Приложение 2.3.1 к ОПОП-П по специальности
15.02.17 Монтаж, техническое обслуживание, эксплуатация
и ремонт промышленного оборудования (по отраслям)

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Многопрофильный колледж

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

ОУП.03 МАТЕМАТИКА

для обучающихся специальности
15.02.17 Монтаж, техническое обслуживание, эксплуатация
и ремонт промышленного оборудования (по отраслям)

СОДЕРЖАНИЕ

1 Введение 4
2 Методические указания _
Практическое занятие № 1 8
Практическое занятие № 2 9
Практическое занятие № 3 11
Практическое занятие № 4 12
Практическое занятие № 5 15
Практическое занятие № 6 16
Практическое занятие № 7 17
Практическое занятие № 8 19
Практическое занятие № 9 20
Практическое занятие № 10 22
Практическое занятие № 11 24
Практическое занятие № 12 27
Практическое занятие № 13 29
Практическое занятие № 14 32
Практическое занятие № 15 33
Практическое занятие № 16 36
Практическое занятие № 17 38
Практическое занятие № 18 40
Практическое занятие № 19 42
Практическое занятие № 20 45
Практическое занятие № 21 48
Практическое занятие № 22 50
Практическое занятие № 23 52
Практическое занятие № 24 54
Практическое занятие № 25 55
Практическое занятие № 26, 27 57
Практическое занятие № 28-29 59
Практическое занятие № 30 62
Практическое занятие № 31 64
Практическое занятие № 32, 33 66
Практическое занятие № 34, 35 68
Практическое занятие № 36 70
Практическое занятие № 37 73
Практическое занятие № 38 76
Практическое занятие № 39 78
Практическое занятие № 40 81
Практическое занятие № 41 82
Практическое занятие № 42 85
Практическое занятие № 43 87
Практическое занятие № 44 89
Практическое занятие № 45 92
Практическое занятие № 46 94
Практическое занятие № 47 97
Практическое занятие № 48 98
Практическое занятие № 49 100
Практическое занятие № 50 101
Практическое занятие № 51 103

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки обучающихся составляют практические занятия.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования с учетом получаемой специальности.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование профессиональных практических умений (умений выполнять определенные действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности) или учебных практических умений (умений решать задачи по математике), необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено проведение практических занятий.

Выполнение практических работ обеспечивает достижение обучающимися следующих **результатов:**

ПРб1_ОУП.03. владение методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение формулировать определения, аксиомы и теоремы, применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

ПРб2_ОУП.03. умение оперировать понятиями: степень числа, логарифм числа; умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений со степенями и логарифмами, преобразования дробно-рациональных выражений;

ПРб3_ОУП.03. умение оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы;

ПРб4_ОУП.03. умение оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения;

ПРб5_ОУП.03. умение оперировать понятиями: рациональная функция, показательная функция, степенная функция, логарифмическая функция, тригонометрические функции, обратные функции; умение строить графики изученных функций, использовать графики при изучении процессов и зависимостей, при решении задач из других учебных предметов и задач из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами;

ПРб6_ОУП.03. умение решать текстовые задачи разных типов (в том числе на проценты, доли и части, на движение, работу, стоимость товаров и услуг, налоги, задачи из области управления личными и семейными финансами); составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов;

ПРб7_ОУП.03. умение оперировать понятиями: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия, стандартное отклонение числового набора; умение извлекать, интерпретировать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, отражающую свойства реальных процессов и явлений; представлять информацию с помощью таблиц и диаграмм; исследовать статистические данные, в том числе с применением графических методов и электронных средств;

ПРб8_ОУП.03. умение оперировать понятиями: случайный опыт и случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей, комбинаторные факты и формулы при решении задач; оценивать вероятности реальных событий; знакомство со

случайными величинами; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях;
ПРб9_ОУП.03. умение оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, двугранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов окружающего мира;
ПРб10_ОУП.03. умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, куб, параллелепипед, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, сечения фигуры вращения, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, площадь сферы, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; умение распознавать симметрию в пространстве; умение распознавать правильные многогранники;
ПРб11_ОУП.03. умение оперировать понятиями: движение в пространстве, подобные фигуры в пространстве; использовать отношение площадей поверхностей и объемов подобных фигур при решении задач;
ПРб12_ОУП.03. умение вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы;
ПРб13_ОУП.03. умение оперировать понятиями: прямоугольная система координат, координаты точки, вектор, координаты вектора, скалярное произведение, угол между векторами, сумма векторов, произведение вектора на число; находить с помощью изученных формул координаты середины отрезка, расстояние между двумя точками;
ПРб14_ОУП.03. умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки;
МР1. самостоятельно формулировать и актуализировать проблему, рассматривать ее всесторонне;
МР2. устанавливать существенный признак или основания для сравнения, классификации и обобщения;
МР3. определять цели деятельности, задавать параметры и критерии их достижения;
МР4. выявлять закономерности и противоречия в рассматриваемых явлениях;
МР7. владеть навыками учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем;
МР8. способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;
МР9. овладение видами деятельности по получению нового знания, его интерпретации, преобразованию и применению в различных учебных ситуациях, в том числе при создании учебных и социальных проектов;
МР10. формирование научного типа мышления, владение научной терминологией, ключевыми понятиями и методами;
МР11. ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;
МР12. выявлять причинно-следственные связи и актуализировать задачу, выдвигать гипотезу ее решения, находить аргументы для доказательства своих утверждений, задавать параметры и критерии решения;
МР13. анализировать полученные в ходе решения задачи результаты, критически оценивать их достоверность, прогнозировать изменение в новых условиях;
МР14. давать оценку новым ситуациям, оценивать приобретенный опыт;

МР15. разрабатывать план решения проблемы с учетом анализа имеющихся материальных и нематериальных ресурсов;
МР16. осуществлять целенаправленный поиск переноса средств и способов действия в профессиональную среду;
МР17. уметь переносить знания в познавательную и практическую области жизнедеятельности;
МР18. уметь интегрировать знания из разных предметных областей;
МР20. ставить проблемы и задачи, допускающие альтернативные решения;
МР21. владеть навыками получения информации из источников разных типов, самостоятельно осуществлять поиск, анализ, систематизацию и интерпретацию информации различных видов и форм представления;
МР22. создавать тексты в различных форматах с учетом назначения информации и целевой аудитории, выбирая оптимальную форму представления и визуализации;
МР23. оценивать достоверность, легитимность информации, ее соответствие правовым и морально-этическим нормам;
МР26. осуществлять коммуникации во всех сферах жизни;
МР27. распознавать невербальные средства общения, понимать значение социальных знаков, распознавать предпосылки конфликтных ситуаций и смягчать конфликты;
МР28. владеть различными способами общения и взаимодействия;
МР29. аргументированно вести диалог, уметь смягчать конфликтные ситуации;
МР30. развернуто и логично излагать свою точку зрения с использованием языковых средств;
МР31. понимать и использовать преимущества командной и индивидуальной работы;
МР33. принимать цели совместной деятельности, организовывать и координировать действия по ее достижению: составлять план действий, распределять роли с учетом мнений участников обсуждать результаты совместной работы;
МР34. оценивать качество своего вклада и каждого участника команды в общий результат по разработанным критериям;
МР38. самостоятельно осуществлять познавательную деятельность, выявлять проблемы, ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;
МР39. самостоятельно составлять план решения проблемы с учетом имеющихся ресурсов, собственных возможностей и предпочтений;
МР40. давать оценку новым ситуациям;
МР41. расширять рамки учебного предмета на основе личных предпочтений;
МР42. делать осознанный выбор, аргументировать его, брать ответственность за решение;
МР43. оценивать приобретенный опыт;
МР44. способствовать формированию и проявлению широкой эрудиции в разных областях знаний, постоянно повышать свой образовательный и культурный уровень;
б) самоконтроль:
МР45. давать оценку новым ситуациям, вносить коррективы в деятельность, оценивать соответствие результатов целям;
МР46. владеть навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований;
МР47. использовать приемы рефлексии для оценки ситуации, выбора верного решения;
в) эмоциональный интеллект, предполагающий сформированность:
МР49. самосознания, включающего способность понимать свое эмоциональное состояние, видеть направления развития собственной эмоциональной сферы, быть уверенным в себе;
МР50. саморегулирования, включающего самоконтроль, умение принимать ответственность за свое поведение, способность адаптироваться к эмоциональным изменениям и проявлять гибкость, быть открытым новому;
МР51. сформированность внутренней мотивации, включающей стремление к достижению цели и успеху, оптимизм, инициативность, умение действовать, исходя из своих возможностей;

МР52. эмпатии, включающей способность понимать эмоциональное состояние других, учитывать его при осуществлении коммуникации, способность к сочувствию и сопереживанию;
МР54. принимать себя, понимая свои недостатки и достоинства;
МР55. принимать мотивы и аргументы других людей при анализе результатов деятельности;
МР56. признавать свое право и право других людей на ошибки;
МР53. социальных навыков, включающих способность выстраивать отношения с другими людьми, заботиться, проявлять интерес и разрешать конфликты;
ЛР1. сформированность гражданской позиции обучающегося как активного и ответственного члена российского общества;
ЛР6. умение взаимодействовать с социальными институтами в соответствии с их функциями и назначением;
патриотического воспитания:
ЛР8. сформированность российской гражданской идентичности, патриотизма, уважения к своему народу, чувства ответственности перед Родиной, гордости за свой край, свою Родину, свой язык и культуру, прошлое и настоящее многонационального народа России;
ЛР9. ценностное отношение к государственным символам, историческому и природному наследию, памятникам, традициям народов России, достижениям России в науке, искусстве, спорте, технологиях и труде;
ЛР11. осознание духовных ценностей российского народа;
ЛР12. сформированность нравственного сознания, этического поведения;
ЛР14. осознание личного вклада в построение устойчивого будущего;
ЛР16. эстетическое отношение к миру, включая эстетику быта, научного и технического творчества, спорта, труда и общественных отношений;
ЛР17. способность воспринимать различные виды искусства, традиции и творчество своего и других народов, ощущать эмоциональное воздействие искусства; культурных традиций и народного творчества; трудового воспитания:
ЛР23. готовность к труду, осознание ценности мастерства, трудолюбие;
ЛР25. интерес к различным сферам профессиональной деятельности, умение совершать осознанный выбор будущей профессии и реализовывать собственные жизненные планы;
ЛР26. готовность и способность к образованию и самообразованию на протяжении всей жизни;
ЛР27. сформированность экологической культуры, понимание влияния социально-экономических процессов на состояние природной и социальной среды, осознание глобального характера экологических проблем
ЛР30. умение прогнозировать неблагоприятные экологические последствия предпринимаемых действий, предотвращать их;
ЛР32. сформированность мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики, основанного на диалоге культур, способствующего осознанию своего места в поликультурном мире;
ЛР33. совершенствование языковой и читательской культуры как средства взаимодействия между людьми и познания мира;
ЛР34. осознание ценности научной деятельности, готовность осуществлять проектную и исследовательскую деятельность индивидуально и в группе;

Содержание практических и лабораторных занятий ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению ***профессиональными компетенциями:***

ПК 2.2 Разрабатывать технологическую документацию для проведения работ по техническому обслуживанию промышленного (технологического) оборудования.

А также формированию *общих компетенций*:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК 05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК 06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

ОК 07 Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

ОК 08 Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности

ОК 09 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Выполнение практических работ по учебной дисциплине «Математика» направленона:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- формирование и развитие умений: наблюдать, сравнивать, сопоставлять, анализировать, делать выводы и обобщения, самостоятельно вести исследования, пользоваться различными приемами измерений, оформлять результаты в виде таблиц, схем, графиков;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся в рамках соответствующей темы, после освоения дидактических единиц, которые обеспечивают наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1 Развитие понятия о числе

Практическое занятие № 1
«Арифметические действия над действительными и комплексными числами. Приближенные вычисления»

Цель работы: Научиться выполнять действия с действительными и комплексными числами, выполнять приближенные вычисления.

Выполнение работы способствует формированию:
ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб5_ОУП.03, ПРб7_ОУП.03, ПРб13_ОУП.03

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание

1. Решите задачи:
   а) Специалистам службы технического обслуживания промышленного оборудования была поставлена ежедневная норма – проверка работоспособности электросети протяженностью 2,5 километра в день. В первый день специалисты проверили участок длиной 2 километра, а во второй день – 3 километра. Необходимо рассчитать процент выполнения дневной нормы специалистами за первый и второй дни.
   б) В цехе работают 20 рабочих, из них 8 механиков. Какой процент от всего числа рабочих цеха составляют механики?
   в) Рабочий день техника уменьшился с 8 часов до 7 часов. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы при тех же расценках заработная плата возросла на 5%?
2. Вычислите:
   а) $\left(\frac{5}{8}+\frac{7}{12}\right)\cdot\left(3\frac{23}{58}-2\frac{9}{58}\right)$;
   б) $\frac{12\frac{4}{5}\cdot 3\frac{3}{4}-4\frac{4}{11}\cdot 4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3}:2\frac{4}{7}}$;
   в) $4\frac{2}{3}+1\frac{1}{3}\cdot 3-5\frac{1}{6}$;
   г) $\frac{12{,}8:0{,}64+3{,}05:0{,}05}{8\frac{2}{3}:1\frac{4}{9}-1}$;
   д) $15\frac{6}{7}-12\frac{6}{7}\cdot\left(0{,}1+\frac{1}{15}\right)$;
   е) $\left(1{,}8^2-2{,}3\cdot 1\frac{4}{5}\right):2\frac{4}{7}$;
   ж) $\frac{0{,}15-0{,}15\cdot 3\frac{1}{2}}{-\frac{3}{8}+0{,}25}$;
   з) $\left(1\frac{1}{5}\cdot 0{,}7-1{,}2^2\right):1\frac{1}{2}$.
3. Даны комплексные числа:
   $z_1 = 3 + 2i$,

   $z_2 = 4 - i$,

   $z_3 = 5 + 2i$,

   $z_4 = 6 - 3i$.

   Выполните действия:

   а) $z_1 \cdot z_2 + z_3 \cdot z_4$;
   б) $z_1 \cdot z_4 + z_2 \cdot z_3$

в) $z_1 \cdot z_3 - z_2 \cdot z_4$;

г) $\frac{z_1}{z_2}$; д) $\frac{z_2}{z_3}$;

е) $\frac{z_3}{z_4}$; ж) $\frac{z_4}{z_1}$;

з) $|z_1|, |z_2|, |z_3|, |z_4|$.

Порядок выполнения работы:

Внимательно ознакомьтесь с условием задания.

Пользуясь своими школьными знаниями (в случае затруднения воспользуйтесь справочными материалами), выполните задание

Задание №1

1) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2+1}{5} = \frac{3}{5}$;

2) $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = \frac{3+4}{7} = \frac{7}{7} = 1$;

3) $3\frac{1}{5} + 4\frac{1}{5} = (3+4) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) = 7 + \frac{2}{5} = 7\frac{2}{5}$;

4) $3\frac{2}{7} - 1\frac{1}{7} = (3-1) + \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{7}\right) = 2 + \frac{1}{7} = 2\frac{1}{7}$;

5) $\frac{7}{12} : \frac{3}{4} = \frac{7}{12} \cdot \frac{4}{3} = \frac{7 \cdot 4}{12 \cdot 3} = \frac{7 \cdot 1}{3 \cdot 3} = \frac{7}{9}$;

6) $2\frac{1}{5} : 3\frac{2}{3} = \frac{11}{5} : \frac{3}{11} = \frac{11 \cdot 3}{5 \cdot 11} = \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 1} = \frac{3}{5}$;

7) $3\frac{2}{5} + 14\frac{1}{3} = (3+14) + \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) = 17 + \frac{6+5}{15} = 17\frac{11}{15}$;

Задание №2

Пример. Найти $(8 + i) : (2 - 3i)$.

Решение. Перепишем это отношение в виде дроби: $\frac{8+i}{2-3i}$

Умножив, её числитель и знаменатель на $2 + 3i$ и выполнив все преобразования, получим:

$\frac{(8+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{13+26i}{13} = 1 + 2i$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка **"отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка **"хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка **"удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка **"неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.1 Развитие понятия о числе

Практическое занятие № 2
«Решение прикладных задач на проценты»

Цель работы: Научиться решать текстовые задачи на нахождение процентов от числа.

Выполнение работы способствует формированию:
ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб5_ОУП.03, ПРб7_ОУП.03, ПРб13_ОУП.03.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание

1. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы механик получил за выполненную работу 16530 рублей. Сколько рублей составляет стоимость выполненной работы?
2. В интернет-магазине можно заказать детали с доставкой, при этом стоимость доставки составляет 7% от стоимости заказа. Предприятие делает заказ деталей на сумму 60000рублей, при этом получает скидку 15% на оптовый заказ. Какова будет стоимость доставки этого заказа?
3. Комиссия за межбанковский перевод составляет 1,5% от суммы перевода, но не менее 100 рублей. Какова будет комиссия за межбанковский перевод суммы 50 000 рублей?
4. 25% участников конкурса профмастерства прошли в полуфинал, из них 10% оказались в финале. Сколько было участников конкурса, если финалистами оказались 8 человек?

Порядок выполнения работы:

Внимательно ознакомьтесь с условием задания.

Пользуясь полученными знаниями (в случае затруднения воспользуйтесь справочными материалами), выполните задание.

Один процент — это одна сотая доля числа. Математическими знаками один процент записывается так: 1%.

Определение одного процента можно записать равенством: 1 % = 0,01 * а 5%=0,05, 23%=0,23, 130%=1,3 и т.д.

Как найти 1% от числа? Раз 1% это одна сотая часть, надо число разделить на 100. Деление на 100 можно заменить умножением на 0,01. Поэтому, чтобы найти 1% от данного числа, нужно умножить его на 0,01. А если нужно найти 5% от числа, то умножаем данное число на 0,05 и т.д.

Задача: Магазин закупает энергосберегающие лампы по оптовой цене 110 рублей за штуку и продает с наценкой 30%. Какое наибольшее число таких ламп можно купить в этом магазине на 1200 рублей?

Решение

1) Определяем наценку магазина:

30% = 0,3;

110 · 0,3 = 33 руб. наценка

2) Определяем розничную цену ламп:

110 + 33 = 143 руб. розничная цена

3) Определяем количество ламп

1200 : 143 = 8 (ост. 56)

Ответ: 8

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка **"отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка **"хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка **"удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка **"неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.1 Развитие понятия о числе

Практическое занятие № 3
«Решение задач на составление уравнений с профессиональным содержанием»

Цель работы: формирование умений решать текстовые задачи, составляя уравнения и системы уравнений.

Выполнение работы способствует формированию:
ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб5_ОУП.03, ПРб7_ОУП.03, ПРб13_ОУП.03.

Задание

Решите задачи:

1. Провод длиной 135 метров разрезали на две части так, что одна из них короче другой в два раза. Найдите длину каждой части.
2. В производственном цеху имеется два электрических кабеля различных марок, используемых для подключения станков. Первый кабель массой 65 кг применяется для монтажа стационарного оборудования. Второй кабель используется для мобильного оборудования, его длина на 3 метра больше, а удельная нагрузка (масса на метр) на 2 кг/м выше, чем у первого кабеля. Общий вес второго кабеля составил 120 кг. Рассчитайте длину каждого кабеля.
3. На складе имеются лампочки 60V и 100V. Когда использовали 50% лампочек 60V и 20% лампочек 100V, что составило в общей сложности 390 лампочек, то лампочек 60V осталось в 3 раза больше, чем 100V. Сколько изначально было на складе лампочек 60V и 100v?
4. Двум механикам была поручена работа. Второй приступил к работе на час позже первого. Через 3 часа после того, как первый приступил к работе, им осталось выполнить $\frac{9}{20}$ всей работы. По окончании работы оказалось, что каждый выполнил половину всей работы. За сколько часов каждый, работая отдельно, может выполнить всю работу?

Порядок выполнения работы:

Внимательно ознакомьтесь с условием задания.

Пользуясь полученными знаниями (в случае затруднения воспользуйтесь справочными материалами), выполните задание.

Под алгебраическим методом решения задач понимается такой метод решения, когда неизвестные величины находятся в результате решения уравнения или системы уравнений, составленных по условию задачи.

При решении задач алгебраическим методом основная мыслительная деятельность сосредотачивается на первом этапе решения задачи: на разборе условия задачи и составлении уравнений или неравенств по условию задачи.

Вторым этапом является решение составленного уравнения или системы уравнений, неравенства или системы неравенств.

Третьим важным этапом решения задач является проверка решения задачи, которая проводится по условию задачи.

Задача:

Первый рабочий за час делает на 10 деталей больше, чем второй, и выполняет заказ, состоящий из 60 деталей, на 3 часа быстрее, чем второй рабочий, выполняющий такой же заказ. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

Решение:

Пусть x деталей в час делает второй рабочий, тогда первый (x+10) деталей.

	Производительность	Время	Работа
1 рабочий	(x+10) деталей в час	$\frac{60}{x+10}$ ч	60 деталей
2 рабочий	x деталей в час	$\frac{60}{x}$ ч	60 деталей

Так как первый изготавливает на 3 часа меньше, чем второй, то составим уравнение:

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} = 3$$

Получим $x=-20$ и $x=10$ (-20 – не подходит по смыслу задачи)

10 деталей в час делает второй рабочий.

Ответ: 10 деталей.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка **"отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка **"хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка **"удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка **"неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.2 Функции и графики

Практическое занятие № 4
«Исследование функций. Свойства линейной, квадратичной, кусочно-линейной и дробно-линейной функций»

Цель работы: научиться определять четность нечетность функции, проводить исследование функции на монотонность, экстремумы, нули функции и промежутки знакопостоянства.

Выполнение работы способствует формированию:

ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб5_ОУП.03, ПРб6_ОУП.03, ПРб8_ОУП.03, ПРб10_ОУП.03.

Задание

1) Найдите значения функций в точках

а) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$;

б) $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 6$.

2) Для функции $f(x) = \frac{2x^2+3x-4}{3x+3}$ найдите:

а) $f(x-2)$;

б) $f(-x^3)$;

в) $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

3) Найдите область определения функций:

а) $y = \frac{6}{x^2-16}$; б) $y = \frac{7}{25-x^2}$;

в) $y = \sqrt{x^2-3x+2}$; г) $y = \sqrt{x^2+4x-12}$;

д) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$; е) $y = \sqrt{\frac{3}{49-x^2}}$.

4) Исследуйте функции на чётность:

а) $y = x^2 + 2x^4 + 1$; б) $y = 2x^7 - 4x^3 + x$;

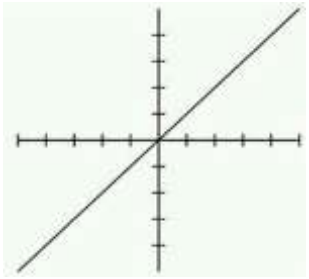
в) $y = 5 - 3x^3$; г) $y = 2^x + 2^{-x}$;

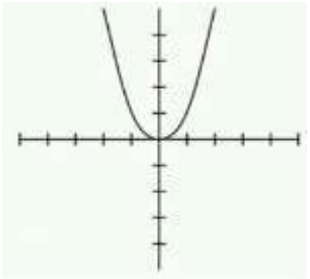
д) $y = 2^x - 2^{-x}$; е) $y = \frac{-3x^2+1}{1-x^4}$;

ж) $y = \frac{x}{x^2+1}$; з) $y = 3x^5 - 2x^3 + 4x + 3$.

