые источники информации; эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы, оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Построить полигоны частот и относительных частот по распределению выборки:

x_i	2	4	7	8	9	12
n_i	p_1^2	$2p_2$	p_2	p_2^2	p_3	$3p_3$

2. Постройте гистограммы частот и относительных частот по распределению выборки:

№ интервала	Интервал, $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала, n_i
1	3 – 5	p_1
2	5 – 7	$2p_2$
3	7 – 9	$3p_3$
4	9 – 11	p_1^2
5	11 – 13	$2p_2^2$
6	13 – 15	$3p_3^2$
7	15 – 17	$p_1 + p_2$

1. Для генеральной совокупности, заданной распределением:

x_i	5	10	15	20	25	30	35
N_i	p_1	$3p_1$	p_2	$2p_2$	p_2^2	$2p_3$	$2p_3^2$

найдите генеральную среднюю, генеральную дисперсию, генеральное стандартное отклонение, моду, медиану и размах.

2. Из генеральной совокупности сделана выборка, заданная распределением:

x_i	2	4	6	8	10	12	14
n_i	p_2	$2p_2$	p_1	p_1^2	p_3	$2p_3$	$p_2 + p_3$

Найти выборочную среднюю, выборочные дисперсию и стандартное отклонение. Обратите внимание: p_1 = числу букв в Вашем имени; p_2 = числу букв в Вашей фамилии; p_3 = числу букв в имени Вашего отца.

Порядок выполнения работы:

- 1 Прочитав условие предложенной задачи , по конспекту лекции найдите соответствующие формулы.
- 2.Примените лекционный теоретический материал для решения каждой задачи.
- 3 В случае необходимости представить геометрическую интерпретацию числовых характеристик. выборки.

Ход работы

1. Задано распределение частот выборки:

x_i	2	6	12	15
n_i	3	10	7	5

Составить распределение относительных частот. Определим сначала объем выборки:

$$n = 3 + 10 + 7 + 5 = 25.$$

Найдем относительные частоты

x_i	2	6	12	15
w_i	0,12	0,40	0,28	0,20

2. По результатам примера 1 построить полигоны частот и относительных частот.

Решение. Отобразив на плоскости точки и соединив их отрезками, получим полигон частот:

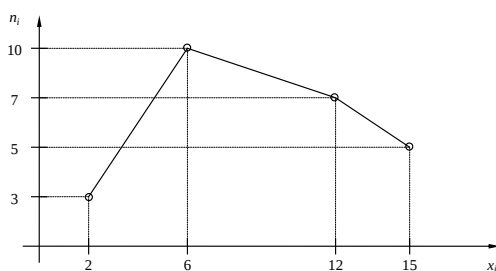


Рис. 2

Аналогично построим полигон по точкам (x_i, w_i) :

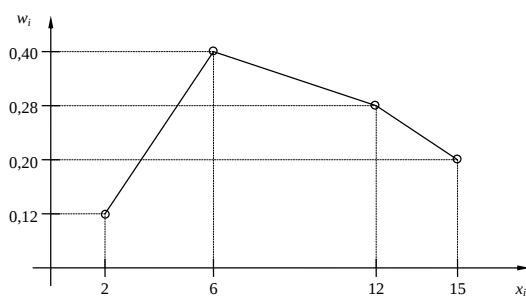


Рис. 3

3. Постройте гистограмму по следующему статистическому распределению:

№ интервала	Интервал длиной $h=5$	Сумма частот вариант n_i
1	5 – 10	4
2	10 – 15	6
3	15 – 20	16
4	20 – 25	36
5	25 – 30	24
6	30 – 35	10
7	35 – 40	4

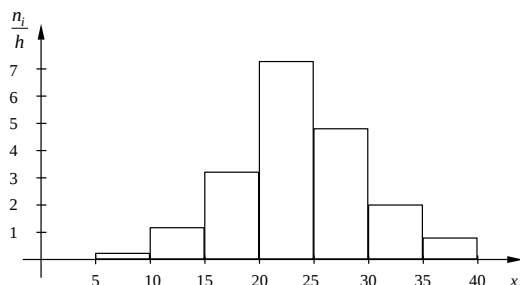
Решение. Прежде всего, определим объем выборки:

$$n = 4 + 6 + 16 + 36 + 24 + 10 + 4 = 100.$$

По известным суммам частот вариант рассчитаем плотность частоты по интервалам:

№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$	№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$
1	0,2	5	4,8
2	1,2	6	2,0
3	3,2	7	0,8
4	7,2		

Изобразим полученный результат:



Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "**отлично**" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "**хорошо**" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "**удовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "**неудовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.