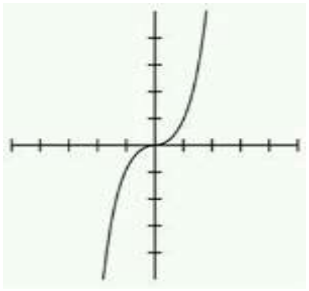
5) ***Исследуйте функции, заданные графически, на четность:***

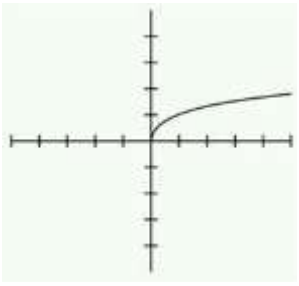
а) **б)**



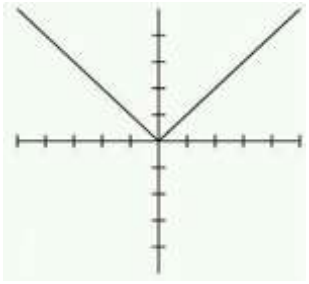


в) **г)**

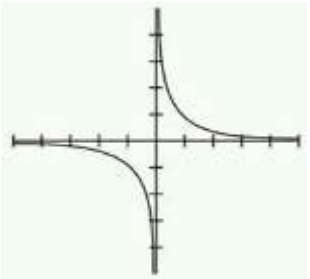




д)



е)



Порядок выполнения работы:

1) Найдите область определения функции.

Для нахождения промежутков знакопостоянства найдите точки пересечения с осью абсцисс, решив уравнение y=0. Найденные корни расставьте на оси Ox в порядке возрастания и найдите знак функции на каждом из полученных интервалов. Запишите результат.

2) Найдите область определения функции. Убедитесь, что она симметрична.

1.Замените аргумент функции x на "-x". Подставьте этот аргумент в функциональное выражение.

2.Упростите выражение.

3.Таким образом, вы получили одну и ту же функцию, записанную для аргументов "x" и "-x". Посмотрите на две эти записи.

Если y(-x) = y(x), то это четная функция.

Если y(-x) =- y(x), то это нечетная функция.

Если же про функцию нельзя сказать, что y(-x)=y(x) или y(-x)=-y(x), то по свойству четности это функция общего вида. То есть, она не является ни четной, ни нечетной.

4.Запишите сделанные вами выводы.

3) Найдите область определения функции и нули функции, если они есть. Исследуйте функцию на монотонность на полученных интервалах.

Функция F(x) называется возрастающей на отрезке [a,b] , если для любых двух точек x_1 и x_2 из [a,b] справедливо неравенство $F(x_1)<F(x_2)$, когда $x_1< x_2$.

Функция F(x) называется убывающей на отрезке [a,b] , если для любых двух точек x_1 и x_2 из [a,b] справедливо неравенство $F(x_1)>F(x_2)$, когда $x_1< x_2$.

Исследовать функцию $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$.

Решение

Область определения функции $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{-x} = \frac{x^2 - 1}{-x} = -\frac{x^2 - 1}{x} = -f(x)$$

$f(-x) = -f(x) =>$ функция $f(x)$ является нечетной.

Форма представления результата: выполненное задание**.**

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.2 Функции и графики

Практическое занятие № 5
«Построение и чтение графиков функции»

Цель работы: повторение изученного материала; применение теоретических знаний к решению практических задач.

Выполнение работы способствует формированию:

ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб5_ОУП.03, ПРб6_ОУП.03, ПРб7_ОУП.03, ПРб8_ОУП.03, ПРб10_ОУП.03, ПРб13_ОУП.03.

Задание

1. Сила тока в проводнике в зависимости от времени меняется по закону:

   $I(t) = t^2 - 8t + 17.$

   Постройте график изменения силы тока. В какой момент времени сила тока была минимальной? В какой промежуток времени сила тока возрастала?

2. Применяя геометрические преобразования, постройте графики функций:
   а) $y = (x-5)^2 + 1;$
   б) $y = |(x+1)^3 + 1|;$
   в) $y = \frac{1}{x-2} + 3;$
   г) $y = \frac{1}{|x|+2} - 3.$

Порядок выполнения работы

Для построения графиков воспользуйтесь геометрическими преобразованиями: симметричное отображение графиков относительно осей координат, параллельный перенос графиков, сжатие и растяжение.

Построить график функции $y = (x+3)^2 + 4.$

За основу возьмём график $y = x^2$ (рис. 1).

Затем строим график $y = (x+3)^2$ путём параллельного переноса графика влево(рис.2).

Строим график $y = (x+3)^2 + 4$ параллельным переносом графика вверх (рис.3).

Рис. 1

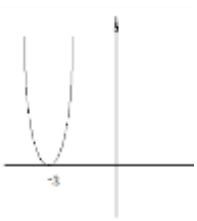


Рис. 2

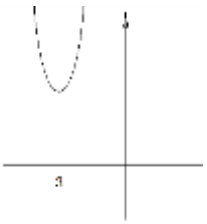


Рис. 3

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3 Корни, степени и логарифмы

Практическое занятие № 6
«Решение иррациональных уравнений»

Цель работы: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении различных видов иррациональных уравнений.

Выполнение работы способствует формированию:
ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб5_ОУП.03, ПРб8_ОУП.03, ПРб10_ОУП.03.

Задание

Решите уравнения:

1) $\sqrt[3]{x-1}=4;$
2) $\sqrt{3x+7}+4=0;$
3) $7-\sqrt{x+2}=4;$
4) $\sqrt{16x^2+16x+29}=5;$
5) $\sqrt[3]{\frac{x+2}{5x+22}}=-1;$
6) $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1;$
7) $\sqrt{5+\sqrt[3]{x+3}}=3;$
8) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}.$

Порядок выполнения работы

1) При возведении уравнения в четную степень получается уравнение, являющееся следствием исходного. Поэтому возможно появление посторонних решений уравнения, но не возможна потеря корней. Причина приобретения корней состоит в том, что при возведении в четную степень чисел, равных по абсолютной величине, но разных по знаку, получается один и

тот же результат.

Так как могут появиться посторонние корни, то необходимо делать проверку, подставляя найденные значения неизвестной только в первоначальное уравнение, а не в какие-то промежуточные.

2) При решении иррациональных уравнений полезно перед возведением обеих частей уравнения в некоторую степень "уединить радикал".

Решить уравнение $\sqrt{5x-8}=4$.

Чтобы избавиться от корня, возведём обе части уравнения в квадрат:

$\left(\sqrt{5x-8}\right)^2=4^2$

$5x-8=16$

$5x=16+8$

$5x=24$

$x=\frac{24}{5}$

$x=4{,}8$.

Форма представления результата: выполненные задания.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3 Корни, степени и логарифмы

Практическое занятие № 7
«Преобразования выражений, содержащих степени и радикалы»

Цель работы: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении заданий по преобразованию выражений, содержащих степени и радикалы. Рассмотреть их применение в прикладных формулах

Выполнение работы способствует формированию:

ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб7_ОУП.03, ПРб8_ОУП.03, ПРб10_ОУП.03, ПРб13_ОУП.03.

Задание

1. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{24\cdot 9}$; б) $\sqrt[4]{48\cdot 27}$;

в) $\sqrt[4]{54\cdot 24}$; г) $\sqrt[3]{75\cdot 45}$;

д) $\sqrt[5]{160 \cdot 625}$; е) $\sqrt[5]{48 \cdot 162}$;

2. Представьте выражение в виде степени и найдите его значение при данном значении переменной:

а) $\frac{a^5 \cdot a^{-8}}{a^{-2}}$ при $a = 6$; б) $\frac{p^{-9}}{p^{-2} \cdot p^{-5}}$ при $p = \frac{1}{2}$;

в) $\frac{b^{-9}}{(b^2)^{-3}}$ при $b = \frac{1}{2}$; г) $(t^{-3})^2 \cdot \frac{1}{t^{-5}}$ при $t = 0{,}1$.

3. Известно, что диаметр стержня-подвески из арматурной стали $d_{mp} = 3$ см. Определите требуемую площадь сечения стержня $A_{тр}$ ($см^2$), если диаметр задается по формуле $d_{mp} = \sqrt{\frac{4 \cdot A_{mp}}{\pi}}$. Значение π возьмите равное 3.
4. Период полураспада вещества равен 140 суток. Сколько вещества останется через 10 лет, если его начальная масса равна 8г?
5. Количество теплоты, выделяемое проводником с током, вычисляется по формуле: $Q = I^2 \cdot Rt$. Найдите силу тока (в Амперах), если $Q = 720$ Дж, $R = 9$ Ом, $t = 5\,c$.

Порядок выполнения работы

Вынесите знак минус из произведения. Воспользуйтесь свойством степени с отрицательным показателем. Употребите свойство воспроизведения во вторую степень. Для окончательного упрощения этого примера воспользуйтесь правилом умножения дробей. В последнем шаге воспользуйтесь делением степеней с одинаковым показателем.

В этом случае надо применит свойство степеней с отрицательным показателем. Чтобы разгрузить полученную дробь, надо преобразовать эту дробь в деление. Привести дробь к общему знаменателю и произвести сложение дробей с общим знаменателем. Последним шагом сделать сокращение.

Определите порядок действия. Выражение в первой скобке приведите к общему знаменателю, в числителе сделайте группировку и вынесите общий множитель за скобку. Выполните деление, сократите на общий множитель. Последнее действие – сложение дробей с одинаковыми знаменателями. Приведите подобные слагаемые.

1) Упростить выражение**:** $\frac{((x^6)^{-3}(x^2)^4)y^6}{x^2y^3} - \frac{x^7y^5z^7}{x^{10}y^{10}z^{17}}$

Вначале надо провести раскрытие скобок, для этого воспользуемся свойством степеней.

$= \frac{x^{((-3)6)}x^{(4\cdot 2)}y^{6-3}}{x^2} - x^{7-10}y^{5-10}z^{7-17} = x^{-12}y^3 - x^{-3}y^{-5}z^{-10} =$

Воспользуемся свойством степеней с отрицательным показателем.

$= \frac{y^3}{x^{12}} - \frac{1}{x^3y^5z^{10}}$.

Ответ: $\frac{y^3}{x^{12}} - \frac{1}{x^3y^5z^{10}}$

2) Упростить выражение

$\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$.

Решение. Введем обозначение $a = \sqrt{x}$, тогда $x = (\sqrt{x})^2 = a^2$, $x\sqrt{x} = a^2a = a^3$.

Формула из условия задачи после замены будет выглядеть так: $\frac{a+1}{a^3+a^2+a} : \frac{1}{a^4-a}$.

Заметим, что $a^4-a=a(a^3-1^3)=a(a-1)(a^2+a+1)$.

Тогда $\frac{a+1}{a^3+a^2+a}:\frac{1}{a^4-a}=\frac{a+1}{a(a^2+a+1)}\cdot\frac{a(a-1)(a^2+a+1)}{1}=(a+1)(a-1)=a^2-1.$

Вернемся к замене: a^2-1=x-1.

Ответ: x-1.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3 Корни, степени и логарифмы

Практическое занятие № 8
«Решение показательных уравнений»

Цель работы: обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся по методам решения показательных уравнений. Рассмотреть применение показательных функций

Выполнение работы способствует формированию:
ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб5_ОУП.03, ПРб8_ОУП.03, ПРб10_ОУП.03.

Задание

1. Решить уравнения:

а) $\left(\frac{1}{9}\right)^x=1;$ б) $0{,}5^x=0{,}125;$

в) $4^x=\frac{1}{16};$ г) $7^x=\frac{1}{343};$

д) $10^x=\sqrt[4]{1000};$ е) $0{,}3^x=\sqrt[4]{0{,}0081};$

ж) $5^x=\frac{1}{\sqrt[3]{25}};$ з) $\left(\frac{1}{5}\right)^x=25\sqrt{5};$

и) $2^{x+1}=4;$ к) $0{,}4^{4-5x}=0{,}16\sqrt{0{,}4};$

л) $5^{3x-1}=0{,}2;$ м) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}=8\sqrt{2};$

н) $3^{-1-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+3};$ о) $\left(\frac{1}{6}\right)^{4x-7}=6^{x-3};$

п) $3^x-3^{x+3}=-78;$ р) $2\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+7}-7\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+8}=49;$

с) $5^{2x-1} - 5^{2x-3} = 4{,}8$; т) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{5x} = \frac{4}{9}$;

2. Давление воздуха изменяется в зависимости от высоты по закону $p(h) = 2^{\frac{h}{4}}$. На какой высоте давление воздуха равно 128Па?

3. Сила трения железного троса, намотанного на железный барабан, дает возможность уравновесить меньшей силой F_0 Большую силу F, которую вычисляют по формуле $F = F_0 \cdot 3^n$, где n - число витков троса на барабане. Требуется установить сколько раз трос намотан на барабан, если силой 8 Н удерживается груз 24 Н.

Порядок выполнения работы:

Обе части уравнения приводим к одному основанию: $a^{f(x)} = a^{\Phi(x)}$, где $(a \succ 0, a \neq 1)$ Затем используем следующее свойство: $(\ a^{f(x)} = a^{\Phi(x)}) \Leftrightarrow (f(x) = \Phi(x))$.

Решите уравнение: $0{,}1^{x^2-0{,}5} \cdot \sqrt{0{,}1} = 0{,}001$.

Решение: Преобразуем уравнение к виду: $a^{f(x)} = a^{\Phi(x)}$.

$0{,}1^{x^2-0{,}5} \cdot 0{,}1^{0{,}5} = 0{,}1^3 \Leftrightarrow 0{,}1^{x^2-0{,}5+0{,}5} = 0{,}1^3 \Leftrightarrow 0{,}1^{x^2} = 0{,}1^3.$

Затем решаем уравнение: $x^2 = 3 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}.$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных

Тема 1.3 Корни, степени и логарифмы

Практическое занятие № 9

«Решение показательных неравенств»

Цель: Научиться решать показательные неравенства

Выполнение работы способствует формированию:
ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб_ОУП.03, ПРб8_ОУП.03, ПРб10_ОУП.03.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1.Решите простейшие показательные неравенства:

1) $\left(\frac{1}{6}\right)^x < 216$; 2) $27^x > \frac{1}{3}$; 3) $2^{3x} \leq \frac{1}{2}$.

.

2. Решите показательные неравенства:

1) $5^{x^2-2x-1} < 25$;

2) $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$

Порядок выполнения работы:

1. Запишите показательное уравнение.
2. Обе части неравенства приведите к одному основанию: $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$.
3. При решении показательных неравенств необходимо учесть свойство монотонности функции, т.е. при $a > 1$ $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) > \varphi(x)$ при $0 < a < 1$ $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) < \varphi(x)$.
4. Решите получившееся алгебраическое неравенство.
5. Запишите ответ.

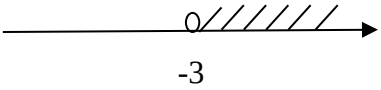
Записать задание в тетрадь и решить.

1. $\left(\frac{1}{6}\right)^x < 216$

   Решение:

   $\left(\frac{1}{6}\right)^x < \left(\frac{1}{6}\right)^{-3}$,

   $x > -3$

   Ответ: $x \in (-3; +\infty)$

2. $5^{x^2-2x-1} < 25$

   Решение:

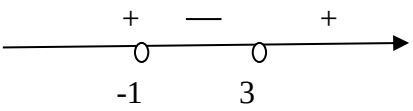
   $5^{x^2-2x-1} < 5^2$

   $x^2 - 2x - 1 < 2$

   $x^2 - 2x - 3 < 0$

   $x^2 - 2x - 3 = 0$

   $x_1 = -1;\ x_2 = 3$

   Ответ: $x \in (-1; 3)$

3. $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$

Решение: $3^x \cdot 3^2 + 3^x \cdot \frac{1}{3} < 28$

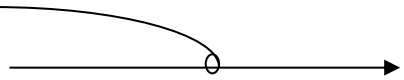
$3^x = y;$

$9y + \frac{1}{3}y < 28;$

$9\frac{1}{3}y < 28;$

$y < 28 : 9\frac{1}{3};$ $\quad y < 3.$

Вернемся к старой переменной: $3^x < 3$



$x < 1$ **1**

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" выставляется, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" выставляется, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3 Корни, степени и логарифмы

Практическое занятие № 10

«Нахождение значений логарифма по произвольному основанию. Переход от одного основания к другому. Вычисление и сравнение логарифмов. Логарифмирование и потенцирование выражений»

Цель: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся по теме. Формировать навыки нахождения значений логарифмических выражений, применяя определение и свойства логарифмов, логарифмировать и потенцировать выражения.

Выполнение работы способствует формированию:

ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб7_ОУП.03, ПРб8_ОУП.03, ПРб10_ОУП.03, ПРб13_ОУП.03.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Вычислите: а) $\log_{0,25} 0{,}64 + \log_{0,5} 10;$

   б) $2\log_4 6 + \log_4 0{,}2 + \frac{1}{2}\log_4 25 - \frac{1}{2}\log_4 81.$

2. Найдите значение выражения: $27^{1-\log_3 6} - 4^{-\log_4 0{,}125}$
3. Прологарифмируйте выражение по произвольному основанию:
   $\frac{a^2\sqrt[4]{d}}{b^3c^5}$.
4. Ёмкость высоковольтного конденсатора в датчике $C = 2 \cdot 10^{-6}$Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы

датчике напряжение на конденсаторе $U_0 = 16$ кВ. После выключения датчика напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$(с), где $\alpha = 0{,}7-$ постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения датчика прошло 21 с. Ответ дайте в киловольтах.

Порядок выполнения работы:

1) Используйте соответствующие свойства логарифмов и определение логарифма.
2) Используйте основное логарифмическое тождество и свойства логарифмов.

1) а) Вычислите: $\log_{0,25} 0{,}64 + \log_{0,5} 10$

Решение: $\log_{0,25} 0{,}64 + \log_{0,5} 10 =$ =

Используем формулу перехода к новому основанию $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$, получим

$= \frac{\log_{0,5} 0{,}64}{\log_{0,5} 0{,}25} + \log_{0,5} 10 = \frac{1}{2}\log_{0,5} 0{,}64 + \log_{0,5} 10 =$

далее используем свойства логарифма степени и логарифма произведения

$= \log_{0,5} \sqrt{0{,}64} + \log_{0,5} 10 = \log_{0,5}(0{,}8 \cdot 10) = \log_{0,5} 8 = -3$. Ответ: -3.

б) $2\log_4 6 + \log_4 0{,}2 + \frac{1}{2}\log_4 25 - \frac{1}{2}\log_4 81$

Решение: $2\log_4 6 + \log_4 0{,}2 + \frac{1}{2}\log_4 25 - \frac{1}{2}\log_4 81 = \log_4 6^2 + \log_4 0{,}2 + \log_4 \sqrt{25} - \log_4 \sqrt{81} = \log_4 36 + \log_4 0{,}2 + \log_4 5 - \log_4 9 = \log_4 \frac{36 \cdot 0{,}2 \cdot 5}{9} = \log_4 4 = 1$

2) Найдите значение выражения: $27^{1-\log_3 6} - 4^{-\log_4 0{,}125}$

Решение: $27^{1-\log_3 6} - 4^{-\log_4 0{,}125} =$

Используем свойства степеней и основное логарифмическое тождество

$(3^3)^{1-\log_3 6} - 4^{\log_4 0{,}125^{-1}} = 3^{3-3\log_3 6} - 4^{\log_4 \frac{1000}{125}} = \frac{3^3}{3^{\log_3 216}} - 8 = \frac{27}{216} - 8 = \frac{1}{8} - 8 = -7\frac{7}{8}$.

Ответ: $-7\frac{7}{8}$.

3) Прологарифмируйте выражение по произвольному основанию:

$$\frac{a^2\sqrt[4]{d}}{b^3 c^5}.$$

Прологарифмировать выражение – это значит выполнить следующий алгоритм:

1. Взять данное выражение в скобки и перед ними поставить знак логарифма по заданному основанию
2. Используя свойства логарифмов, необходимо убрать внутри логарифма такие действия, как возведение в степень, возведение в корень, умножение и деление

Прологарифмируем по основанию 10:

$lg\frac{a^2\sqrt[4]{d}}{b^3c^5} = lga^2 + lg\sqrt[4]{d} - lgb^3 - lgc^5 = 2lga + \frac{1}{4}lgd - 3lgb - 5lgc;$

4) Ёмкость высоковольтного конденсатора в датчике $C = 2 \cdot 10^{-6}$Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы датчике напряжение на конденсаторе $U_0 = 16$ кВ. После выключения датчика напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$(с), где $\alpha = 0{,}7-$ постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения датчика прошло 21 с. Ответ дайте в киловольтах.

Решение:

Задача сводится к решению уравнения при $t = 21c$ при заданных значениях начального напряжения на конденсаторе $U_0 = 16$ кВ, сопротивления резистора $R = 5 \cdot 10^6$Ом и ёмкости конденсатора $C = 2 \cdot 10^{-6}$Ф:

$0{,}7 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot \log_2 \frac{16}{U} = 21;$

$7\log_2 \frac{16}{U} = 21;$

$\log_2 \frac{16}{U} = 3;$

$\frac{16}{U} = 8;$

$U = 2$ кВ.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" выставляется, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" выставляется, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3 Корни, степени и логарифмы

Практическое занятие № 11

«Построение графиков логарифмических функций»

Цель: Обобщить и систематизировать знания учащихся, формировать навыки построения графиков логарифмических функций с помощью преобразований и исследования их свойств. Рассмотреть применение логарифмов.

Выполнение работы способствует формированию:

ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб5_ОУП.03, ПРб6_ОУП.03, ПРб7_ОУП.03, ПРб8_ОУП.03, ПРб10_ОУП.03, ПРб13_ОУП.03.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

В одной системе координат построить график элементарной и данной функций:

1. $y = log_2(x-2)$;
2. $y = 2 - log_{\frac{1}{2}}x$;
3. $y = log_3(x-2) + 1$

Порядок выполнения работы:

1. Определите, с помощью каких геометрических преобразований можно построить график заданной функции:
   - График функции $y = f(x) + B$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ в положительном направлении вдоль оси Оу на расстояние В, если $B > 0$ и в отрицательном направлении вдоль оси Оу, если $B < 0$;
   - График функции $y = f(x + b)$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ в положительном направлении вдоль оси Ох на расстояние b, если $b < 0$ и в отрицательном направлении вдоль оси Ох, если $b > 0$.
   - График функции $y = -f(x)$ получается симметричным отображением графика *y=f(x)* относительно оси *Ox*.
   - График функции $y = Af(x)$, получается растяжением графика $y = f(x)$ вдоль оси *Oy* от оси *Ox* в *A* раз при $A > 1$ или сжатием вдоль оси *Oy* к оси *Ox* в $^1/_A$раз при $A < 1$.
   - График функции $y = f(ax)$, получается сжатием графика $y = f(x)$ вдоль оси *Ox* к оси *Oy* в *a* раз при $a > 1$ или растяжением вдоль оси *Ox* к оси *Oy* в $^1/_a$ раз при $a < 1$.
2. Постройте исходный график.
3. Произведите нужные преобразования и постройте необходимый график.

4. Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_п$ = 20ºС, через радиатор отопления, пропускают горячую воду температурой $T_в$ = 100ºС. Расход проходящей через трубу воды $m = 0{,}2$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры TºС, при чем

$$x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_в - T_п}{T - T_п}$$

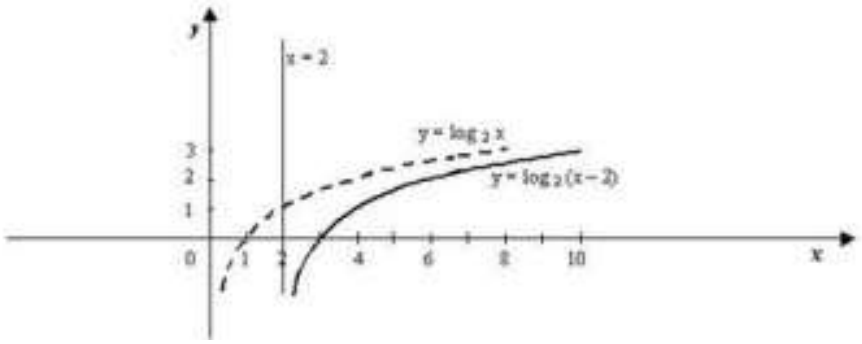
где c = 4200Дж/кг*С — теплоемкость воды
γ = 42 Вт/м ^{*0}С— коэффициент теплообмена
a = 1,4 — постоянная.

До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы 28 м?

1. $y = log_2(x-2)$.

Построим сначала график функции $y = \log_2 x$.

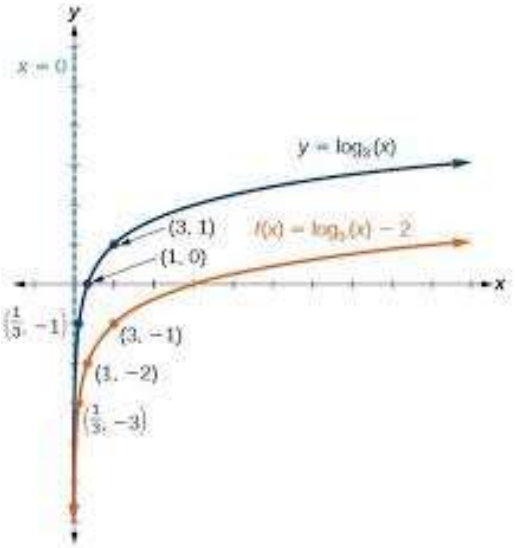
График функции $y = log_2(x-2)$ получим параллельным переносом вдоль оси *Ox* вправо на 2.



2. $y = log_3 x - 2$

Построим сначала график функции $y = \log_3 x$.

График функции $y = log_3 x - 2$ получим параллельным переносом вдоль оси *Oy* вниз на 2.



3. Логарифмические функции распространены чрезвычайно широко как в математике, так и в естественных науках. Приведём несколько примеров использования логарифмов в разнообразных науках.

В статистике и теории вероятностей логарифм входит в ряд практически важных вероятностных распределений. Например, логарифмическое распределение используется в генетике и физике. Логнормальное распределение часто встречается в ситуациях, когда 101 исследуемая величина есть произведение нескольких независимых положительных случайных переменных.

Закон Бенфорда («закон первой цифры») описывает вероятность появления определённой первой значащей цифры при измерении реальных величин.

Для оценки неизвестного параметра широко применяются метод максимального правдоподобия и связанная с ним логарифмическая функция правдоподобия. Флуктуации при случайном блуждании описывает закон Хинчина-Колмогорова.

Логарифм используется в определениях таких величин, как показатель константы автопротолиза (самоионизации молекулы) и водородный показатель (кислотности раствора).

Логарифмическая спираль пересекает свои радиус-векторы под постоянным углом. На основании этого ее называют равноугольной. Это свойство находит свое применение в технике. Дело в том, что в технике часто применяются вращающиеся ножи. Сила с которой они давят на разрезаемый материал, зависит от угла резания, т.е. угла между лезвием ножа и направлением скорости вращения. Для постоянного давления нужно, чтобы угол резания сохранял постоянное значение, а это будет в том случае, если лезвия ножей очерчены по дуге логарифмической спирали. Величина угла резания зависит от обрабатываемого материала.
В гидротехнике по логарифмической спирали изгибают трубу, проводящую поток воды к лопастям турбины. Благодаря такой форме трубы потери энергии на изменение направления течения в трубе оказываются минимальными и напор воды используется с максимальной производительностью.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" выставляется, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" выставляется, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3 Корни, степени и логарифмы

Практическое занятие № 12

«Решение логарифмических уравнений»

Цель: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся по методам решения логарифмических уравнений. Формировать навыки решения уравнений.

Выполнение работы способствует формированию:

ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03,ПРб5_ОУП.03, ПРб8_ОУП.03, ПРб10_ОУП.03.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание: Решите логарифмические уравнения:

1) $\log_4(2x-6)=3$;
2) $\log_x(2x^2-3x-4)=2$;
3) $\log_7(2x^2-7x+6)-\log_7(x-2)=\log_7 x$;
4) $\log_5 x+\log_5(x-4)=14$;
5) $\lg\sqrt{x-7}+\lg\sqrt{3x-8}=1$.

Порядок выполнения работы:

Перед началом решения уравнения нужно найти область допустимых значений. Используя свойства логарифмов обе части уравнения приводим к одному основанию $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Потенцируем обе части уравнения, получаем f(x) = g(x). Решаем полученное уравнение. Т.к. потенцирование уравнения может привести к появлению посторонних корней, то делаем проверку. Записываем ответ.

Записать задание в тетрадь и решить.

1) $\log_4(2x-6) = 3$

Решение: $\log_4(2x-6) = 3$ ОДЗ: $2x - 6 > 0$

$2x - 6 = 3^4;$

$2x - 6 = 81;$

$2x = 87;$

$x = 43{,}5$

Проверим, принадлежит ли найденный корень ОДЗ:

$$2 \cdot 43{,}5 - 6 = 81 > 0$$

Ответ: 43,5

2) $\log_x(2x^2 - 3x - 4) = 2$ ОДЗ: $2x^2 - 3x - 4 > 0$

$x > 0; x \neq 1$

$x^2 = 2x^2 - 3x - 4$

$x^2 - 2x^2 + 3x + 4 = 0$

$-x^2 + 3x + 4 = 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$x_1 = -1;\ x_2 = 4$

Проверим, принадлежат ли найденные корни ОДЗ:

$x_1 = -1$ $2(-1)^2 - 3(-1) - 4 > 0$

$2 + 3 - 4 = 1 > 0$

$x_2 = 4$ $2 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 - 4 > 0$

$32 - 12 - 4 = 16 > 0$

Ответ: $x_1 = -1;\ x_2 = 4$

3) $\log_5 x + \log_5(x-4) = 1$ ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ x - 4 > 0 \end{cases}$

Используем свойства и определение логарифма:

$\log_5 x(x-4) = 1;$

$x^2 - 4x = 5^1;$

$x^2 - 4x - 5 = 0;$

$x_1 = -1; x_2 = 5.$

Проверим, принадлежат ли найденные корни ОДЗ:
$-1 < 0$, значит $x_1 = -1$- посторонний корень.
$5 > 0$; $5 - 1 = 4 > 0$.
Ответ: 5

4) $\log_7(2x^2 - 7x + 6) - \log_7(x - 2) = \log_7 x$ ОДЗ: $\begin{cases} x > 0; \\ 2x^2 - 7x + 6 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$

$\log_7(2x^2 - 7x + 6) = \log_7(x - 2) + \log_7 x$;
$\log_7(2x^2 - 7x + 6) = \log_7(x - 2)x$;
$2x^2 - 7x + 6 = x^2 - 2x$;
$2x^2 - 7x + 6 - x^2 + 2x = 0$;
$x^2 - 5x + 6 = 0$;
$x_1 = 2$; $x_2 = 3$.
Проверим, принадлежат ли найденные корни ОДЗ:

$x_1 = 2$; $\begin{cases} 2 > 0; \\ 2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 6 = 0 \\ 2 - 2 = 0 \end{cases}$

$x_2 = 3$ $\begin{cases} 3 > 0; \\ 2 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 + 6 > 0; \\ 3 - 2 > 0 \end{cases}$

Ответ: 3.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:
Оценка "отлично" выставляется, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.
Оценка "хорошо" выставляется, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.
Оценка "удовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.
Оценка "неудовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3 Корни, степени и логарифмы

Практическое занятие № 13

Решение логарифмических неравенств

Цель: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся по методам решения логарифмических неравенств. Формировать навыки решения неравенств.

Выполнение работы способствует формированию:

ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03,ПРб5_ОУП.03, ПРб8_ОУП.03, ПРб10_ОУП.03.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание: Решите логарифмические неравенства:

1. $\log_2(5x+3) \le 3$;
2. $\log_{0,5}(3x+4) \ge \log_{0,5}(x^2+6)$;
3. $log_2(x^2-9x+4) \ge 4$

Порядок выполнения работы: Работаем по алгоритму**:** используя определение логарифма обе части неравенства приводим к одному основанию, т. е. получаем неравенство вида $\log_a f(x) \prec \log_a g(x)$.

При решении логарифмических неравенств нужно учитывать свойство монотонности логарифмической функции, т.е.

при $a > 1$ $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

при $0 < a < 1$ $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

При этом нужно обязательно учитывать и область допустимых значений.

Решение логарифмического неравенства сводится к решению систем неравенств:

при $a > 1$ $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

при $0 < a < 1$ $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Записать задание в тетрадь и решить.

1) $\log_2(5x+3) \le 3$.

Составим систему: $\begin{cases} 5x+3 > 0; \\ 5x+3 \le 2^3 \end{cases}$

Решим составленную систему: $\begin{cases} 5x+3 > 0; \\ 5x+3 \le 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x > -3; \\ 5x \le 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -0{,}6; \\ x \le 1 \end{cases}$ Ответ: $(-0{,}6;\, 1]$

2) $\log_{0,5}(3x+4) \ge \log_{0,5}(x^2+6)$

Составим систему неравенств, учитывая, что оба логарифмируемые выражения должны быть положительными и основание меньше 1.

$$\begin{cases} 3x+4>0 \\ x^2+6>0 \\ 3x+4\le x^2+6. \end{cases}$$

Решим составленную систему:

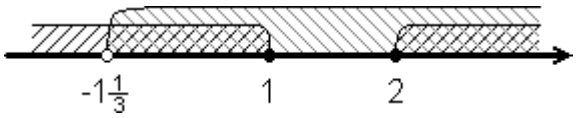
$$\begin{cases} 3x+4>0 \\ x^2+6>0 \\ 3x+4\le x^2+6. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x>-4 \\ x^2>-6 \\ -x^2+3x+4-6\le 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-\frac{4}{3} \\ x\in(-\infty;+\infty) \\ x^2-3x+2\ge 0 \end{cases} \cdot$$

Квадратное неравенство решим методом интервалов:

$$x^2-3x+2\ge 0$$

$x^2-3x+2=0 \Rightarrow x_1=1;\ x_2=2$

Найдём решение системы:



Ответ: $\left(-1\frac{1}{3};1\right]\cup[2;+\infty)$

3) $log_{\frac{1}{2}}(x^2+7x+10)\ge -2$

Составим систему неравенств, учитывая, что логарифмируемое выражение должно быть положительным и основание меньше 1.

$$\begin{cases} x^2+7x+10>0 \\ x^2+7x+10\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}; \end{cases}$$

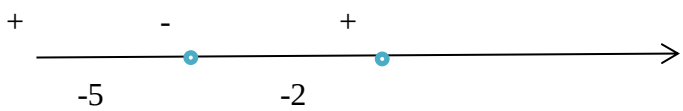
$$\begin{cases} x^2+7x+10>0, \\ x^2+7x+10\le 4; \end{cases}$$

Решаем квадратные неравенства:

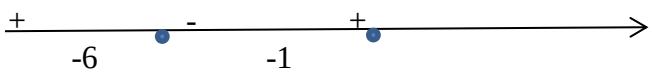
$x^2+7x+10>0$

$x^2+7x+10=0$

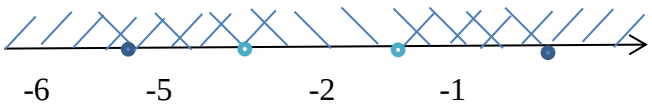
$x_1=-5;\ x_2=-2$



$x^2+7x+10\le 4$
$x^2+7x+6=0$
$x_1=-6;\ x_2=-1$



Найдём решение системы:



Ответ: $[-6;-5) \cup (-2;-1]$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:
Оценка "отлично" выставляется, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.
Оценка "хорошо" выставляется, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.
Оценка "удовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.
Оценка "неудовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.1 Основные понятия тригонометрии. Преобразование тригонометрических выражений

Практическое занятие № 14

«Радианный метод измерения углов вращения и связь с градусной мерой. Нахождение значений тригонометрических функций»

Цель: Формировать навыки перехода от радианной меры углов к градусной и обратно, нахождения значений тригонометрических функций.

Выполнение работы способствует формированию:
ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб7_ОУП.03, ПРб8_ОУП.03, ПРб10_ОУП.03, ПРб13_ОУП.03.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Выразите в радианах величину угла, заданного в градусах
   а) $150°$ б) $450°$ в) $40°$
2. Выразите в градусах величину угла, заданного в радианах
   а) $\frac{\pi}{10}$ б) 4π в) $\frac{4\pi}{9}$

3. Используя определения тригонометрических функций, найдите знаки этих функций для углов:
а) $-210°$ б) $\frac{2\pi}{3}$

4. Зубчатое колесо имеет 72 зубца. На сколько градусов повернется колесо при повороте его: а) против часовой стрелки на 21 зубец; б) по часовой стрелке на 144 зубца?

5. Шкив электромотора делает 6000 оборотов в минуту. Вычислите угловую скорость вращения в градусах в секунду и в радианах в секунду.

Порядок выполнения работы:

1. Радианная и градусная меры связаны зависимостью $180° = \pi$ радиан. Поэтому $1° = \frac{\pi}{180°}$, значит $\propto ° = \frac{\pi}{180}\alpha$ радиан.
2. Чтобы выразить угол в градусной мере воспользуйтесь соотношением $1\text{рад} = \frac{180°}{\pi}$.
3. Начертите единичную окружность, отложите заданный угол, помня, что положительным считается угол, откладываемый против часовой стрелки, а отрицательным – по часовой стрелке.

1. Выразите в радианах величину угла, заданного в градусах
а) $120°$ б) $225°$ в) $10°$

а) $120° = \frac{\pi}{180°} \cdot 120° = \frac{2\pi}{3}$; б) $225° = \frac{\pi}{180°} \cdot 225° = \frac{3\pi}{4}$; в) $10° = \frac{\pi}{180°} \cdot 10° = \frac{\pi}{18}$.

2. Выразите в градусах величину угла, заданного в радианах
а) $\frac{3\pi}{5}$ б) $\frac{2\pi}{9}$ в) $\frac{5\pi}{6}$

а) $\frac{3\pi}{5} = \frac{180°}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{5} = 108°$ б) $\frac{2\pi}{9} = \frac{180°}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{9} = 40°$ в) $\frac{5\pi}{6} = \frac{180°}{\pi}\frac{5\pi}{6} = 150°$

3. Используя определения тригонометрических функций, найдите знаки этих функций для углов:
а) $-120°$ б) $\frac{3\pi}{5}$

Построим единичную окружность и отложим данные углы. Угол $-120°$ откладываем по часовой стрелке. Точка, соответствующая углу $-120°$ лежит в III четверти, значит,
$\cos(-120°) < 0,\ \sin(-120°) < 0,$
$\text{tg}\,(-120°) > 0,\quad ctg(-120°) > 0.$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" выставляется, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" выставляется, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.1 Основные понятия тригонометрии. Преобразование тригонометрических выражений

Практическое занятие № 15

«Преобразования тригонометрических выражений. Основные тригонометрические тождества»

Цель: Формировать навыки преобразования тригонометрических выражений, используя основные тригонометрические тождества.

Выполнение работы способствует формированию:
ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб8_ОУП.03, ПРб10_ОУП.03.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
1. Найдите значения тригонометрических функций, если известно:
1) $cos \propto = 0{,}8,\ \frac{3\pi}{2} < \propto < 2\pi$
2) $sin \propto = 0{,}6, \frac{\pi}{2} < \propto < \pi$
3) $tg \propto = -\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2} < \propto < \pi.$
2. Колебание напряжения задается формулой: $U(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_0)$.Найдите значение напряжения, если известно, что $U_m = 100\ B,\ \varphi_0 = 0,\ sin\omega t = 0{,}6;$ $0 < \omega t < \frac{\pi}{2}$.

Порядок выполнения работы:
1. Запишите условие.
2. Запишите формулы основных тригонометрических тождеств, содержащие данную функцию и ту, которую необходимо найти.
3. Выразите неизвестную функцию. Если необходимо извлечь квадратный корень, то определите знак искомой функции, используя заданную четверть.
4. Вычислите значения всех неизвестных функций.

1. Дано: $cos \propto = 0{,}8,\ \frac{3\pi}{2} < \propto < 2\pi$
Найти: $sin \propto,\ tg \propto, ctg \propto$

Решение:
1)Запишем основное тригонометрическое тождество
$$cos^2 \propto + sin^2 \propto = 1$$
Выразим из него искомую функцию $sin \propto = \pm\sqrt{1 - cos^2 \propto}$
Так как синус в IV четверти имеет отрицательное значение, то
$sin \propto = -\sqrt{1 - 0{,}64} = -\sqrt{0{,}36} = -0{,}6.$
2) Запишем основное тригонометрическое тождество
$$tg \propto = \frac{sin \propto}{cos \propto}$$
Подставим известные значения и найдем неизвестную функцию
$$tg \propto = \frac{-0{,}6}{0{,}8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4} = -0{,}75$$
3) Запишем основное тригонометрическое тождество
$$tg \propto \cdot ctg\alpha = 1$$
Выразим из него искомую функцию $ctg \propto = \frac{1}{tg \propto}$
$$ctg \propto = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$$

3. Дано:) $sin \propto = 0{,}6, \frac{\pi}{2} < \propto < \pi$

Найти: $cos \propto,\ tg \propto, ctg \propto$

Решение:

1)Запишем основное тригонометрическое тождество

$$cos^2 \propto + sin^2 \propto = 1$$

Выразим из него искомую функцию $cos \propto = \pm\sqrt{1 - sin^2 \propto}$

Так как косинус во II четверти отрицателен, то $cos \propto = -\sqrt{1 - 0{,}36} = -0{,}8.$

2) Запишем основное тригонометрическое тождество

$$tg \propto = \frac{sin \propto}{cos \propto}$$

Подставим известные значения и найдем неизвестную функцию

$$tg \propto = \frac{0{,}6}{-0{,}8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4} = -0{,}75$$

3) Запишем основное тригонометрическое тождество

$$tg \propto \cdot ctg\alpha = 1$$

Выразим из него искомую функцию $ctg \propto = \frac{1}{tg \propto}$

$$ctg \propto = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$$

4. Дано: $tg \propto = -\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2} < \propto < \pi$

Найти: $cos \propto,\ sin \propto, ctg \propto$

Решение:

1) Запишем основное тригонометрическое тождество

$$tg \propto \cdot ctg\alpha = 1$$

Выразим из него искомую функцию $ctg \propto = \frac{1}{tg \propto}$

$$ctg \propto = -1\frac{1}{3}$$

2) Запишем основное тригонометрическое тождество

$$1 + tg^2 \propto = \frac{1}{cos^2 \propto}$$

Выразим из него искомую функцию $cos \propto = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2 \propto}}$

Так как косинус во II четверти отрицателен, то $cos \propto = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = -\frac{4}{5} = -0{,}8.$

3) Запишем основное тригонометрическое тождество

$$cos^2 \propto + sin^2 \propto = 1$$

Выразим из него искомую функцию $sin \propto = \pm\sqrt{1 - cos^2 \propto}$

Так как синус во II четверти положительный, то $sin \propto = \sqrt{1 - 0{,}64} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6.$

2. Колебание напряжения задается формулой: $U(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_0)$.Найдите значение напряжения, если известно, что $U_m = 100\ B,\ \varphi_0 = 0,\ sin\omega t = 0{,}6;$ $0 < \omega t < \frac{\pi}{2}$.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" выставляется, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" выставляется, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.1 Основные понятия тригонометрии. Преобразование тригонометрических выражений

Практическое занятие № 16

«Преобразования тригонометрических выражений. Формулы сложения, удвоения. Формулы приведения. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение, преобразование произведения тригонометрических функций в сумму»

Цель работы: Научиться преобразовывать тригонометрические выражения, используя тригонометрические формулы.

Выполнение работы способствует формированию:
ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб8_ОУП.03, ПРб10_ОУП.03

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1.Вычислите $\frac{cos12°\cdot cos48°-sin12°\cdot sin48°}{cos54°\cdot sin36°+cos36°\cdot sin54°}$

2. Упростите выражение а) $\frac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}-\frac{tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{ctg(\pi-\alpha)}+tg(\pi-\alpha)$; б) $\frac{\cos 2t}{\cos t-\sin t}-\sin t$

3. Дано $cos \propto = -\frac{3}{5};\ cos\beta = -\frac{24}{25};\ \pi < \propto < \frac{3\pi}{2};\ \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.
Найдите $\sin(\propto -\beta)$.

4. Найдите значение выражения: $\frac{sin78°-sin42°}{cos78°-cos42°}$

5. Упростите выражение $\frac{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha-\cos 7\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}$.

6. Докажите тождество: $\frac{sin2\alpha+sin6\alpha}{cos2\alpha+cos6\alpha}=tg4\alpha$

Порядок выполнения работы

1) Запишите задание и определите, какими формулами тригонометрии нужно воспользоваться.
2) Примените эти формулы.
3) Упростите получившееся выражение. Вычислите, если это необходимо, значение выражения.

Ход решения:

1.Вычислите $\frac{cos71°\cdot cos26°+sin71°\cdot sin26°}{sin20°\cdot cos25°+cos20°\cdot sin25°}$

Решение:

$$\frac{cos71°\cdot cos26°+sin71°\cdot sin26°}{sin20°\cdot cos25°+cos20°\cdot sin25°}$$

Для решения нам необходимо использовать формулы сложения:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta \mp sin\alpha \cdot sin\beta$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta \pm cos\alpha \cdot sin\beta$$
$$\frac{cos71°\cdot cos26°+sin71°\cdot sin26°}{sin20°\cdot cos25°+cos20°\cdot sin25°} = \frac{\cos(71°-26°)}{\sin(20°+25°)} = \frac{cos45°}{sin45°} = tg45° = 1$$

2. Упростите выражение: $\frac{sin(180°+\alpha)\cdot \text{tg}(\propto -180°)\cdot cos(360°-\alpha)}{\text{ctg}(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cdot ctg(\pi+\alpha)\cdot cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}$.

При решении этого задания нужно применить формулы приведения. Для этого вспомним мнемоническое правило: 1) Название функции не меняется, если к аргументу α прибавляется –πn или πn.

Название функции меняется, если к аргументу α прибавляется $-\frac{\pi}{2}n$ или $\frac{\pi}{2}n$, n-нечетное число.

2) Ставится знак исходной функции, считая , что α- острый угол.

Решение:

$$\frac{sin(180°+\alpha)\cdot \text{tg}(\propto -180°)\cdot cos(360°-\alpha)}{\text{ctg}(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cdot ctg(\pi+\alpha)\cdot cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)} = \frac{-sin\alpha \cdot tg\alpha \cdot cos\alpha}{tg\alpha \cdot ctg\alpha \cdot (-sin\alpha)} = \frac{cos\alpha}{ctg\alpha} = \frac{cos\alpha}{\frac{cos\alpha}{sin\alpha}} = \frac{cos\alpha \cdot sin\alpha}{cos\alpha} = sin\alpha$$

3. Дано $sin \propto = \frac{8}{17}$; $cos\beta = \frac{4}{5}$; $\frac{\pi}{2} < \propto < \pi$; $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Найдите $\sin(\propto +\beta)$.

Решение: Для решения нам нужно использовать формулу сложения

$$\sin(\alpha + \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sin\beta$$

Но нам неизвестны значения $cos \propto$ и $sin\beta$.

Найдем сначала эти значения, используя основное тригонометрическое тождество:

$cos^2 \propto + sin^2 \propto = 1$

Выразим из него искомую функцию $cos \propto = \pm\sqrt{1 - sin^2 \propto}$

$$sin\beta = \pm\sqrt{1 - cos^2\beta}$$

Так как косинус во II четверти отрицателен, то $cos \propto = -\sqrt{1 - \frac{64}{289}} = -\sqrt{\frac{289}{289} - \frac{64}{289}} = -\frac{15}{17}$.

Так как синус в I четверти положительный, то $sin\beta = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25} - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

Подставим найденные значения в формулу и вычислим значение $\sin(\propto +\beta)$.

$$\sin(\propto +\beta) = \frac{8}{17}\cdot\frac{4}{5} + \left(-\frac{15}{17}\right)\cdot\frac{3}{5} = \frac{32}{85} - \frac{45}{85} = -\frac{13}{85}$$

4. Найдите значение выражения: $\frac{sin68°-sin22°}{cos68°-cos22°}$

Для решения нам нужно воспользоваться формулами преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение:

$$cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$cos\alpha - cos\beta = -2sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$sin\alpha + sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$sin\alpha - sin\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Решение:

$$\frac{sin68° - sin22°}{cos68° - cos22°} = \frac{2cos\frac{68°+22°}{2}\cdot sin\frac{68°-22°}{2}}{-2sin\frac{68°+22°}{2}\cdot sin\frac{68°-22°}{2}} = \frac{2cos45°\cdot sin23°}{-2sin45°\cdot sin23°} = -\frac{cos45°}{sin45°} = -ctg45°$$
$$= -1$$

5. Докажите тождество: $\frac{sin\alpha+sin3\alpha+sin5\alpha}{cos\alpha+cos3\alpha+cos5\alpha} = tg3\alpha$

Для решения нам нужно воспользоваться формулами преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение.

Решение:

$\frac{sin\alpha+sin3\alpha+sin5\alpha}{cos\alpha+cos3\alpha+cos5\alpha} = tg3\alpha$

Выпишем отдельно левую часть тождества и преобразуем ее, используя формулы:

$\frac{sin\alpha+sin3\alpha+sin5\alpha}{cos\alpha+cos3\alpha+cos5\alpha} = \frac{(sin\alpha+sin5\alpha)+sin3\alpha}{(cos\alpha+cos5\alpha)+cos3\alpha} = \frac{2sin\frac{\alpha+5\alpha}{2}\cdot cos\frac{\alpha-5\alpha}{2}+sin3\alpha}{2cos\frac{\alpha+5\alpha}{2}\cdot cos\frac{\alpha-5\alpha}{2}+cos3\alpha} = \frac{sin3\alpha\cdot\cos(-2\alpha)+sin3\alpha}{cos3\alpha\cdot\cos(-2\alpha)+cos3\alpha} =$

Воспользуемся четностью косинуса $\cos(-\alpha) = cos\alpha$

$$= \frac{sin3\alpha\cdot\cos 2\alpha + sin3\alpha}{cos3\alpha\cdot\cos 2\alpha + cos3\alpha} = \frac{sin3\alpha\cdot(cos2\alpha+1)}{cos3\alpha\cdot(cos2\alpha+1)} = \frac{sin3\alpha}{cos3\alpha} = tg3\alpha$$
$$\text{tg3}\alpha = \text{tg3}\alpha$$

Тождество доказано.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.1 Основные понятия тригонометрии. Преобразование тригонометрических выражений

Практическое занятие № 17

«Построение графиков тригонометрических функций с использованием геометрических преобразований»

Цель работы: Научиться строить графики тригонометрических функций

Выполнение работы способствует формированию:
ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб7_ОУП.03, ПРб8_ОУП.03, ПРб10_ОУП.03, ПРб13_ОУП.03.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
Построить график функции $y = 3sin(x - \frac{\pi}{6})$. Записать свойства этой функции.

Порядок выполнения работы:
При построении графика нужно воспользоваться преобразованиями графиков.

1. ***y = f(x) + b*** – график функции получается из графика функции y = f(x) путем параллельного переноса этого графика на величину вдоль от ОУ. При этом, если b>0, то график функции f(x) + b располагается выше графика функции f(x), если b<0, то ниже этого графика.

2. ***y = f (x + b)*** – график функции получается из графика функции y = f(x) с помощью параллельного переноса этого графика на величину b вдоль оси ОХ, при этом, если b>0, то сдвиг влево, а если b<0, то сдвиг вправо.

3. ***y = - f(x)*** – график симметричен графику y = f(x) относительно оси ОХ

4. ***y = a f(x)*** – график функции получается из графика функции y = f(x) с помощью растяжения или сжатия графика по оси ОУ пропорционально коэффициенту *a*, причем,

если *a* > 1, то все ординаты графика af(x) увеличиваются в *a* раз, если a < 1, то уменьшаются в *a* раз.

5. ***y = f(a x)*** – график функции получается из графика функции y = f(x) с помощью растяжения или сжатия вдоль оси ОХ пропорционально коэффициенту *a*, причем, если, *a* > 1, то график сжимается в *a* раз, если 0 < a <1, то растягивается в 1/*a* раз.

6. $y = |f(x)|$ - для построения этого графика нужно построить график функции y = f(x) и отобразить относительно оси ОХ те части графика, которые расположены ниже этой оси.

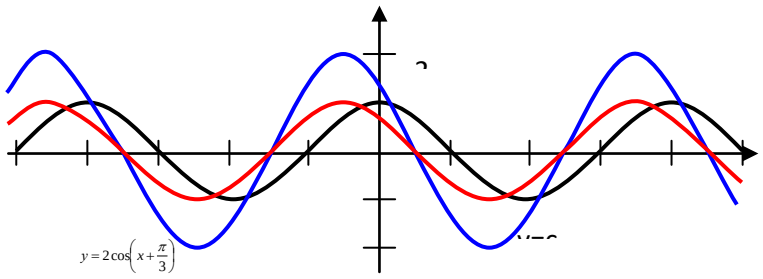
После построения графика проведите исследование функции по общей схеме.

Построить график функции $y = 2cos(x + \frac{\pi}{3})$. Записать свойства этой функции.

Сначала построим график функции $y = cosx$

Перенесем график функции $y = \cos x$ на $\frac{\pi}{3}$ влево. Получим график функции $y = cos(x + \frac{\pi}{3})$.

Растянем график получившейся функции в 2 раза вдоль оси Оу.



Исследуем функцию по общей схеме:

1. D(y) = R;
2. E(y) = [-2; 2]
3. y = 0, при x= π/6 + πn, n Є Z;
4. Функция общего вида.
5. Функция немонотонная, при x Є (2π/3 + 2πn; 5π/3 + 2πn) – функция возрастает; при x Є (-π/3 + 2πn;2 π/3 + 2πn) – функция убывает;
6. (-π/3 + 2πn; 2) – max; (2π/3 + 2πn; -2) – min;
7. T=2π.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.1 Основные понятия тригонометрии. Преобразование тригонометрических выражений

Практическое занятие № 18

Описание производственных процессов с помощью графиков функций

Цель работы: Научиться использовать графики функций в решении прикладных задач

Выполнение работы способствует формированию:

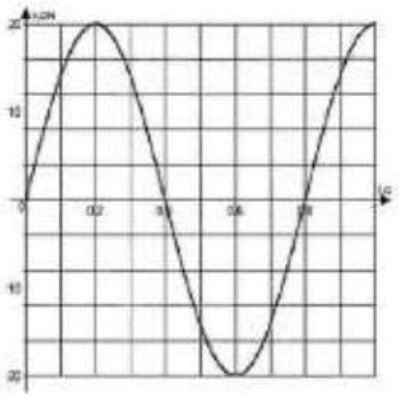
ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб7_ОУП.03, ПРб8_ОУП.03, ПРб10_ОУП.03, ПРб13_ОУП.03.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

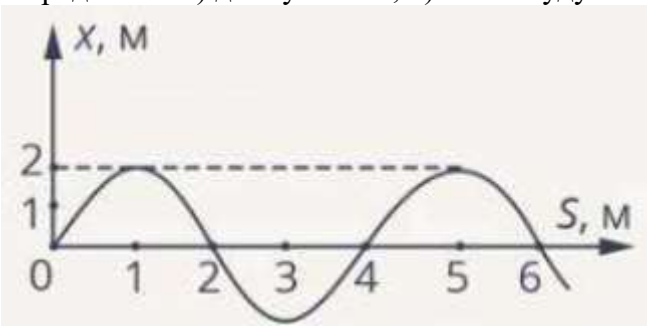
1. На рисунке изображен график зависимости координаты от времени колеблющегося тела.



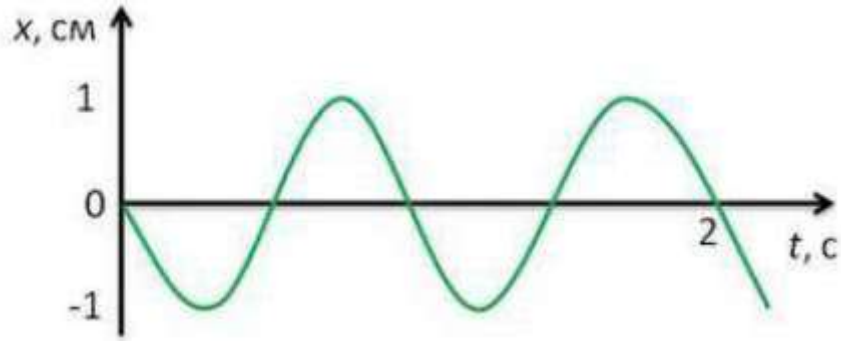
По графику определите**:** 1) амплитуду колебаний; 2) период колебаний; 3) частоту колебаний; 4) запишите уравнение координаты.

2. Есть мгновенная фотография волны в резиновом шнуре.

Определите: 1) длину волны; 2) амплитуду колебаний частичек шнура.



3. По представленному графику определите амплитуду и период колебаний нитяного маятника.



4. По уравнению гармонических колебаний определить амплитуду, угловую скорость, период и частоту. Начертить график данного гармонического колебания.

1) x =15 sin 3πt

2) x = 8 sin π/3t

3) x = 10 sin πt

Порядок выполнения работы:

1) Ознакомиться с условием задачи, проанализировать график.

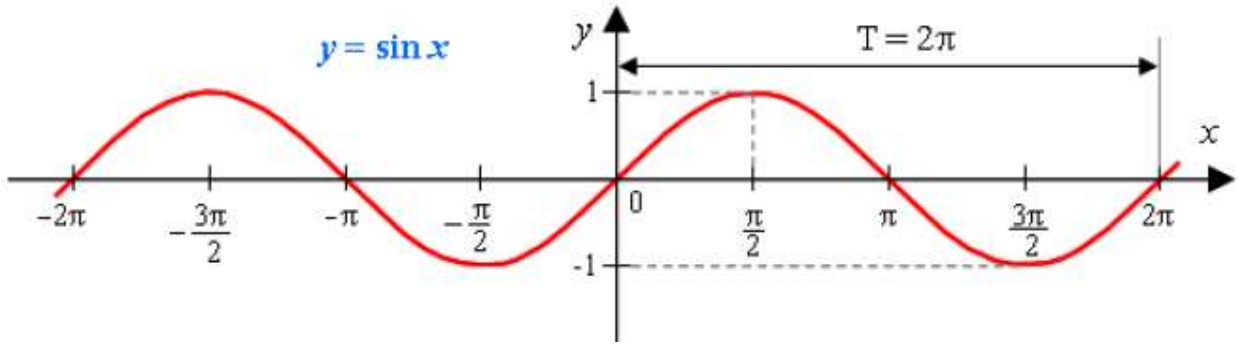
2) По графику, используя свойства тригонометрических функций, определить необходимые величины, записать ответ.

При решении задач необходимо использовать свойства тригонометрической функции $y = \sin x$.

Функция $y = \sin x$

Графиком функции является синусоида.

Полную неповторяющуюся часть синусоиды называют волной синусоиды.
Половину волны синусоиды называют полуволной синусоиды (или аркой).



Свойства функции *y*= sin *x*:
1) Область определения функции –множество действительных чисел.
2) Область значений функции –отрезок [–1; 1]
3) Это нечетная функция.
4) Это непрерывная функция.
5) Координаты точек пересечения графика:-с осью абсцисс: (πn; 0),-с осью ординат: (0; 0).
6) На отрезке [-π/2; π/2] функция возрастает, на отрезке [π/2; 3π/2] –убывает.
7) На промежутках [2πn; π + 2πn] функция принимает положительные значения. На промежутках [-π + 2πn; 2πn] функция принимает отрицательные значения.
8) Промежутки возрастания функции: [-π/2 + 2πn; π/2 + 2πn].Промежутки убывания функции: [π/2 + 2πn; 3π/2 + 2πn].
9) Точки минимума функции: -π/2 + 2πn. Точки максимума функции: π/2 + 2πn
10) Функция ограничена сверху и снизу. Наименьшее значение функции –1, наибольшее значение 1.
11) Это периодическая функция с периодом 2π (T = 2π)

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.2 Тригонометрические уравнения и неравенства

Практическое занятие № 19

«Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства»

Цель работы: Научиться решать простейшие тригонометрические уравнения.

Выполнение работы способствует формированию:
ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб5_ОУП.03.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
Решите тригонометрические уравнения:
1) $cos3x = 0$
2) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$
3) $3tg\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$
4) $ctg\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
5) $sin4x \cdot cos3x + cos4x \cdot sin3x = \frac{1}{2}$

Порядок выполнения работы:
1. Записать уравнение и определить, к какому виду оно относится и какой формулой необходимо воспользоваться.
2. Решить уравнение.
3. Записать ответ.

Решите тригонометрические уравнения:
1) $sin2x = 0$

Это уравнение относится к частным случаям, поэтому корни находятся по формуле

$$x = \pi n, \quad n \in Z$$

$xxxxxxxxxxxx$
$2x = \pi n, n\epsilon Z;$

$$x = \frac{\pi}{2}n, n\epsilon Z$$

Ответ:$x = \frac{\pi}{2}n, n\epsilon Z$

2) $\cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

Это уравнение относится к частным случаям, поэтому корни находятся по формуле

$$x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$xxxxxxxxxxxx$
$5x + \frac{\pi}{3} = \pi + 2\pi n, \ n\epsilon Z$
$5x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \ n\epsilon Z$
$5x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n\epsilon Z$
$x = \frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi}{5}n, \ n\epsilon Z$

Ответ: $x = \frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi}{5}n, \ n\epsilon Z$

3) $2\cos 3x = -1$

Разделим обе части уравнения на 2. Получим уравнение: $\cos 3x = -\frac{1}{2}$.

Это уравнение не является частным случаем, $a = -\frac{1}{2}, |a| < 1$. Поэтому оно имеет решение, которое находится по формуле: $x = \pm arccosa + 2\pi n, \ n\epsilon Z$

$3x = \pm\arccos(-\frac{1}{2}) + 2\pi n, \ n\epsilon Z$

$3x = \pm(\pi - \arccos\frac{1}{2}) + 2\pi n, \ n\epsilon Z$

$3x = \pm(\pi - \frac{\pi}{3}) + 2\pi n,\ n\epsilon Z$

$3x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n\epsilon Z$

$x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}n,\ n\epsilon Z$

Ответ: $x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}n,\ n\epsilon Z$

4) $tg\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Уравнение имеет решение, которое находится по формуле: $x = arctga + \pi n,\ n\epsilon Z$

$$6x - \frac{\pi}{4} = arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi n, \qquad n\epsilon Z$$

Функция $y = arctgx$ нечетная, поэтому $arctg(-x) = -arctgx$.

$6x - \frac{\pi}{4} = -arctg\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n,\ n\epsilon Z$

$6x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n\epsilon Z$

$6x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n\epsilon Z$

$6x = \frac{\pi}{12} + \pi n,\ n\epsilon Z$

$x = \frac{\pi}{72} + \frac{\pi}{6}n,\ n\epsilon Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{72} + \frac{\pi}{6}n, \qquad n\epsilon Z$

5)$cos6x \cdot cos3x + sin6x \cdot sin3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Видим, что левую часть можно свернуть по формулам сложения:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta \mp sin\alpha \cdot sin\beta$$

$$\cos(6x - 3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Теперь уравнение является простейшим и его корни находятся по формуле: $x = \pm arccosa + 2\pi n,\ n\epsilon Z$.

$$3x = \pm arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n,\ n\epsilon Z$$

$$3x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n\epsilon Z$$

$x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}n,\ n\epsilon Z$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}n, \qquad n\epsilon Z$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.2 Тригонометрические уравнения и неравенства

Практическое занятие № 20

«Тригонометрические уравнения и методы их решения»

Цель работы: Научиться решать тригонометрические уравнения.

Выполнение работы способствует формированию:
ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб5_ОУП.03.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
Решите тригонометрические уравнения:
1) $2sin^2x - 3sinx + 1 = 0$
2) $8sin^2x + 6cosx - 3 = 0$
3) $6tg^2x + tgx - 1 = 0$
4) $sin4x + sin3x = 0$
5) $cos^2(\pi - x) + 8\cos(\pi + x) + 7 = 0$

Порядок выполнения работы:
1. Запишите уравнение и определите, каким способом уравнение возможно свести к простейшим уравнениям.
2. Если необходимо, введите новую переменную и решите уравнение относительно этой переменной. После решения уравнения с новой переменной вернитесь к замене. Должно получиться простейшее тригонометрическое уравнение, решив которое, получим корни данного уравнения. Помните, что, если уравнение содержит функции $y = tgx, y = ctgx$, то необходимо учесть их область определения.
3. Если уравнение можно представить в виде произведения нескольких множителей, и правая часть равна нулю, то разложите левую часть на множители и используй правило, когда произведение равно нулю. Приравняв каждый множитель к нулю, получим несколько простейших уравнений, которые необходимо решить, учитывая область допустимых значений.
4. Запишите ответ.

Решите тригонометрические уравнения:
1) $2cos^2x + cosx = 1$
Решение:
Это уравнение с помощью введения новой переменной можно привести к решению простейших тригонометрических уравнений.
Пусть $cosx = t$, тогда наше уравнение примет вид $2t^2 + t = 1$
Перенесем 1 в левую часть и получим полное квадратное уравнение

$$2t^2 + t - 1 = 0$$
$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9, \quad \sqrt{D} = 3$$
$$t_1 = \frac{-1-3}{4} = -1;$$
$$t_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Вернемся к старой переменной:

$cosx = -1$ или $cosx = \frac{1}{2}$.

Получили два простейших тригонометрических уравнения, первое относится к частным случаям, а второе решается по общей формуле. Решим их.

1)$cosx = -1$

$x = \pi + 2\pi n, \quad n\epsilon Z$

2)$cosx = \frac{1}{2}$

$$x = \pm arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, \qquad n\epsilon Z$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \qquad n\epsilon Z$$

Ответ: $x = \pi + 2\pi n, \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \ n\epsilon Z$

2) $2cos^2x + sinx - 1 = 0$

Решение:

Это уравнение содержит разноименные функции, поэтому сразу ввести новую переменную не получится.

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и выразим одну функцию через другую:

$$cos^2x + sin^2x = 1$$

$cos^2x = 1 - sin^2x$

$2(1 - sin^2x) + sinx - 1 = 0$

$2 - 2sin^2x + sinx - 1 = 0$

$-2sin^2x + sinx + 1 = 0$

$2sin^2x - sinx - 1 = 0$

Это уравнение с помощью введения новой переменной можно привести к решению простейших тригонометрических уравнений.

Пусть $sinx = t$, тогда наше уравнение примет вид: $2t^2 - t - 1 = 0$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9, \quad \sqrt{D} = 3$$

$$t_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2};$$
$$t_2 = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Вернемся к старой переменной:

$sinx = 1$ или $sinx = -\frac{1}{2}$.

Получили два простейших тригонометрических уравнения, первое относится к частным случаям, а второе решается по общей формуле. Решим их.

1) $sinx = 1 \qquad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z$

2) $sinx = -\frac{1}{2}$.

$$x = (-1)^n arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, \ n\epsilon Z$$

$$x = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n, \qquad n\epsilon Z$$

$$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, \qquad n\epsilon Z$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \qquad x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, \qquad n\epsilon Z$

3) $5ctg^2x - 8ctgx + 3 = 0$

Это уравнение с помощью введения новой переменной можно привести к решению простейших тригонометрических уравнений.

Пусть $ctgx = t$, тогда наше уравнение примет вид: $5t^2 - 8t + 3 = 0$

Учитываем ОДЗ $x \neq \pi n, \ n\epsilon Z$

$$5t^2 - 8t + 3 = 0$$

$$D = 64 - 4 \cdot 5 \cdot 3 = 4, \qquad \sqrt{D} = 2$$

$$t_1 = \frac{8-2}{10} = 0{,}6;$$
$$t_2 = \frac{8+2}{10} = 1$$

Вернемся к старой переменной:

$ctgx = 1$ или $ctgx = 0{,}6$.

Решим их.

1)$ctgx = 1$ $x = arcctg1 + \pi n, n\epsilon Z$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z$

2)$ctgx = 0{,}6$ $x = arcctg0{,}6 + \pi n, n\epsilon Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, x = arcctg0{,}6 + \pi n, n\epsilon Z$

4) $cos2x + cos4x - cos3x = 0$

Решение:

Используя формулы преобразования суммы и разности функций в произведение, разложим правую часть уравнения на множители:

$2cos\frac{2x+4x}{2} \cdot cos\frac{2x-4x}{2} - cos3x = 0$

$2cos3x \cdot \cos(-2x) - cos3x = 0$ $\cos(-2x) = cos2x$

$2cos3x \cdot cos2x - cos3x = 0$

$cos3x(2cos2x - 1) = 0$

$cos3x = 0$ или $2cos2x - 1 = 0$

Получили два простейших тригонометрических уравнения, первое относится к частным случаям, а второе решается по общей формуле. Решим их.

1)$cos3x = 0$

$$3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n\epsilon Z$$
$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n, n\epsilon Z$$

2)$2cos2x - 1 = 0$

$$2cos2x = 1$$
$$cos2x = \frac{1}{2}$$
$$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \qquad n\epsilon Z$$
$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, \qquad n\epsilon Z$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n, \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, \ n\epsilon Z$

5) $2sin^2(\pi - x) + 5\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 2 = 0$

Решение:

Сначала нужно применить формулы приведения: $sin^2(\pi - x) = sin^2x$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -sinx$$

Получим уравнение: $2sin^2x - 5sinx + 2 = 0$

Это уравнение с помощью введения новой переменной можно привести к решению простейших тригонометрических уравнений.

Пусть $sinx = t$, тогда наше уравнение примет вид: $2t^2 - 5t + 2 = 0$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9, \quad \sqrt{D} = 3$$
$$t_1 = \frac{5-3}{4} = -\frac{1}{2};$$
$$t_2 = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Вернемся к старой переменной:

$sinx = \frac{1}{2}$ или $sinx = 2$.

1)$sinx = \frac{1}{2}$ $x = (-1)^n arcsin\frac{1}{2} + \pi n, \ n\epsilon Z$ $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,$

2)$sinx = 2$ Уравнение не имеет решений, т.к. $2 > 1$

Ответ: $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1. Производная функции и ее применение

Практическое занятие № 21

«Числовая последовательность, способы ее задания, вычисление членов последовательности. Предел последовательности. Нахождение пределов функции»

Цель работы:

1. Научиться вычислять пределы функции.
2. Научиться избавляться от неопределенностей $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.
3. Научиться решать задачи, связанные с числовой последовательностью.

Выполнение работы способствует формированию:

ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание.

1) Решить задачи на числовую последовательность.

2) Вычислить пределы функций

Задание 1	Задание 2

1. Найти восьмой член последовательности; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{n}{n+1}$; 2. Найти номер числа 3 в последовательности: $a_n = \frac{2n+1}{n^2}$ 3. Вычислить: $\lim\limits_{x\to -2}(3x^2-8x+5)$ 4.$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}+1}{1-\sqrt{2x}}$ 5.$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$	6.$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-12}$ 7.$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+1}$ 8.$\lim_{x\to 2}\frac{6x^2+5x-4}{x^2-2x}$ 9.$\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt{2x}+1}{1-\sqrt{2x}}$ 10.$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

Порядок выполнения работы:

Внимательно ознакомьтесь с условием задания.

Пользуясь своими школьными знаниями (в случае затруднения воспользуйтесь справочными материалами), выполните задание

Задание №1

1. Девятый член последовательности $c_n = \left(\frac{2n-1}{\sqrt{n^3+3}}\right)$ равен?

$c_9 = \left(\frac{2\cdot 9-1}{\sqrt{9^3+3}}\right) = \frac{17}{\sqrt{732}} = \frac{17}{2\sqrt{183}}; => c_9 = \frac{17}{2\sqrt{183}}$

2. Номер числа 6, являющегося членом последовательности $a_n = n^2 - 5n$ равен?

$6=n^2-5n$

$n^2-5n-6=0$

$n_1=6$

$n_2=-1$ –посторонний корень т.к. номер не может быть отрицательным числом.

Ответ: n=6.

Задание №2

Найдите пределы предварительно избавившись от неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$

1. $\lim_{x\to 9}\frac{x^2-81}{x^2-9x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 9}\frac{(x-9)(x+9)}{x(x-9)} = \lim_{x\to 9}\frac{x+9}{x} = \lim_{x\to 9}\frac{18}{9} = \lim_{x\to 3}2 = 2;$

2. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(x+5)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1}(x+5) = \lim_{x\to 1}(1+5) = \lim_{x\to 1}(6) = 6$

$x^2+4x-5=0 \quad \begin{cases} x_1+x_2=-4 \\ x_1+x_2=-5 \end{cases} => \begin{cases} x_1=-5 \\ x_2=1 \end{cases}$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{a+x})^2-(\sqrt{a-x})^2}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})} = \lim_{x\to 0}\frac{a+x-a+x}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{a+0}+\sqrt{a-0}} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{2\sqrt{a}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}};$

Вычислить пределы имеющие неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

4. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}+\frac{3x}{x^3}+\frac{4}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+0+0+0}{4+0+0+0} = \lim_{x\to\infty} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4};$

5. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+x}{x^2+4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{4}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+0+0}{0+0} = \left(\frac{2}{0}\right). = +\infty$

(0 в знаменателе принимаем за бесконечно малую величину.)

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1. Производная функции и ее применение

Практическое занятие № 22

«Нахождение производных по определению. Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций»

Цель работы: Отработать определение производной функции. Научиться применять формулы и правила дифференцирования. Научиться находить производную в заданной точке.

Выполнение работы способствует формированию:

ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб6_ОУП.03.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Найдите $y' = (0)$, если $y = x^2 - x$
2. Найдите $y' = (3)$, если $y = -\frac{3}{x}$
3. Найти производные функций используя правила вычисления и таблицу производных элементарных функций.
4. Вычислить производную функции в точке.

Задание 1		Задание 2	
1)	$y=7x^4-4x^3+5x^2-2$;	6)	$f(t)=0,5t+0,6t^2+0,8t+8$; $f'(1)$-?
2)	$y=5\sqrt{x}-\frac{2\sqrt{x}}{x^3}+\frac{x^4}{\sqrt{x}}$;	7)	$f(x)=ctgx-tgx$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$-?
3)	$y=3ctgx+5lnx-3^x$;	8)	$f(x)=2\cdot5^x+3\cdot e^x$; $f'(0)$-?
4)	$y=(9+x^2)(2x-1)$;	9)	$f(x)=cosx\cdot(1+sinx)$; $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$-?
5)	$y=\frac{x^3}{3x+5}$;	10)	$f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$; $f'(1)$-?

Порядок выполнения работы:

Вычисление производной функции $y = f(x)$ производится по общему правилу дифференцирования:

1) Придавая аргументу x приращение Δx и подставляя в выражение функции вместо аргумента x наращенное значение $x + \Delta x$, находим наращенное значение функции: $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

2) Вычитая из наращенного значение функции её первоначальное значение находим приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

3) Делим приращение функции Δy на приращение аргумента Δx_1 т.е. составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

4) Находим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Этот предел и есть производная от функции $y = f(x)$

1. Найти: $y'(x)$, если $y = 2x^2 - 3x$

Находим производную по общему правилу:

1) $y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) = 2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x$

2) $y + \Delta y - y = \cancel{2x^2} + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - \cancel{3x} - 3\Delta x - \cancel{2x^2} + \cancel{3x} = 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3\Delta x$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4x\Delta x+2(\Delta x)^2-3\Delta x}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}(4x+2\Delta x-3)}{\cancel{\Delta x}} = 4x + 2\Delta x - 3$

4) $\lim_{\Delta x \to 0}(4x + 2\Delta x - 3) = 4x - 3$

Найдём значение производной при $x = 3$.

$$y'(3) = 4 \cdot 3 - 3 = 0$$

2. Найти $y'(4)$, если $y = \sqrt{x}$

1) $y + \Delta y = y\sqrt{x + \Delta x}$

2) $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$

4) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x}+\Delta x-\cancel{x}}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Найдем значение производной в точке $x = 4$, $y'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

3. Найти производные функций используя правила вычисления и таблицу производных элементарных функций

Таблица производных основных элементарных функций.

$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\ln x)' \frac{1}{x}$	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$c' = 0, c - const;$	$x' = 1;$	$(CU)' = C \cdot U'$	
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(u \cdot v)' = u'v + uv'$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + uv'}{v^2}$	

1. $y = 6x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 4$

$y' = (6x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 4)' = 24x^3 - 24x^2 + 4x;$

2. $y = (5x - 4) * (x + 2)$

$$y' = ((5x-4)(x+2))' = \begin{vmatrix} u = 5x-4; & u' = 5 \\ v = x+2; & v' = 1 \\ (u*v)' = u'v + uv' \end{vmatrix} =$$

$$= 5(x+2) + 1(5x-4) = 5x + 10 + 5x - 4 = 10x + 6$$

3. $y = \dfrac{x+1}{x}$

$$y' = \left(\frac{x+1}{2x}\right)' = \begin{vmatrix} u = x+1; & u' = 5 \\ v = 2x; & v' = 2 \\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{1 \cdot 2x - 2(x+1)}{(2x)^2} = \frac{2x - 2x - 2}{4x^2} =$$

$$= \frac{-2}{4x^2} = -\frac{1}{2x^2};$$

4. Вычислить производную функции в точке.

$y = 3x^5 - 8x^4 + 9x^2 - 4$

$y'(-1) = 3 \cdot (-1)^5 - 8 \cdot (-1)^4 + 9(-1)^2 - 4 = -3 - 8 + 9 - 4 = -6.$

1. $y = 5\sin x \cos x$

$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5((sinx)' \cdot cosx + sinx(cosx)') = 5(cos^2x - sin^2x) = 5(cos2x) = 5(cos2\frac{\pi}{2}) = = 5cos\pi = 5 \cdot (-1) = -5$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1. Производная функции и ее применение

Практическое занятие № 23

«Вычисление производных сложных функций»

Цель работы: Научиться вычислять производные сложных функций

Выполнение работы способствует формированию:
ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб6_ОУП.03, ПРб8_ОУП.03, ПРб10_ОУП.03.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты

лекций.

Задание.

Задание 1: Найти производные функций используя правила вычисления и таблицу производных сложных функций.

Задание 2: Вычислить производную функции в точке.

Задание№1	Задание№2
1) $y = (mx^k + 4)^p$	2) $y = m * \cos(px^k - m)$; y′(1)=?
3) $y = (e^{px^m} + kx)$	4) $y = ktg(mx^p)$; y′(-1)=?
5) $y = 12^{px^m - mx}$	6) $y = ctg(px^k - mx)$; y′(2)=?
7) $y = \ln(x^k + px^m)$	8) $y = \sqrt{mp^x + kx}$; y′(-2)=?
9) $y = \log_7(mx + k)$	10) $y = (e^{px+k}) * \sqrt{x^p + mx}$; y′(3)=?
11) $y = p * \sin(kx + m)$	12) $y = \frac{\ln(px^n)}{k * \cos mx}$; y′(-3)=?

Где р – число букв в имени; м – число букв в фамилии; к – число букв отчества.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектом лекций и справочными материалами, выполните задание.

Задание № 1

Найти производные функций используя правила вычисления и таблицу производных сложных функций

«Правила вычисления и таблицу производных сложных функций»

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$	$(\sin u)' = \cos u u'$
$(e^u)' = e^u u'$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(a^u)' = a^u \ln a u'$	$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 x}u' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\ln u)' = \frac{1}{u}u' = \frac{u'}{u}$	$(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u}u' = -\frac{u'}{\ln^2 u}$
$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a}u' = \frac{u'}{u \ln a}$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

1. $y = (3x^2 - 4x)^5;$

$y' = ((3x^2 - 4x)^5) = 5(3x^2 - 4x)^4 \cdot (3x^2 - 4x)' =$
$= 5(3x^2 - 4x)^4 \cdot (6x - 4) = (30x - 20)(3x^2 - 4x)^4.$

2. $y = \sin(3x - x^2)$

$y'(\sin(3x - x^2))' = \cos(3x - x^2) \cdot (3x - x^2)' = (3 - 2x) \cdot \cos(3x - x^2).$

3. $y = 6\ln 5x$

$$y' = (10\ln 2x)' = 10(\ln 2x)' = 10 \cdot \frac{1}{2x} \cdot (2x)' = \frac{10 \cdot 2}{2x} = \frac{10}{x}.$$

Задание № 2

Вычислить производную функции в точке.

1. $y' = (\sqrt{x^2+6})'$; $y'(3) = ?$

$$y' = (\sqrt{x^2=6})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+6}} \cdot (x^2+6)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+6}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+6}}.$$

$$y'(3) = \frac{3}{\sqrt{3^2+6}} = \frac{3}{\sqrt{9+6}} = \frac{3}{\sqrt{15}}.$$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1. Производная функции и ее применение

Практическое занятие № 24

«Геометрические приложения производной»

Цель работы: Научиться составлять уравнение касательной к данной кривой в точке касания; находить угловой коэффициент касательной, проведенный к кривой.

Выполнение работы способствует формированию:

ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб7_ОУП.03, ПРб8_ОУП.03, ПРб10_ОУП.03, ПРб13_ОУП.03.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y = -x^2 + x$ в точке $x_0 = -2$
2. Найдите угол наклонена к оси касательной, проведенной к кривой $y = x^3$ в точке $x_0 = -2$
3. Составьте уравнение касательной к кривой $y = \sin 3x$ в точке $\left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$.

Порядок выполнения работы:

1. Значение производной функции $y = f(x)$ при $x = x_0$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в её точке с абсциссой x_0 , т.е. $k' = y'(x_0) = f'(x_0) = \mathrm{t}g \propto$ где $\propto$-угол между касательной к кривой в точке $M_0(x_0; y_0)$ и положительным направлением оси 0_x .
2. Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке имеет вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

3. Направление кривой в каждой точке определяется направление касательной к ней в этой точке, поэтому для нахождения угла наклонной кривой в данной точке надо вычислить угол между касательной, проведенной в этой точке, и осью.

1. Найти угол наклона к оси O_x касательной проведенной к кривой $y = \sin x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$

-найдем производную функцию $y = \sin x$ $y' = \cos x$

-найдем значение производной в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$ $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

-тангенс угла наклона касательной в данной точке равен $k = tg \propto$, откуда $\propto = arc\,\mathrm{tg}\frac{1}{2} \approx 26{,}6°$

2. Под какими углами парабола $y = x^2 + x$ пересекает ось O_x ?

-Найдем точки пересечения параболы с осью O_x, решив систему

$$\begin{cases} y = x^2 + x \\ y = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} (-1;0) \\ (0;0) \end{cases}$$

-Парабола пересекает ось O_x в точках $A(1;0); O(0;0)$. Найдём угловые коэффициенты касательных к параболе в этих точках

$$y' = (x^2 + x) = 2x + 1; k(-1) = 2(-1) + 1 = -1\,, k(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

- вычислили углы $\propto_1$ и $\propto_2$, образуемые касательными в точках пересечения параболы с осью O_x: $tg \propto_1 = -1, \propto_1 = 135°; tg \propto_2 = 1, \propto_2 = 45°$

3. Составьте уравнение касательной к кривой $y = 3x^2 - x$ в точке $x_0 = -1$

-найдём производную кривой в точке x_0

$$y' = (3x^2 - x)' = 6x - 1\,; y'(-1) = 6(-1) - 1 = -7$$

-найдем координату точки касания:

$$y(-1) = 3(-1) - (-1) = 4; M(-1;4)$$

-поставим в формулу уравнения касательной:

$$y - 4 = -7(x + 1)$$
$$y - 4 = -7x - 7$$
$$7x + y + 3 = 0 - \text{уравнение касательной}$$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1. Производная функции и ее применение

Практическое занятие № 25

«Исследование функций с помощью производной и построение графиков»

Цель работы: Научиться исследовать функций и строить их графики.

Выполнение работы способствует формированию:

ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб6_ОУП.03, ПРб8_ОУП.03, ПРб10_ОУП.03.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание: Исследовать функций и построить схематически их графики.

Задания	
$а) y = 2 + 5x^3 - 3x^5;$	$б) f(x) = x^4 - 2x^2 + 2;$
$а) y = 2x^3 - 3x^2 - 36x;$	$б) f(x) = x^4 - 2x^2 + 2;$
$а) y = x^3 - 4x^2;$	$б) f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2;$

Порядок выполнения работы:

Внимательно ознакомьтесь с условием задания.

Пользуясь конспектом лекций и справочными материалами, выполните задание.

Понятие производной позволяет провести подробное исследование функций с целью более точного построения их графиков.

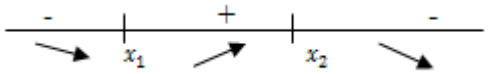
Рассмотрим алгоритм исследования функций:

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на четность и не четность;

- Если для функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, то данная функция является четной. Следовательно, график функции симметричен относительно оси (ОУ).
- Если для функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$, то дана функция является нечетной. Следовательно график функции симметричен относительно начала координат (0;0)
- Если $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то данная функция является функцией общего вида и свойством симметричности данная функция не обладает

3) найти интервалы монотонности функции;

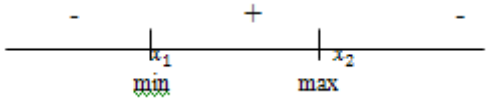
- Найти производную функции.
- Прировнять производную к нулю и решить полученное уравнение.
- Отметить найденные корни уравнения на координатной прямой, разбив её на промежутки.
- Найти знак производной на каждом из полученных промежутков.



f(x)↓, при x∈(-∞;x_1)∪(x_2;+∞)

f(x)↑, при x ∈(x_1;x_2)

4) найти экстремумы функции;



$x_{min} = x_1$

$x_{max} = x_2$

5) найти значение функции в критических точках и в точках экстремума;
6) найти точки пересечения с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график функции;
7) построить график фикции.

Задание № 1

1) Исследуйте функцию и постройте её график $y = 1 + 2x^2 - x^4$;

2) Определим четность

$f(-x) = 1 + 2(-x)^2 - (-x)^4 = 1 + 2x^2 - x^4 \Rightarrow$ *имеем* $f(-x) = f(x) \Rightarrow$

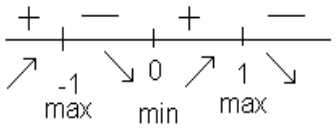
функция четная и ее график симметричен относительно оси (ОУ).

3) Найдем производную

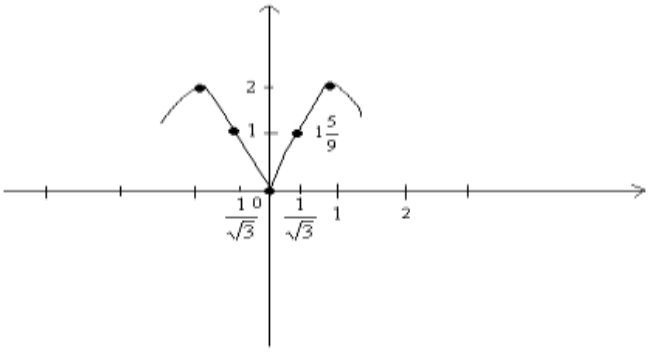
$f'(x) = (1 + 2x^2 - x^4)' = 4x - 4x^3;$

$4x - 4x^3 = 0$

$4x(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0 : x = \pm 1;$



x	$(-\infty;-1)$	-1	(-1:0)	0	(0;1)	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	_	0	+	0	_
$f(x)$	↗	2	↘	1	↗	2	↘



Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1. Производная функции и ее применение

Практическое занятие № 26, 27

«Решение прикладных задач с помощью производной»

Цель работы: Научиться применять производную функции при решении прикладных задач.

Выполнение работы способствует формированию:
ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб4_ОУП.03, ПРб6_ОУП.03, ПРб7_ОУП.03, ПРб8_ОУП.03, ПРб10_ОУП.03, ПРб11_ОУП.03, ПРб12_ОУП.03, ПРб13_ОУП.03, ПРб14_ОУП.03.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:

1. Точка движется по закону $x(t) = 2t^3 - 3t$. Чему равна скорость в момент времени $t = 1$?

2. Уравнение движения материальной точки вдоль оси имеет вид $s(t) = -0,5t^3 + t + 2$ (м). Найти ускорение $a(t)$ точки в момент времени $t = 2$ с.

3. Закон изменения температуры T тела в зависимости от времени t задан уравнением $T = 0,2t^2$. Скакой скоростью нагревается тело в момент времени 10 с?

4. Маховик, задерживаемый тормозом, за t с поворачивается на угол $\varphi = 5t - 0,4t^2$ (рад). Определить угловую скорость ω маховика в момент времени t = 2 си найти момент остановки вращения.

5. Количество электричества, протекающего через проводник, задается формулой $Q = 2t^3 - 3t^2 + 4$. Найдите силу тока в конце 4-й секунды.

6. Сила тока изменяется в зависимости от времени по закону $I = 2t^2 - 3t$ (I – в амперах, t – в секундах). Найти скорость изменения силы тока в конце 8-й секунды.

7. Тело массой 3 кг движется прямолинейно по закону $s(t) = t^3 + 4t^2 - 2t$. Найдите кинетическую энергию тела $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ через 2 с после начала движения.

8. Тело массой 2 кг движется прямолинейно по закону $x(t) = 2 - 3t + 2t^3$. Найдите силу, которая будет действовать на тело через 3 с?

Порядок выполнения работы:

1. Прочитать задачу и определить способ ее решения.
2. Применить формулу дифференциального исчисления для решения задачи.
3. Записать ответ.

1. Задание. Тело движется прямолинейно по закону $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$ (м). Определить скорость его движения в момент $t = 10$ с.

Решение. Искомая скорость - это производная от пути, то есть

$$v(t) = s'(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t\right)' = \left(\frac{2}{3}t^3\right)' - (2t^2)' + (4t)' =$$

$$= \frac{2}{3}(t^3)' - 2(t^2)' + 4(t)' = \frac{2}{3} \cdot 3t^2 - 2 \cdot 2t + 4 \cdot 1 = 2t^2 - 4t + 4$$

В заданный момент времени

$v(10) = 2 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 + 4 = 200 - 40 + 4 = 164$ (м/с).

Ответ. $v(10) = 164$ (м/с).

2. Закон изменения температуры T тела в зависимости от времени t задан уравнением $T = 0{,}2t^2$. С какой скоростью нагревается тело в момент времени 10 с?

Скорость нагревания тела есть производная температуры T по времени t: $\frac{dT}{dt} = (0{,}2t^2)' = 0{,}4t$.

Скорость нагревания тела при t =10 с:

$(\frac{dT}{dt})_{t=10} = 0{,}4 \cdot 10 = 4$ (град/с).

3. Маховик за время поворачивается на угол $\varphi = 8t - 0{,}5t^2$. Определить угловую скорость ω в конце 3-й секунды. Найти момент, когда прекратится вращение.

Имеем $\varphi' = 8 - t$. Так как $\omega = (8 - t)$ рад/с, то при t = 3 получим $\omega = 5$ (рад/с). Вращение прекратится в момент, когда $\omega = 8 - t = 0$, т.е. при t = 8 с.

Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:
Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.
Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.
Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.
Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 3.1. Производная функции и ее применение

Практическое занятие № 28-29

«Нахождение оптимального результата с помощью производной в практических задачах»

Цель работы: Научиться применять производную функции при решении задач на нахождение оптимального результата в производственных процессах.

Выполнение работы способствует формированию:
ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб4_ОУП.03, ПРб6_ОУП.03, ПРб7_ОУП.03, ПРб8_ОУП.03, ПРб10_ОУП.03, ПРб11_ОУП.03, ПРб12_ОУП.03, ПРб13_ОУП.03, ПРб14_ОУП.03.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:

1. Имеется квадратный лист жести, сторона которого а=60 см. Вырезая по всем его углам равные квадраты и загибая оставшуюся часть, нужно изготовить производственный ящик без крышки. Каковы должны быть размеры вырезаемых квадратов, чтобы производственный ящик имел наибольший объем?

2. Проектируется канал системы слива с прямоугольным сечением 4,5 . Каковы должны быть размеры сечения, чтобы для облицовки стенок и дна пошло наименьшее количество материала?

3. Прибыль фирмы зависит от объема производства x (ед) и определяется как $y = -x^3 + 21x^2 - 72x - 150$. Найти объем производства, при котором прибыль фирмы будет максимальной.

4. Расход горючего легкового автомобиля (литр на 100 км) в зависимости от скорости x км/ч при движении на четвертой передаче приблизительно описывается функцией $f(x) = 0{,}0017\,x^2 - 0{,}18x + 10{,}2$. При какой скорости расход горючего будет наименьший. Найдите этот расход.

5. Автомобиль приближается к мосту со скоростью 72 км/ч. У моста висит дорожный знак «36 км/ч». За 7 секунд до въезда на мост, водитель нажал на тормозную педаль. С разрешаемой ли скоростью автомобиль въехал на мост, если тормозной путь определяется формулой $s = 20t - t^2$?

Порядок выполнения работы:

1. Находим критические точки функции.
2. Проверяем, какие из найденных критических точек лежат внутри заданного отрезка.
3. Находим значения функции на концах отрезка и в тех критических точках, которые попадают в этот отрезок.
4. Из всех полученных значений функции выбираем наименьшее и наибольшее.

Задача 1. Прочность балки прямоугольного сечения пропорциональна произведению её ширины на квадрат высоты. Какое сечение должна иметь балка, из цилиндрической заготовки радиуса R, чтобы её прочность была наибольшей? (рисунок 1)

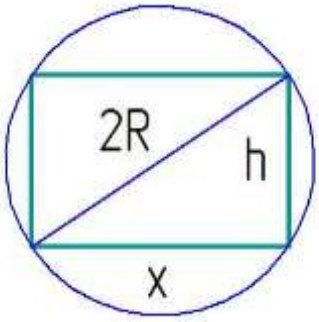


Рисунок 1 – сечение балки из цилиндрической заготовки

Решение. Составление математической модели. Оптимизируемая величина - прочность балки, поскольку в задаче требуется выяснить, когда прочность балки будет наибольшей. Обозначим оптимизируемую величину буквой y. Прочность зависит от ширины и высоты прямоугольника, служащего осевым сечением балки. Ширину балки обозначим буквой x. Поскольку осевое сечение представляет собой прямоугольник, вписанный в окружность радиуса R, то $0 \le x \le 2R$

Высота h прямоугольника связана с его шириной соотношением $x^2 + h^2 = 4R^2$ (по теореме

Пифагора), значит, $h^2 = 4R^2 - x^2$.

Прочность балки y пропорциональна произведению xh^2, т. е. $y = kxh^2$ (где коэффициент k – некоторое положительное число).

Значит $y = kx(4RR^2 - x^2)$, где $x \in [0; 2R]$.

Работа с составленной моделью.

Для функции $y = kx(4RR^2 - x^2)$, где $x \in [0; 2R]$ надо найти $y_{наиб}$.

Имеем:

Имеем: $y = 4kR^2x - kx^3$

$y' = 4kR^2 - 3kx^2$

Приравниваем производную нулю, получим

$4kR^2\text{-}3kx^2 = 0$

$x_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}}; \quad x_2 = -\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Заданному отрезку принадлежит лишь точка $x = x_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Вычислим значение функции в точке на концах отрезка в точках 0 и 2R.

Имеем

f(0)=0 f(2R)=0 $f(\frac{2R}{\sqrt{3}}) > 0$ значит $y_{наиб} = f(\frac{2R}{\sqrt{3}})$.

В задаче спрашивается, какое сечение должна иметь балка наибольшей прочности. Выяснили, что ширина прямоугольника, являющая осевым сечением наиболее прочной балки, равна $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Найдем высоту:

$h^2 = 4R^2 - x^2$

$h^2 = 4R^2 - \frac{4R^2}{3} = \frac{8R^2}{3}$.

$h = \frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad \frac{h}{x} = \sqrt{2}$

Ответ: Сечением балки должен служить прямоугольник, у которого отношение высоты к ширине равно $\sqrt{2}$.

Замечание: Квалифицированные мастера приходят к такому же результату, опираясь на свой опыт, но они принимают указанное отношение равным 1,4 (приближённое значение иррационального числа как раз равно 1,4).

Задача 2. Требуется изготовить деталь в виде прямоугольного параллелепипеда, в нижнем основании которого лежит квадрат (верхняя часть открыта), а объем равен 108 см^3. При каких размерах детали на ее изготовление пойдет наименьшее количество материала?

Решение: 1. Пусть сторона основания равна x см, а высота – h см.

2. Объем параллелепипеда V=x*x*h=x^2 h или по условию x^2 h=108.

Выразим из этой формулы высоту параллелепипеда: h=108/x^2 . (1)

3. С другой стороны, чтобы узнать какое количество материала пойдет на изготовление детали необходимо найти площадь S полной поверхности параллелепипеда без учета верхнего основания. Площадь поверхности параллелепипеда находится по формуле

Sполн=2(x*x+x*h+x*h)=2(x^2 +2xh). Площадь основания равна Sосн =x^2 , ее надо вычесть из полученной формулы S=Sполн*Sосн=2(x^2 +2xh) - x^2 = x^2 +4xh.

4. Подставим вместо h выражение (1). Получим формулу площади как функцию от x:

S(x) =x^2 +4*x*108/x^2 =x^2 +432/x.

5. Найдем производную S′(x)=(x^2 +432/x)′=2x-432/x^2 .

6. Чтобы найти экстремум, необходимо приравнять производную к нулю:
$S'(x)=0= 2x-432/x^2 =0$;
далее находим $2x^3 =432$;
$x^3 =216$;
$x=6$.
7. Получили x=6 – точку минимума, следовательно, $S(6)=108$ см^2 наименьшее значение.
9. Следовательно, сторона основания x равна 6 см, а высота $h=108/x^2 =108/36=3$ см.
Ответ: стороны бака 3 и 6 см.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.2 Интеграл и его применение

Практическое занятие № 30

«Интеграл и первообразная. Нахождение неопределенных интегралов при помощи свойств интегралов»

Цель: научиться находить неопределённые интегралы непосредственным интегрированием при помощи свойств интегрирования.

Выполнение работы способствует формированию:
ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб6_ОУП.03.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
В соответствии с технологической картой проекта найти следующие интегралы:
1. $\int \left(\frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5\right) dx$
2. $\int 3(2x^2 - 1)^2 \, dx$
3. $\int x^3(1 + 5x^2)dx$
4. $\int (\frac{3}{x^4} + \frac{8}{x^5})dx$
5. $\int (5\sqrt{x^6} - 7\sqrt[4]{x^3})dx$

Краткие теоретические сведения:
Свойства неопределенного интеграла

1) $\int mf(x)dx = m\int f(x)dx$, m-const

2) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Таблица основных интегралов

1) $\int dx = x + C$;

2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$;

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

4) $\int e^x dx = e^x + C$;

5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

7) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

11) $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

Порядок выполнения работы:

Совокупность всех первообразных для функции называется неопределенным интегралом.

Основные свойства неопределённого интеграла

1) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

2) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании таблицы интегралов. Могут представиться следующие случаи:

1) Данный интеграл находиться непосредственно по соответствующему табличному интегралу.

2) Данный интеграл после применения свойств 1и 2 приводится к одному или нескольким табличным интегралам;

3) Данный интеграл после элементарных тождественных преобразований, над подынтегральной функцией и применяя свойства 1и 2 приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

В соответствии с технологической картой проекта найти следующие интегралы:

1. $\int 6x^2 dx$ –используем свойство 2 и формулу 2.

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ Получим:

$\int 6x^2 dx = 6\int x^2 dx = 6\frac{x^{2+1}}{2+1} + c = 6\frac{x^3}{3} + c = 2x^3 + c$

2. $\int 4(x^2 - x + 3)dx$ Используя свойства 1 и 2 и, формулы 1 и 2 получим:

$4\int x^2 dx - 4\int x dx + 12\int dx = 4\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 12x + c = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 12x + c$

- постоянная интегрирования С равна алгебраической сумме трех постоянных интегрирования .

3. $\int 2(3x-1)^2 dx = 2\int (3x-1)^2 dx = 2\int (9x^2-6x-1)dx = 2\cdot 9\frac{x^3}{3} - 2\cdot 6\frac{x^2}{2} + 2x + c = 6x^3 - 6x^2 + 2x + c$

4. $\int \frac{x^3+3x^2+4x}{x} dx$ –разделим почленно на х, получим:

$\int (x^2+3x+4)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x + c$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ –используем формулу $2\int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.2 Интеграл и его применение

Практическое занятие № 31

«Теорема Ньютона-Лейбница. Вычисление определенных интегралов»

Цель работы: научиться вычислять определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница.

Выполнение работы способствует формированию:

ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб6_ОУП.03.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

В соответствии с технологической картой проекта найти интегралы.

1. $\int_1^2 2x^2 dx$
2. $\int_{-2}^{4} (8+2x-x^2)dx$
3. $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$
4. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos x - 3\sin x)dx$
5. $\int_{-2}^{2} \frac{1-x^2}{x^2} dx$

Порядок выполнения работы:

1) Используя таблицу интегралов найти интеграл

2) Используя формулу Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

найти определенный интеграл

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 2x^2 dx$$

Решение:

$$\int_1^2 2x^2 dx \overset{(1)}{=} 2\int_1^2 x^2 dx \overset{(2)}{=} \frac{2}{3}(x^3)\Big|_1^2 \overset{(3)}{=} \frac{2}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

(1) Выносим константу за знак интеграла.

(2) Интегрируем по таблице с помощью самой популярной формулы $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. Появившуюся константу $\frac{1}{3}$ целесообразно отделить от x^3 и вынести за скобку. Делать это не обязательно, но желательно – зачем лишние вычисления?

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Сначала подставляем в x^3 верхний предел, затем – нижний предел. Проводим дальнейшие вычисления и получаем окончательный ответ.

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2)dx$$

Решение:

$$\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2)dx \overset{(1)}{=} 8\int_{-2}^4 dx + 2\int_{-2}^4 x dx - \int_{-2}^4 x^2 dx \overset{(2)}{=} 8(x)\Big|_{-2}^4 + 2\cdot\frac{1}{2}(x^2)\Big|_{-2}^4 - \frac{1}{3}(x^3)\Big|_{-2}^4 \overset{(3)}{=}$$

$$= 8(4-(-2)) + (4^2 - (-2)^2) - \frac{1}{3}(4^3 - (-2)^3) = 8\cdot 6 + (16-4) - \frac{1}{3}(64+8) =$$

$$= 48 + 12 - 24 = 36$$

(1) Используем свойства линейности определенного интеграла.

(2) Интегрируем по таблице, при этом все константы выносим – они не будут участвовать в подстановке верхнего и нижнего предела.

(3) Для каждого из трёх слагаемых применяем формулу Ньютона-Лейбница: $F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Совет: перед тем, как использовать формулу Ньютона-Лейбница, полезно провести проверку: а сама-то первообразная найдена правильно?

Так, применительно к рассматриваемому примеру: перед тем, как в первообразную

функцию $8x+x^2-\frac{x^3}{3}$ подставлять верхний и нижний пределы, желательно на черновике проверить, а правильно ли вообще найден неопределенный интеграл? Дифференцируем:

$$\left(8x+x^2-\frac{x^3}{3}\right)'=8(x)'+(x^2)'-\frac{1}{3}(x^3)'=8\cdot 1+2x-\frac{1}{3}\cdot 3x^2=8+2x-x^2$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, неопределенный интеграл найден верно. Теперь можно и формулу Ньютона-Лейбница применить.

Форма представления результата: выполненное задание/

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.2 Интеграл и его применение

Практическое занятие № 32, 33

«Вычисление площадей фигур и объемов тел»

Цель работы: Научиться вычислять площади фигур и объемы тел, используя определенные интегралы

Выполнение работы способствует формированию:

ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб4_ОУП.03, ПРб6_ОУП.03, ПРб7_ОУП.03, ПРб11_ОУП.03, ПРб12_ОУП.03, ПРб13_ОУП.03, ПРб14_ОУП.03.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1**.** Форма заготовки имеет вид фигуры, ограниченной линиями. Найти площадь данной заготовки

a) $y=-x^2+4,\ y=0$

b) $y=x^2,\ y=x^3$

c) $y=e^x,\ y=e^{-x},\ y=4$

2.Вычислить объем детали

$y=x^2,\ y=1,$ *вокруг оси* OY

Порядок выполнения работы:

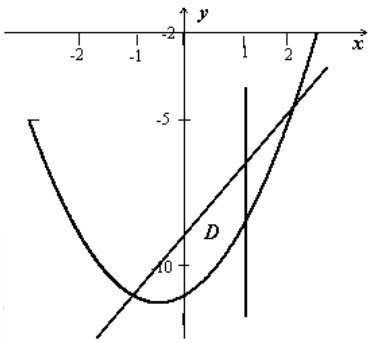
1) построить графики функций
2) найти область, ограниченную этими графиками
3) составит определенный интеграл, для нахождения площади найденной области

Пример 1: Найти площадь области **D (заготовка детали)**, ограниченной кривыми **y** = $\mathbf{x}^2$ + **x** + 11, **y** = 2 **x** - 9, при условии,

x<=1

$$D:\begin{cases} y = x^2 + x - 11, \\ y = 2x - 9, \\ x \le 1. \end{cases}$$

При решении таких задач следует обязательно изобразить исследуемый геометрический объект. Для определения нижнего предела интегрирования надо найти точку пересечения кривых; уравнение $\mathbf{x}^2$ + **x** + 11 = 2 **x** - 9 имеет два корня: **x** = -1 и **x** = 2. Подходящий корень - **x** = -1. Область ограничена сверху параболой, снизу - прямой, справа - прямой **x** = 1, крайняя левая точка - **x** = -1, поэтому



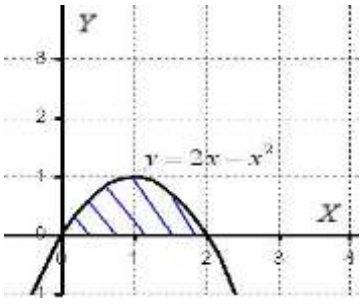
$$S(D) = \int_{-1}^{1}\left((2x-9)-(x^2+x\right)$$

Если область имеет более сложную структуру, её следует разбить на простые части .

Пример 2

Вычислить объем детали, которая идентична телу, полученному вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$ вокруг оси OX.

Решение: Как и в задаче на нахождение площади, **решение начинается с чертежа плоской фигуры**. То есть, на плоскости XOY необходимо построить фигуру, ограниченную линиями $y = 2x - x^2$



Искомая плоская фигура заштрихована синим цветом, именно она и вращается вокруг оси OX. В результате вращения получается такая немного яйцевидная летающая тарелка, которая симметрична относительно оси OX.

Объем тела вращения можно вычислить по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Вычислим объем тела вращения, используя данную формулу:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \pi \cdot \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - 0 \right) = \frac{16\pi}{15}$$

Ответ: $V = \frac{16\pi}{15} ед^3. \approx 3{,}35 ед^3.$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.2 Интеграл и его применение

Практическое занятие № 34, 35

«Физические приложения интегралов»

Цель работы: Научиться применять интегралы к решению физических задач

Выполнение работы способствует формированию:

ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб4_ОУП.03, ПРб6_ОУП.03, ПРб7_ОУП.03, ПРб11_ОУП.03, ПРб12_ОУП.03, ПРб13_ОУП.03, ПРб14_ОУП.03.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1) Вычислите массу участка стержня $x_1 = 0$ до $x_2 = 3$ (м), если его линейная плотность задается формулой $\rho(x) = x^2 + 1$(кг/м^3).

2) Скорость движения на конвейерной ленте $v = v(t)$. Найдем путь S, пройденный содержимым конвейерной ленты за промежуток времени от $t_1 = 2$ до $t_2 = 7$ мин.

3) Тело брошено вертикально вверх со скоростью, которая изменяется по закону $v = 29.4 - 9.8t$ м/с. Найти наибольшую высоту подъема.

4) Сила упругости пружины, растянутой на 0,05 м, равна 3Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,05м?

5) Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05м, если сила 100Н растягивает пружину на 0,01м.

6) Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 20 м, а высота 5 м (считая шлюз доверху заполненным водой).

Порядок выполнения работы:

1) Записать формулу, используя определенный интеграл $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$

2) Вычислить определенный интеграл

1. Скорость движения на конвейерной ленте $v = (9t^2 - 8t)$ м/с. Найти путь, пройденный содержимым конвейерной ленты за 4-ю секунду.

Решение: согласно условию, $f(t) = 9t^2 - 8t, \quad t_1 = 3, t_2 = 4$. Следовательно, $s = \int_3^4 (9t^2 - 8t)dt = [3t^3 - 4t^2]_3^4 = 83\ (м).$

2. Вычислите массу участка стержня $x_1 = 0$ до $x_2 = 1$ (м), если его линейная плотность задается формулой $\rho(x) = x^2 + 1$(кг/м^3).

Решение:

Согласно формуле, имеем:

$$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\,dx$$

$$m = \int_0^1 (x^2 + 1)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} + 1 - \left(\frac{0^3}{3} + 3\right) = \frac{4}{3}$$

Ответ: 1,33 кг

3. Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью v = (39,2—9,8t) м/с. Найти наибольшую высоту подъема тела.

Решение: тело достигнет наибольшей высоты подъема в такой момент времени t, когда v = 0, т.е. 39,2—9,8t = 0, откуда t= 4 с. По формуле (1) находим h=78.4

4. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

Решение: По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x, т. е. F = kx, где k — коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила F = 100 Н растягивает пружину на x = 0,01 м; следовательно, 100 = k*0,01, откуда k = 10000; следовательно, F = 10000x.

Искомая работа на основании формулы равна

$$A = \int_0^{0,05} 10000x\,dx = 5000x^2\Big|_0^{0,05} = 12,5\ (Дж).$$

5. В воду опущена прямоугольная пластинка, расположенная вертикально. Ее горизонтальная сторона равна 1 м, вертикальная 2 м. Верхняя сторона находится на глубине 0,5 м. Определить силу давления воды на пластинку.

Решение:

Здесь y = 1, a = 0,5, b = 2 + 0,5 = 2,5 (м), γ = 1000 кг/м^3. Следовательно,

$$P = 9810 \int_a^b xy\,dx = 9810 \int_a^b x\,dx = 9810 \frac{x^2}{2}\Big|_{0,5}^{2,5} = 9810 \frac{2,5^2 - 0,5^2}{2} = 29430\ (H).$$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.1. Координаты и векторы

Практическое занятие № 36

«Векторы. Действия с векторами. Декартова система координат в пространстве. Расстояние между точками»

Цель: Научиться выполнять действия с векторами, находить расстояние между точками.

Выполнение работы способствует формированию:
ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб7_ОУП.03, ПРб13_ОУП.03.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

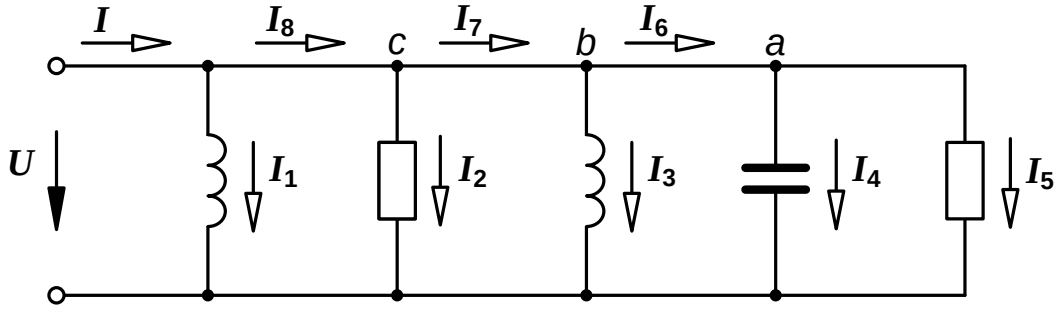
Задание:
Решите задачи:
m- количество букв в имени
n- количество букв в фамилии
p- месяц рождения

1. Даны две точки: $A(m;-n;0)$ и $B(p;-n;2)$.Разложите вектор $\overrightarrow{AB}$ по векторам базиса и найдите его длину.

2. Даны векторы $\vec{a} = p\vec{i} - \vec{j} + m\vec{k}$ и $\vec{b} = n\vec{i} + p\vec{k}$. Найдите координаты вектора $\vec{c} = m\vec{a} - n\vec{b}$.

3. Вычислите скалярное произведение векторов $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{a}$, если $\vec{a} = \{-m; n; p\}$ и $\vec{b} = \{0; -p; n\}$.

4. При каком значении «*x*» векторы $\vec{a} = \{m; -n; x\}$ и $\vec{b} = \{-2m; 2n; p\}$ будут коллинеарными?
5. В технологической карте задана электрическая цепь из параллельно соединенных элементов:



Найдите вектор тока $\vec{I}$ на входе электрической цепи, если токи параллельных ветвей можно задать векторами: $\vec{I}_1$(n;m;p), $\vec{I}_2$(2;n;7), $\vec{I}_3$(3;m;1), $\vec{I}_4$, (0;n;3), $\vec{I}_5$(4;2n;1).

6. Тело, на которое действует постоянная сила $\vec{F} = (2n; -3p; 5)$, перемещается по отрезку прямой из точки А (-n; 2; -m) в точку В (1;m;2). Вычислите работу этой силы.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектами лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Задача № 1. Даны точки $A(-3; 1; -1)$ и $B(2; -4; 1)$.

Разложите вектор $\overrightarrow{AB}$ по векторам базиса и найдите его длину.

Решение.

1) $\overrightarrow{AB} = \{2-(-3); -4-1; 1-(-1)\} = \{5; -5; 2\}$ - координаты вектора.

2) Разложим $\overrightarrow{AB}$ по векторам базиса:

$\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$.

3) Длину $|AB|$ найдем по формуле:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{5^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = 3\sqrt{6}.$$

Задача № 2.

Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{k}$. Найдите координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$. Решение

$\vec{a} = \{1; -3; 1\}$.

$\vec{b} = \{-2; 0; 1\}$; $2\vec{b} = \{-4; 0; 2\}$.

$\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b} = \{1; -3; 1\} - \{-4; 0; 2\} = \{1-(-4); -3-0; 1-2\} = \{5; -3; -1\}$.

Задача № 3

Вычислите скалярное произведение $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}$, если $\vec{a}=\{1;0;3\}$ и $\vec{b}=\{2;-1;1\}$.

Решение

1) Найдём координаты $2\vec{a}$:

$2\vec{a}=\{2;0;6\}$

2). Найдём координаты $2\vec{a}+\vec{b}$:

$2\vec{a}+b=\{2;0;6\}+\{2;-1;1\}=\{4;-1;7\}$.

3). Найдём скалярное произведение:

$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=4\cdot1+0\cdot(-1)+3\cdot7=25$.

Ответ: 25

Задача № 4.

При каком значении «*x*» векторы $\vec{a}=\{4;-6;x\}$ и $\vec{b}=\left\{-\frac{1}{2};\frac{3}{4};3\right\}$ будут коллинеарными?

Условие коллинеарности векторов:

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$.

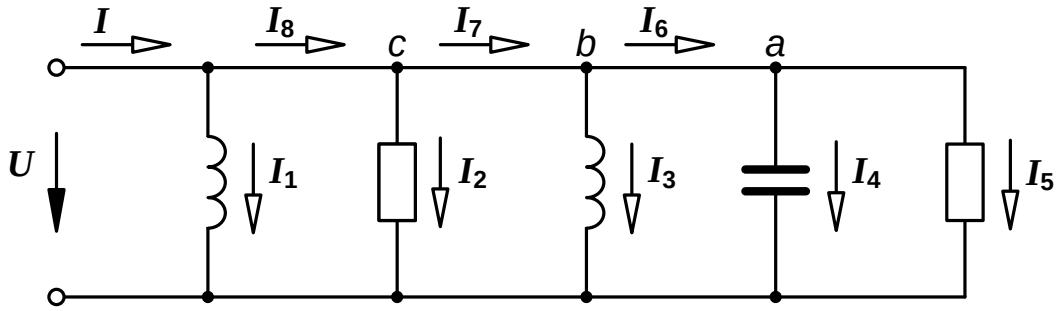
Получим:

$$\frac{4}{-\frac{1}{2}}=\frac{-6}{\frac{3}{4}}=\frac{x}{3}.$$

$-8=\frac{x}{3};\ x=-24$.

Ответ: $x=-24$.

Задача №5 В технологической карте задана электрическая цепь из параллельно соединенных элементов:



Найдите вектор тока $\vec{I}$ на входе электрической цепи, если токи параллельных ветвей можно задать векторами: $\vec{I}_1(1;2;3)$, $\vec{I}_2(2;1;7)$, $\vec{I}_3(3;1;1)$, $\vec{I}_4$, (0;2;3), $\vec{I}_5(4;2;1)$.

Решение:

Записываем в векторной форме уравнение первого закона Кирхгофа.

Ток на входе цепи равен сумме токов всех параллельных ветвей:

$\bar{I}=\bar{I}_1+\bar{I}_2+\bar{I}_3+\bar{I}_4+\bar{I}_5$

$\vec{I}$= (1+2+3+0+4;2+1+1+2+2;3+7+7+3+1) = (10;8;15)

Задача №6

Тело, на которое действует постоянная сила $\vec{F} = (4; -3; 5)$, перемещается по отрезку прямой из точки А (-5; 2; -1) в точку В (1;3;2). Вычислите работу этой силы.

Решение:

Имеем $\overrightarrow{AB}$=(1-(-5))$\vec{i}$+(3-2)$\vec{j}$+(2-(-1))$\vec{k}$=6$\vec{i}$+$\vec{j}$ +3$\vec{k}$

Теперь воспользуемся формулой W= $\vec{F}*\overrightarrow{AB}$=4*6-3*1+5*3=36

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.1. Координаты и векторы

Практическое занятие № 37

«Декартова система координат на плоскости. Уравнения прямой, окружности. Решение задач на расположение прямых на плоскости»

Цель работы: Научиться решать задачи на нахождение уравнений прямых и окружностей, на расположение прямых на плоскости.

Выполнение работы способствует формированию:

ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

m- количество букв в имени

n- количество букв в фамилии

p- месяц рождения

1. Найти точку пересечения прямых: $mx - py + n = 0$ и $x - y - p = 0$.
2. Найдите острый угол между прямыми:

$mx + ny - p = 0$ и $nx - py - nm = 0$.

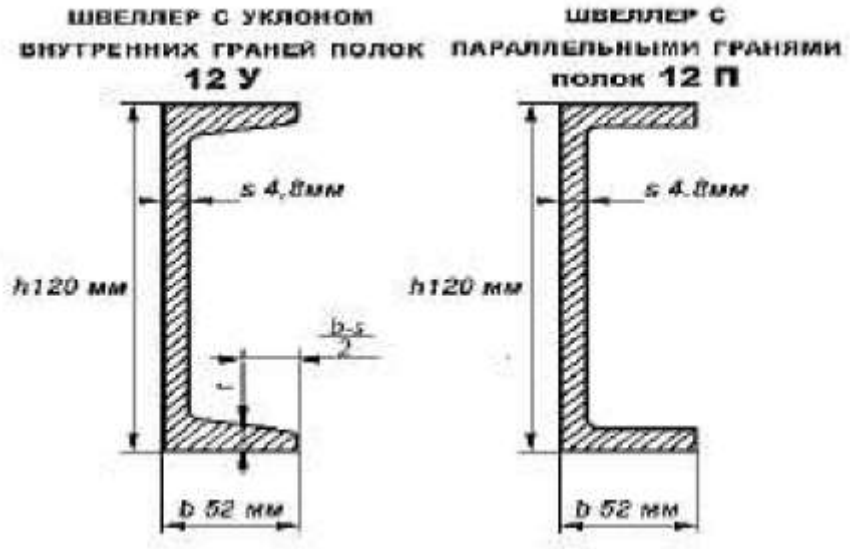
3. Составьте уравнение прямой, параллельной прямой $px + y - m = 0$ и проходящей через точку $A(-n; 1)$.

4. Из точки $A(m; -1)$ на прямую $nx + py + 1 = 0$ опущен перпендикуляр. Составьте его уравнение.

5. Два грузовика выехали в рейс по взаимно-перпендикулярным дорогам. Скорость одного-

50 км/ч, скорость другого – 60 км/ч, в данный момент они находятся на расстоянии 7 км и 10 км от начала пути. Через какое время расстояние между ними будет 35 км?

6. Сколько потребуется бетона для того чтобы залить швеллер с параллельными гранями полок 12П длиной 10 м?



Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектами лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи

Задача № 1

Найти точку пересечения прямых:

$2x+3y-12=0$ и $x-y-1=0$.

Решим систему:

$$\begin{cases}2x+3y-12=0,\\ x-y-1=0;\end{cases} \quad \begin{cases}2(1+y)+3y-12=0,\\ x=1+y;\end{cases}$$

$$\begin{cases}2+2y+3y-12=0,\\ x=1+y;\end{cases} \quad \begin{cases}5y=10,\\ x=1+y;\end{cases} \quad \begin{cases}y=2,\\ x=3.\end{cases}$$

Ответ: точка M (3; 2).

Задача № 2

Определить угол между прямыми, заданными уравнениями:

$2x-3y+6=0$ и $x+5y-2=0$.

Решение

Найдем угловые коэффициенты этих прямых:

$2x-3y+6=0;$ $\qquad x+5y-2=0$

$-3y=-2x-6,$ $\qquad 5y=-x+2,$

$y=\frac{2}{3}x+6,$ $\qquad y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5},$

$k_1=\frac{2}{3}.$ $\qquad k_2=-\frac{1}{5}.$

Подставим найденные значения k_1 и k_2 в формулу: $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$.

$$tg\varphi = \frac{-\frac{1}{5} - \frac{2}{3}}{1 + (-\frac{1}{5}) \cdot \frac{2}{3}} = \frac{-\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}} = -1.$$

$tg\varphi = -1; \quad \varphi = 135^0.$

Полученный угол между прямыми - тупой. Смежный с ним, будет острый, то есть $\varphi_1 = 180^0 - 135^0 = 45^0$.

Задача № 3

1. Составьте уравнение прямой, параллельной прямой $5x + 3y - 7 = 0$ и проходящей через точку А(-2;6).

Решение

Составим уравнение пучка прямых, проходящих через точку А(-2;6).

$y - 6 = k(x + 2)$

Находим угловой коэффициент данной прямой:

$3y = -5x + 7,$

$y = -\frac{5}{3}x + \frac{7}{3}; \quad k_1 = -\frac{5}{3}.$

Так как прямые параллельны, то $k_2 = -\frac{5}{3}$ - угловой коэффициент искомой прямой.

Подставим найденное значение $k_2 = -\frac{5}{3}$ в уравнение пучка прямых:

$y - 6 = k(x + 2);$

после преобразования получим:

$5x + 3y - 8 = 0.$

Задача № 4

Из точки А(-3;5) на прямую $x - 2y + 3 = 0$ опущен перпендикуляр. Написать его уравнение.

Решение

Составим уравнение пучка прямых, проходящих через точку $A(-3; 5)$.

$y - 5 = k(x + 3).$

Найдем угловой коэффициент k_1 прямой $x - 2y + 3 = 0;$

$-2y = -x - 3;$

$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2};$

$k_1 = \frac{1}{2}.$

Учитывая условие перпендикулярности прямых: $k_1 = -\frac{1}{k_2}$, найдем уравнение искомой прямой

$k_2 = -2.$

$y-5=-2(x+3);$

$y+2x+1=0.$

Ответ: $y+2x+1=0.$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.2. Прямые и плоскости в пространстве

Практическое занятие № 38

«Решение задач на параллельность прямой и плоскости»

Цель работы: Научиться решать задачи на параллельность прямой и плоскости, используя признак параллельности прямой и плоскости.

Выполнение работы способствует формированию:

ПРб1_ОУП.03, ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб9_ОУП.03.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

m- количество букв в имени

n- количество букв в фамилии

p- месяц рождения

Задача№1

Точка К не лежит в плоскости квадрата ABCD. Точки М и Р - середины отрезков КВ и КС.

1). Как расположены прямые AD и МР?

2). Вычислите длину отрезка МР, если сторона квадрата равна n см.

Задача №2

Основание AD трапеции ABCD находится на плоскости Р, а основание ВС отстоит от нее на p см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до плоскости Р, если $\frac{DA}{CB}=\frac{m+n}{m}$.

Задача №3

Плоскость Р пересекает стороны АВ и АС треугольника в точках B_1 и C_1 соответственно. B_1C_1 параллельна ВС и равна p см, а $AC_1:C_1C=m:n$. Найти ВС.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно прочитайте условие задачи.

2. Запишите, что в задаче дано, сделайте рисунок.

3. Проанализируйте условие задачи, рассуждая от того, что нужно найти. Вспомните, какие теоремы и формулы понадобятся при решении задачи.

4. Решите задачу. Запишите ответ.

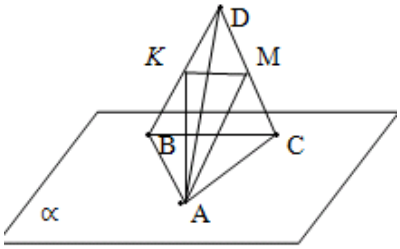
При решении задач на эту тему используется определение параллельных прямой и плоскости, признак параллельности прямой и плоскости, а также ваши знания из планиметрии.

Задача №1

Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. K и M – середины отрезков BD и CD.

1) Имеют ли общие точки прямая KM и плоскость, в которой лежат точки A, B и C?

2) Вычислите периметр треугольника AKM, если расстояние между каждой парой данных точек равно 8 см.



Дано: $\propto$, $A \in \propto$, $B \in \propto, C \in \propto$,

BK=KD, CM=MD,

AB=AC=BC=AD=BD=CD=8 см

1) пересекаются ли KM и $\propto$

2) Найти P_{AKM}

Решение:

1) Точка K является серединой отрезка BD, точка M- середина отрезка CD. Значит отрезок KM - средняя линия треугольника BCD.

По свойству средней линии треугольника $KM||BC$, $KM = \frac{1}{2}BC$. Следовательно, отрезок KM параллелен прямой, лежащей в плоскости. По признаку параллельности прямой и плоскости, отрезок KM и плоскость параллельны, т.е. не пересекаются.

2)$P_{AKM} = AK + AM + KM$

$KM = \frac{1}{2}BC$ $KM = 4$ см.

Рассмотрим треугольники ACD и ABD: AC=AD=AB=CD=BD, т.е. ACD и ABD- равные равносторонние треугольники, а отрезки AM и AK- медианы и высоты этих треугольников. Найдем эти отрезки:

$AK = AM = \sqrt{AC^2 - MC^2}$

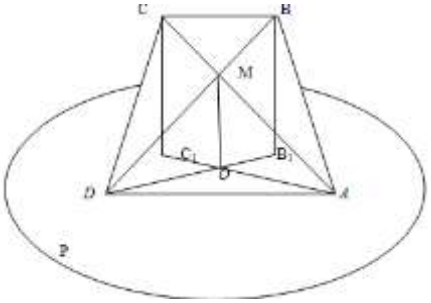
$MC = 4$ см.

$AK = AM = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ см

$P_{AKM} = 4 + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 4 + 8\sqrt{3}$ см

Задача № 2

Основание AD трапеции ABCD находится на плоскости P, а основание BC отстоит от нее на 5 см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до плоскости P, если $\frac{DA}{CB} = \frac{7}{3}$.



Дано:

ABCD – трапеция,

$\frac{DA}{CB} = \frac{7}{3}$. BB_1=5см, BB1⊥ P

Найти: расстояние от M до плоскости P

Решение

1) Из точки М проведем к плоскости Р перпендикуляр ОМ. Следовательно, ОМ- расстояние от М до плоскости Р.

2) Рассмотрим ΔADM и ΔCBM

$\angle BMC = \angle DMC$ как вертикальные

$\angle CBM = \angle ADM$ как накрестлежащие при параллельных прямых ВС и AD и секущей BD.

Значит, ΔADM и ΔCBM подобны и $\frac{DA}{CD} = \frac{DM}{BM} = \frac{AM}{CM}$.

$\frac{DA}{CB} = \frac{7}{3} \Longrightarrow \frac{DA}{CD} = \frac{DM}{BM} = \frac{AM}{CM} = \frac{7}{3}$

$\frac{DM}{BM} = \frac{7}{3} \Rightarrow DM = \frac{7}{10}BD, BM = \frac{3}{10}BD$

3) Рассмотрим ΔBB_1D и ΔMOD

$\angle D -$ общий, $\angle BB_1D = \angle MOD = 90^0 \Rightarrow \Delta BB_1D \sim \Delta MOD$

$\frac{BB_1}{MO} = \frac{BD}{MD}$

$\frac{BB_1}{MO} = \frac{BD}{0{,}7BD} = \frac{10}{7}$

$MO = \frac{7}{10}BD$

$MO = \frac{7}{10} \cdot 5 = 3{,}5$ см.

Ответ: 3,5 см.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.2. Прямые и плоскости в пространстве

Практическое занятие № 39

«Решение задач на перпендикулярность прямой и плоскости. Решение задач на применение теорем о трёх перпендикулярах»

Цель работы: Научиться использовать признак перпендикулярности прямой и плоскости, теорему о трех перпендикулярах при решении задач.

Выполнение работы способствует формированию:

ПРб1_ОУП.03, ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб7_ОУП.03, ПРб9_ОУП.03, ПРб13_ОУП.03.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

m- количество букв в имени

n- количество букв в фамилии

p- месяц рождения

Задача№1

Дан ромб ABCD. Из точки пересечения его диагоналей проведен отрезок OF, так, что $AF = CF$, $BF = DF$. Докажите, что OF перпендикулярен плоскости ромба, отрезок AC перпендикулярен плоскости BDF.

Задача №2

Дан равнобедренный треугольник ABC. $AC = BC = n$ см, $AB = m + 5$ см. Из вершины угла C проведен к плоскости перпендикуляр CD, равный p см. Найдите расстояние от точки D до стороны AB.

Задача №3

Точки *A* и *B* лежат в плоскости α, *M* – такая точка в пространстве, для которой $AM = m$, $BM = n$ и ортогональная проекция на плоскость α отрезка *BM* в три раза больше ортогональной проекции на эту плоскость отрезка *AM*. Найдите расстояние от точки *M* до плоскости α.

Задача № 4

Высота прямоугольного треугольника *ABC*, опущенная на гипотенузу, равна p см. Из вершины *C* прямого угла восставлен к плоскости треугольника *ABC* перпендикуляр *CM*, причем $CM = m + n$ см. Найдите расстояние от точки *M* до гипотенузы *AB*.

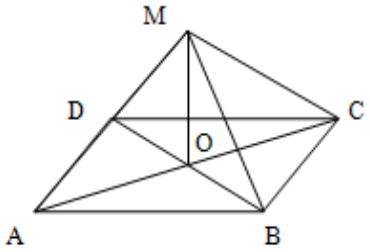
Порядок выполнения работы:

1. Внимательно прочитайте условие задачи.
2. Запишите, что в задаче дано, сделайте рисунок.
3. Проанализируйте условие задачи, рассуждая от того, что нужно найти. Вспомните, какие теоремы и формулы понадобятся при решении задачи.
4. Решите задачу. Запишите ответ.

При решении задач на эту тему используется определение перпендикулярных прямой и плоскости, признак перпендикулярности прямой и плоскости, теоремы о трех перпендикулярах, а также ваши знания из планиметрии

Задача 1

Из точки пересечения диагоналей параллелограмма ABCD проведен отрезок OM так, что $MA = MC, MB = MD$. Докажите, что отрезок OM перпендикулярен плоскости параллелограмма.



Дано:

$ABCD$ – параллелограмм

$AC \cap BD = O$

$MA = MC, MB = MD$

Доказать: $OM \perp (ABCD)$

Доказательство

1) Рассмотрим треугольники AOM и COM. OM - общая сторона, $MA = MC$ по условию, $AO = OC$ по свойству диагоналей параллелограмма. Значит, треугольники равны по трем сторонам, т.е. $\triangle AOM = \triangle COM$. Следовательно, $\angle AOM = \angle COM$.

Т. к. эти углы смежные и равные, то они равны по 90^0, т.е. $OM \perp AC$.

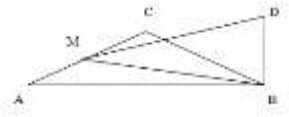
2) Рассмотрим треугольники BOM и DOM. OM - общая сторона, $MB = MD$ по условию, $BO = OD$ по свойству диагоналей параллелограмма. Значит, треугольники равны по трем сторонам, т.е. $\triangle BOM = \triangle DOM$. Следовательно, $\angle BOM = \angle DOM$.

Т. к. эти углы смежные и равные, то они равны по 90^0, т.е. OM ⊥BD.

3) $\left.\begin{matrix} OM \perp AC. \\ OM \perp BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow OM \perp (ABCD)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

Задача 2

Стороны треугольника 10 см, 17 см и 21 см. Из вершины большего угла этого треугольника проведен перпендикуляр к его плоскости, равный 15 см. Найдите расстояние от его концов до большей стороны.



Дано:

$\Delta ABC, AB = 10$ см, $BC = 17$см, $AC = 21$см

$BD \perp (ABC), BD = 15$см

Найти расстояние от B и D до AC

Решение

1) Дополнительное построение: проведем $BM \perp AC$.

Значит, BM- расстояние от B до AC.

$$\left.\begin{matrix} DM - \text{наклонная} \\ BM - \text{проекция наклонной} \\ BM \perp AC. \end{matrix}\right\} \Rightarrow DM \perp AC \Rightarrow DM - \text{расстояние от } D \text{ до AC.}$$

2) Для того, чтобы найти высоту BM треугольника ABC, вычислим сначала его площадь, используя формулу Герона $S_{\triangle} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$

$p = \frac{10+17+21}{2} = 24$ см

$S_{ABC} = \sqrt{24 \cdot (24-10) \cdot (24-17) \cdot (24-21)} = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3} = 84$см^2

3) Запишем формулу для вычисления площади $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ah$

Применим эту формулу к нашему треугольнику: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BM$.

Выразим из этой формулы BM: $BM = \frac{2S_{ABC}}{AC}$

$BM = \frac{2 \cdot 84}{21} = 8$ см

4) Рассмотрим треугольник BDM- прямоугольный, т.к. $BD \perp (ABC)$.

По теореме Пифагора найдем DM:

$DM^2 = BD^2 + BM^2$

$DM^2 = 15^2 + 8^2 = 289$

$DM = \sqrt{289} = 17$ см

Ответ: расстояния от концов перпендикуляра до стороны AC равны 8 см и 17 см.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.2. Прямые и плоскости в пространстве

Практическое занятие № 40

«Решение задач на применение теорем о трёх перпендикулярах»

Цель работы: Научиться использовать признак перпендикулярности прямой и плоскости, теорему о трех перпендикулярах при решении задач.

Выполнение работы способствует формированию:
ПРб1_ОУП.03, ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб7_ОУП.03, ПРб9_ОУП.03, ПРб13_ОУП.03.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
m- количество букв в имени
n- количество букв в фамилии
p- месяц рождения

Задача№1
Дан ромб ABCD. Из точки пересечения его диагоналей проведен отрезок OF, так, что $AF = CF$, $BF = DF$. Докажите, что OF перпендикулярен плоскости ромба, отрезок AC перпендикулярен плоскости BDF.

Задача №2
Дан равнобедренный треугольник ABC. $AC = BC = n$ см, $AB = m + 5$ см. Из вершины угла C проведен к плоскости перпендикуляр CD, равный p см. Найдите расстояние от точки D до стороны AB.

Задача №3
Точки A и B лежат в плоскости α, M – такая точка в пространстве, для которой $AM = m$, $BM = n$ и ортогональная проекция на плоскость α отрезка BM в три раза больше ортогональной проекции на эту плоскость отрезка AM. Найдите расстояние от точки M до плоскости α.

Задача № 4
Высота прямоугольного треугольника ABC, опущенная на гипотенузу, равна p см. Из вершины C прямого угла восставлен к плоскости треугольника ABC перпендикуляр CM, причем $CM = m + n$ см. Найдите расстояние от точки M до гипотенузы AB.

Порядок выполнения работы:
1. Внимательно прочитайте условие задачи.
2. Запишите, что в задаче дано, сделайте рисунок.
3. Проанализируйте условие задачи, рассуждая от того, что нужно найти. Вспомните, какие теоремы и формулы понадобятся при решении задачи.
4. Решите задачу. Запишите ответ.

При решении задач на эту тему используется определение перпендикулярных прямой и плоскости, признак перпендикулярности прямой и плоскости, теоремы о трех перпендикулярах, а также ваши знания из планиметрии

Задача

Высота прямоугольного треугольника *ABC*, опущенная на гипотенузу, равна 9.6. Из вершины *C* прямого угла восставлен к плоскости треугольника *ABC* перпендикуляр *CM*, причем *CM* = 28. Найдите расстояние от точки *M* до гипотенузы *AB*.

Решение

Примените теорему о трех перпендикулярах.

Пусть *CK* - высота данного прямоугольного треугольника. Тогда *MK* - наклонная к плоскости треугольника *ABC*, а *CK* - ортогональная проекция этой наклонной на плоскость треугольника *ABC*. Так как $CK \perp AB$, то по теореме о трех перпендикулярах $MK \perp AB$. Значит, длина отрезка *MK* равна расстоянию от точки *M* до прямой *AB*. Из прямоугольного треугольника *MCK* по теореме Пифагора находим, что

$MK = \sqrt{CK^2 + CM^2} = \sqrt{9.6^2 + 28^2} = 29.6.$

Ответ: расстояние от точки M до гипотенузы AB равно 29.6.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.2. Прямые и плоскости в пространстве

Практическое занятие № 41

«Решение задач на параллельность плоскостей»

Цель работы: Научиться использовать признак параллельности плоскостей и свойства параллельных плоскостей при решении задач.

Выполнение работы способствует формированию:
ПРб1_ОУП.03, ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб7_ОУП.03, ПРб_ОУП.03, ПРб_ОУП.03.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
m- количество букв в имени
n- количество букв в фамилии
p- месяц рождения

Задача № 1

Между двумя параллельными плоскостями заключен отрезок, длиной $m+n$ см. Найдите проекции этого отрезка на каждую плоскость, если расстояние между плоскостями равно p см.

Задача № 2

Плоскости М и Р параллельны. Из точек А и В плоскости М проведены к плоскости Р наклонные $AC = m+n$ см и $BD = m+n-3$ см. Проекция наклонной АС на одну из плоскостей равна m см. Чему равна проекция наклонной BD?

Задача №3

Между двумя параллельными плоскостями Р и Q проведены отрезки АС и BD (точки А и В лежат в плоскости Р), $AC = m+n+p$ дм, $BD = m+n$ дм , разность проекций АС и BD на одну из плоскостей равна m дм . Найдите длины этих проекций и расстояние между плоскостями.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно прочитайте условие задачи.
2. Запишите, что в задаче дано, сделайте рисунок.
3. Проанализируйте условие задачи, рассуждая от того, что нужно найти. Вспомните, какие теоремы и формулы понадобятся при решении задачи.
4. Решите задачу. Запишите ответ.

При решении задач на эту тему используется определение параллельных плоскостей, признак параллельности плоскостей, теоремы о параллельных плоскостях, а также ваши знания из планиметрии

Задача № 1

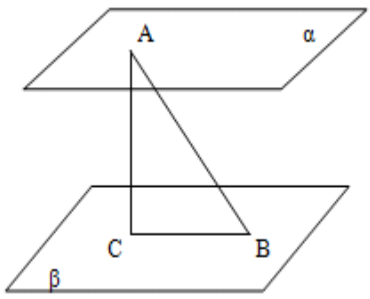
Между двумя параллельными плоскостями заключен отрезок, длиной 10 м. Найдите проекции этого отрезка на каждую плоскость, если расстояние между плоскостями равно 8 м.

Дано:

$\alpha // \beta, AB = 10$ см

$AC \perp \beta, AC = 8$ см

Найти проекции АС



Решение

1) Так как плоскости параллельны, то расстояние между ними - это перпендикуляр АС. Построим проекцию отрезка АВ на плоскость β. Это отрезок ВС.

2) Рассмотрим треугольник АВС- прямоугольный.

По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AC^2 = AB^2 - BC^2$

$AC^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$

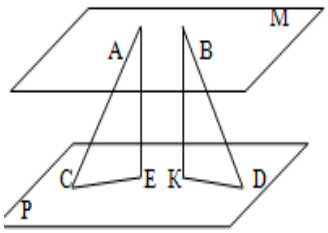
АС=6 см.

Так как плоскости параллельны, то проекции отрезка на эти плоскости будут равны.

Задача № 2

Плоскости М и Р параллельны. Из точек А и В плоскости М проведены к плоскости Р наклонные АС= 37см и BD=125 см. Проекция наклонной АС на одну из плоскостей равна 12 см.

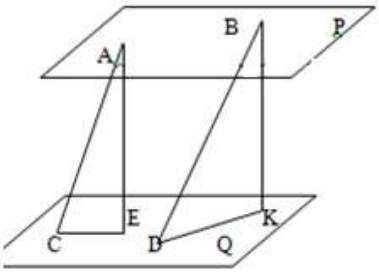
Чему равна проекция наклонной BD?



Дано: $M \parallel P, A \in M, B \in M$
$AC = 37$ см, $BD = 125$ см
$AE \perp P, BK \perp P, CE = 12$ см
Найти: KD

Решение
1) Рассмотрим треугольник ACE- прямоугольный.
По теореме Пифагора $AC^2 = AE^2 + CE^2$
$AE^2 = AC^2 - CE^2$ $AE^2 = 37^2 - 12^2 = 1369 - 144 = 1225$
AE=35 см.
2) Рассмотрим треугольник BKD- прямоугольный.
По теореме Пифагора $BD^2 = KD^2 + BK^2$
$KD^2 = BD^2 - BK^2$ AE=BK, как расстояния между параллельными плоскостями.
$KD^2 = 125^2 - 35^2 = 15625 - 1225 = 14400$
KD= 120 см.
Ответ: проекция BD равна 120 см.

Задача №3
Между двумя параллельными плоскостями P и Q проведены отрезки AC и BD (точки A и B лежат в плоскости P), AC=13 см, BD=15 см, сумма проекций AC и BD на одну из плоскостей равна 14 см . Найдите длины этих проекций и расстояние между плоскостями.



Дано: $Q \parallel P, A \in P, B \in P$
$AC = 13$ см, $BD = 15$ см
$AE \perp Q, BK \perp Q, CE + DK = 14$ см
Найти: CE, AE, DK

Решение
1) Рассмотрим треугольник ACE- прямоугольный.
По теореме Пифагора $AC^2 = AE^2 + CE^2$
$AE^2 = AC^2 - CE^2$
Пусть CE = x, тогда DK=14-*x*.
$AE^2 = 169 - x^2$
2) Рассмотрим треугольник BDK- прямоугольный.
По теореме Пифагора $BD^2 = BK^2 + DK^2$
$BK^2 = BD^2 - DK^2$
$BK^2 = 225 - (14 - x)^2 = 225 - 196 + 28x - x^2 = 29 + 28x - x^2$
AE=BK, как расстояния между параллельными плоскостями

Значит,
$169 - x^2 = 29 + 28x - x^2$
$28x = 140$
$x=5$
CE=5 см, DK=14-5=9 см
$AE = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ см
Ответ: расстояние между плоскостями 12 см, проекции наклонных 5 см и 9 см.

Форма представления результата: выполненное задание**.**

Критерии оценки:
Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи, вычисления, рисунки и графики.
Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.
Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.
Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.2. Прямые и плоскости в пространстве

Практическое занятие № 42

«Решение задач на двугранные углы»

Цель работы: Научиться решать задачи на применение понятий угла между прямой и плоскостью, двугранного угла, угла между плоскостями.

Выполнение работы способствует формированию:
ПРб1_ОУП.03, ПРб2 _ОУП.03, ПРб3 _ОУП.03, ПРб7_ОУП.03, ПРб9_ОУП.03, ПРб13_ОУП.03.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
m- количество букв в имени
n- количество букв в фамилии
p- месяц рождения
1) Из точки A вне плоскости проведены к плоскости перпендикуляр $AB = n$ см и наклонные AC и AM, образующие с плоскостью углы 30^0. Найдите угол между наклонными прямой. Найдите CM.
2) Катеты прямоугольного треугольника равны n см и $n + m$ см. Определите расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол 30^0 с плоскостью треугольника.
3) Точки A и B лежат на ребре прямого двугранного угла. AA_1 и BB_1- перпендикуляры к ребру, проведенные в разных гранях, причем $AB = m$ см, $AA_1 = n + m$ см, $BB_1 = n - 1$ см. Найдите A_1B_1.

Порядок выполнения работы

1. Внимательно прочитайте условие задачи.

2. Запишите, что в задаче дано, сделайте рисунок.

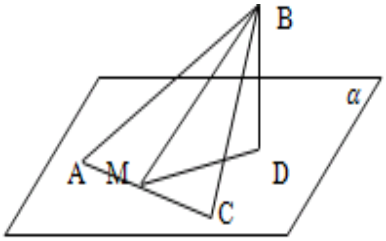
3. Проанализируйте условие задачи, рассуждая от того, что нужно найти. Вспомните, какие теоремы и формулы понадобятся при решении задачи.

4. Решите задачу. Запишите ответ.

При решении задач на эту тему используются определения угла между прямой и плоскостью, двугранного угла, линейного угла двугранного угла, а также ваши знания из планиметрии.

Задача 1

Дан треугольник АВС со сторонами АВ=9 см, ВС= 6 см и АС= 5 см. Через меньшую сторону проходит плоскость, составляющая с плоскостью треугольника угол 45^0. Найдите расстояние между плоскостью и вершиной В.



Дано: $\Delta ABC, AB = 9$ см
$BC = 6$ см, $AC = 5$ см
$AC \in \alpha, \alpha = 45°$

Найти: Расстояние от В до α

Решение

1) Дополнительное построение: проведем $BD \perp \alpha \Longrightarrow BD -$ расстояние от В до плоскости α.
$BM \perp AC \Longrightarrow \quad DM \perp AC$ по теореме о трех перпендикулярах.
Значит, $\angle BMD -$ линейный угол двугранного угла, $\angle BMD = 45^0$.

2) В треугольнике АВС найдем высоту ВМ.

Сначала вычислим площадь треугольника по формуле Герона:

$$S_{\triangle} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

$p = \frac{9+6+5}{2} = 10$ см

$S_{ABC} = \sqrt{10 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5} = 10\sqrt{2}$см^2

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BM \Longrightarrow BM = \frac{2S_{ABC}}{AC}$

$BM = \frac{2 \cdot 10\sqrt{2}}{5} = 4\sqrt{2}$см

3) Рассмотрим треугольник BMD- прямоугольный по построению.

$\frac{BD}{BM} = sin\angle BMD$

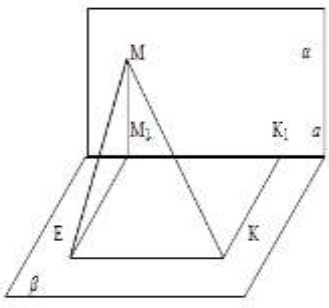
$BD = BMsin\angle BMD$

$BD = 4\sqrt{2} \cdot sin45^0 = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$ см.

Ответ: расстояние от В до плоскости 4 см.

Задача 2

Концы отрезка МК лежат на гранях прямого двугранного угла. MM_1 и KK_1- перпендикуляры к ребру, причем МК=13 см, MM_1=12 см, M_1K_1=3 см. Найдите KK_1.



Дано: $< \alpha a \beta = 90°$
$MK = 13$ см, $MM_1 = 12$ см, $M_1K_1 = 3$ см
$MM_1 \perp a, KK_1 \perp a$

Найти: KK_1

Решение

1) Построим линейный угол двугранного угла. Для этого через точку M_1 проведем отрезок M_1E, параллельный и равный $КК_1$.

$KK_1 \perp$ а, следовательно, $M_1E \perp$ а.

$< MM_1E -$ линейный угол двугранного угла, значит $< MM_1E = 90^0$.

2) Рассмотрим ΔMEK

МЕ- наклонная к плоскости β, EM_1 – ее проекция на эту плоскость, $EM_1 \perp EK$ (т.к. EM_1K_1K – прямоугольник по построению). Следовательно, $ME \perp EK$ (по теореме о трех перпендикулярах) и $\Delta MEK -$ прямоугольный.

По теореме Пифагора $MK^2 = ME^2 + EK^2$

$ME^2 = MK^2 - EK^2$ $EK=M_1K_1=3$ см

$ME^2 = 13^2 - 3^2 = 169 - 9 = 160$

$ME = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ см

3) Рассмотрим $\Delta MM_1K -$ прямоугольный, т. к. $< MM_1E = 90^0$.

По теореме Пифагора $ME^2 = {MM_1}^2 + {M_1E}^2$

${M_1E}^2 = ME^2 - {MM_1}^2$

${M_1E}^2 = 160 - 144 = 16$

$M_1E= 4$ см.

Значит, $КК_1=4$ см.

Ответ: $КК_1=4$ см.

Форма представления результата: выполненное задание**.**

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи, вычисления, рисунки и графики.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

Практическое занятие № 43

«Решение задач на параллелепипед и куб»

Цель работы: Научиться решать задачи с параллелепипедом и кубом

Выполнение работы способствует формированию:

ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб4_ОУП.03, ПРб5_ОУП.03, ПРб11_ОУП.03, ПРб12_ОУП.03, ПРб14_ОУП.03.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1.Ребро куба равно 6 см. Найти его объем и площадь полной поверхности.

2. В прямоугольном параллелепипеде диагональ основания 12 см, а боковое ребро 15 см. Найти площадь диагонального сечения.

3. Требуется изготовить бак, имеющий форму куба и вмещающий 125000 л воды. Сколько квадратных метров оцинкованного железа пойдет на изготовление бака, если производственные отходы составляют 10%? Проведите вычисления с точностью до 0,1 $м^2$.

4. Требуется покрасить 120 урн, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда без крышки; длина, ширина основания и высота соответственно равны 40, 30 и 50 см. Сколько будет израсходовано краски, если на 1 $м^2$ расходуется 200 г, а производственные потери краски составляют 15%

5. Под погреб нужно вырыть котлован, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда. Глубина котлована 3 м, стороны основания 3 и 2 м. Сколько кубометров земли нужно извлечь на поверхность?

6. Требуется изготовить железный куб массой 7 кг 800 г. Найдите длину его ребра, если $\rho = 7800_{кг/м^3}$.

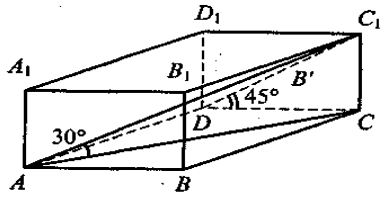
Порядок выполнения работы:

1)Выполнить чертеж

2)Записать кратко условие задачи

3) Оформить решение задачи

Задача 1: Угол между диагональю AC, прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, и плоскостью основания ABCD равен 30°, а диагональ боковой грани DC, наклонена к плоскости основания под углом 45°. Высота параллелепипеда равна 3 см. Найдите его объем.



$$\angle C_1DC = \angle DC_1C = 45° \Rightarrow DC = CC_1 = 3$$

$$AC_1 = 2CC_1 = 6$$

$$AC = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$$

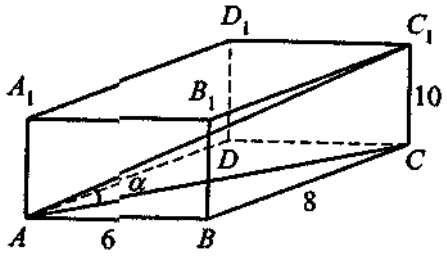
$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{27 - 9} = 3\sqrt{2}$$

$$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = AB \cdot BC \cdot CC_1 = 3 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3 = 27\sqrt{2}$$

Ответ: $27\sqrt{2}$ $см^3$.

Задача 2: Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 6 ми 8 м, боковое ребро равно 10 м. Найдите угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью его основания.

Решение:



$AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$AC = CC_1 \Rightarrow \Delta ACC_1$ равнобедренный, а значит $\alpha = 45°$.

Ответ: 45°.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

Практическое занятие № 44

«Решение задач на призму»

Цель работы: Научиться решать задачи с призмой

Выполнение работы способствует формированию:

ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб4_ОУП.03, ПРб5_ОУП.03, ПРб11_ОУП.03, ПРб12_ОУП.03, ПРб14_ОУП.03.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

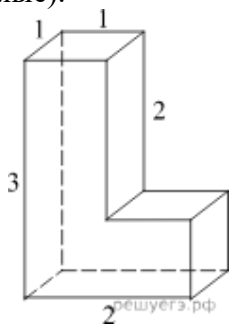
1.Основание прямой призмы - треугольник, стороны которого равны 4 м, боковое ребро призмы равно 8 м. Найдите площадь полной поверхности призмы.

2.Основание прямой призмы – параллелограмм со сторонами 4 см и 6 см и углом между ними 60^0. Высота призмы 12 см. Найти полную поверхность и объем.

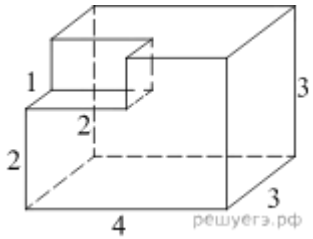
3. Стальная заготовка сляб имеет форму прямой призмы, в основании которой лежит прямоугольник. Высота сляба 0,35 м, ширина 2,5 м и длина 4,8 м. Найдите массу сляба, если плотность

стали равна 7,85 г/см^3.

4. Найдите площадь поверхности рабочей детали, изображенной на рисунке (все двугранные углы прямые).



5. Найдите объем рабочей детали, изображенной на рисунке (все двугранные углы прямые).



6. Требуется установить резервуар для воды емкостью 15 м3 на площадке размером 4,5 м х 3,75 м, служащей для него дном. Найдите высоту резервуара.

Порядок выполнения работы:

1) Выполнить чертеж
2) Записать кратко условие задачи
3) Оформить решение задачи

Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех ее граней, а **площадью боковой поверхности** призмы – сумма площадей ее боковых граней.

$S_{пол} = 2S_{осн} + S_{бок}$

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

$S_{бок} = P \cdot h$

Объём прямой призмы равен произведению площади основания на высоту.

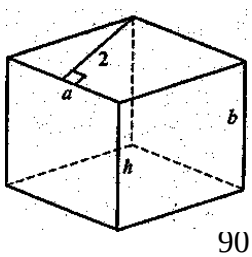
$V = S_{осн} \cdot h$

Задача 1: Основание прямой призмы - ромб с высотой 2 дм. Площадь боковой поверхности призмы равна 96 дм^2, а площадь полной поверхности равна 128 дм^2. Найдите высоту призмы.

Решение

Обозначим сторону основания *a,* а боковое ребро bРазницу между площадью полной поверхности призмы и площадью боковой поверхности призмы — это удвоенная

площадь основания призмы.



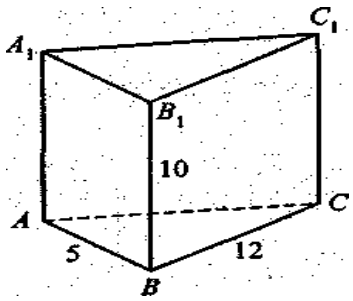
$$S_{\text{осн}} = 2a \Rightarrow 2a = 128 - 96 = 32 \Rightarrow a = 16$$

$$S_{\text{бок}} = 4ah = 96 \Rightarrow h = \frac{24}{a} = 1{,}5 \text{ (дм)}$$

Ответ: 1,5 дм.

Задача 2: Основание прямой призмы - прямоугольный треугольник, катеты которого равны 5 м и 12 м, боковое ребро призмы равно 10 м. Найдите площадь полной поверхности призмы.

Решение



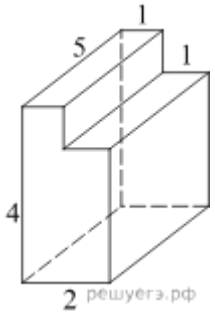
$$AC = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

$$S_{\text{полн}} = 2S_{\Delta ABC} + S_{AA_1B_1B} + S_{BB_1C_1C} + S_{AA_1C_1C}$$

S =2*0,5*5*12+5*10+12*10+13*10=60+300=360 м^2

Ответ: 360 м^2.

Задача 3. Найдите площадь поверхности рабочей детали, изображенной на рисунке (все двугранные углы прямые).



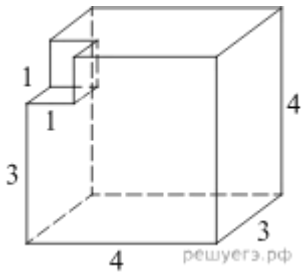
Решение: Площадь поверхности заданной детали -это площадь многогранника, равна разности площади поверхности прямоугольного параллелепипеда с ребрами 2, 4, 5 и двух площадей квадратов со стороной 1:

$$2 * 4 * 5 + 2 * 2 * 5 + 2 * 2 * 4 - 2 * 1 * 1 = 74$$

Ответ: 74.

Задача 4:

Найдите объем рабочей детали, изображенной на рисунке (все двугранные углы прямые).



Решение: Объем данной детали равен объему многогранника и равен разности объемов параллелепипедов с ребрами 3, 4, 4 и 1, 1, 1

$$V = V1 - V2 = 3 * 4 * 4 - 1 * 1 * 1 = 47$$

Ответ: 47

Задача 5:

Требуется установить резервуар для воды емкостью 10 м3 на площадке размером 2,5 м х 1,75 м, служащей для него дном. Найдите высоту резервуара.

Решение: Площадь дна$S = 2{,}5 * 1{,}75 = 4{,}375$кв. м. Так как $V = S * h$, то

$h = \frac{V}{S} = \frac{10}{4{,}375} = 2{,}29$ м.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

Практическое занятие № 45

«Решение задач на пирамиду»

Цель работы: Научиться решать задачи с пирамидой

Выполнение работы способствует формированию:

ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб4_ОУП.03, ПРб5_ОУП.03, ПРб11_ОУП.03, ПРб12_ОУП.03, ПРб14_ОУП.03.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1.Найдите объем правильной четырёхугольной пирамиды, высота которой 4 см, а диагональ

основания 8 см.

2. Необходимо по чертежу изготовить деталь, имеющую форму прямой пирамиды, в основании, которой лежит равнобедренный треугольник с основанием 5 см и боковыми сторонами 6 см. Боковые ребра пирамиды 12 см. Для расчета необходимого материала на изготовление найдите полную поверхность пирамиды.

3. Необходимо по чертежу изготовить деталь, имеющую форму правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 4,5 м, апофема 7,5 м. Для расчета необходимого материала на изготовление найдите полную поверхность пирамиды.

Порядок выполнения работы:

1)Выполнить чертеж

2)Записать кратко условие задачи

3) Оформить решение.

Площадь полной поверхности пирамиды: $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$

Объем пирамиды: $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

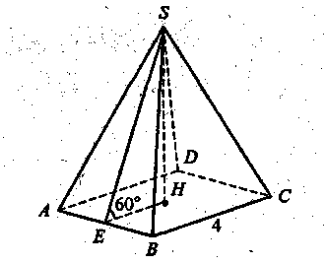
$$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot \ell$$

Площадь полной поверхности правильной пирамиды:

$$S_{полн} = S_{осн} + \frac{1}{2} P \cdot l$$

Задача 1: Необходимо по чертежу изготовить деталь, имеющую форму правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 4 см, а апофема образует с плоскостью основания угол в 60^0. Найдите площадь полной поверхности пирамиды для расчета необходимого материала на изготовление

Решение:



$$EH = \frac{1}{2} BC = 2$$

$$\angle ESH = 90° - 60° = 30° \Rightarrow SE = 2EH = 4$$

$$S_{полн} = 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} AB + AB^2 = 2 \cdot 4 \cdot 4 + 4^2 = 48 \text{ (см}^2\text{)}$$

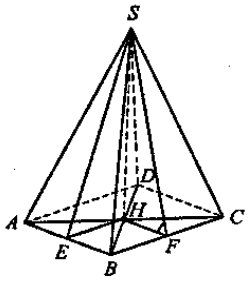
Ответ: 48 см².

Задача 2: Основание пирамиды —ромб, диагонали которого равны 30 см и 40 см. Высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, образуют с высотой пирамиды углы, равные 30^0. Найдите объем пирамиды.

Решение:

$AC = 40 \Rightarrow AH = HC = 20$

$BD = 30 \Rightarrow BH = HD = 15$



$AB = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$

$HE = \frac{1}{2}BC = 12{,}5$

$SE = 2HE = 25$

$SH = \sqrt{SE^2 - HE^2} =$

$= \sqrt{25^2 - \frac{25^2}{4}} = 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$V_{пир} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 30 \cdot 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2500\sqrt{3}$ (см^3)

Ответ: $2500\sqrt{3}$ см^3.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

Практическое занятие № 46

«Решение задач на цилиндр, конус, шар и сферу»

Цель работы: Научиться решать задачи с цилиндром, конусом, шаром и сферой

Выполнение работы способствует формированию:

ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб4_ОУП.03, ПРб5_ОУП.03, ПРб11_ОУП.03, ПРб12_ОУП.03, ПРб14_ОУП.03.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1.Объем цилиндра 120 см^2, его высота 3,6 см.

Найти радиус цилиндра.

2. Высота цилиндра 12см, радиус основания 10см. Цилиндр пересечен плоскостью так, что в

сечении получился квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси.

3. Необходимо по чертежу изготовить конус. Для расчета необходимого материала на изготовление найдите полную поверхность конуса, если образующая наклонена к плоскости основания под углом 30^0 и равна 12 см, а радиус основания 8 см.

4. Найти площадь осевого сечения конуса, если образующая равна 15 см, а радиус основания 4 см.

5.Расстояние от центра шара до секущей плоскости равно 8 м, а радиус сечения плоскостью равен 6 м. Найдите радиус шара и объем.

6. Необходимо по чертежу изготовить шар**,** объём которого 125П $м^3$. Для расчета необходимого материала найдете площадь сферы.

Порядок выполнения работы:

1)Выполнить чертеж

2)Записать кратко условие задачи

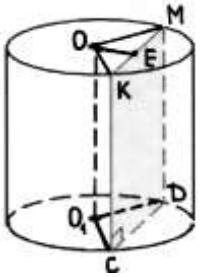
Задача 1. Осевое сечение цилиндра − квадрат, площадь которого Q. Найдите площадь основания цилиндра.

Решение:

Сторона квадрата равна$\sqrt{Q}$. Она равна диаметру основания. Поэтому площадь основания равна $\pi\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2 = \frac{\pi Q}{4}$.

Ответ: $S_{осн.цил.} = \frac{\pi Q}{4}$

Задача 2. Высота цилиндра 6см, радиус основания 5см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4см от нее.



Решение:

$S_{сеч.}$= КМ×КС,

ОЕ = 4 см, КС = 6 см.

Треугольник ОКМ − равнобедренный (ОК = ОМ = R = 5 см),

треугольник ОЕК − прямоугольный.

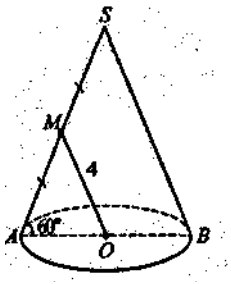
Из треугольника ОЕК, по теореме Пифагора:

ЕК = $\sqrt{OK^2 - OE^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$,

КМ = 2ЕК = 2×3 = 6,

$S_{сеч.}= 6\times6 = 36$ см^2.
Ответ: $S_{сеч.}= 36$ см^2.

Задача 4: Необходимо по чертежу изготовить конус. Расстояние от центра основания конуса до середины образующей равно 4 см, а угол наклона образующей конуса к плоскости основания равен 60^0. Для изготовления конуса найдите площадь осевого сечения конуса.

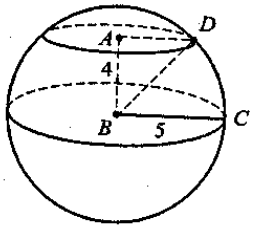


$$S_{\Delta ASB} = \frac{1}{2}\cdot AS\cdot AB\cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}\ (\text{см}^2)$$

Ответ: $16\sqrt{3}$ см^2.

Задача 5: Площадь сферы равна 100 м^2. Расстояние от центра сферы до секущей плоскости равно 4 м. Найдите радиус сечения.

Решение:



$$S_{сф} = 4\pi R^2 = 100\pi \Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow R = 5$$

$$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\ (\text{м})$$

Ответ: 3 м.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

Практическое занятие № 47

«Решение задач на вычисление объёмов и поверхностей круглых тел»

Цель работы: Научиться решать задачи на вычисление объёмов и поверхностей круглых тел

Выполнение работы способствует формированию:
ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб4_ОУП.03, ПРб5_ОУП.03, ПРб7_ОУП.03, ПРб11_ОУП.03, ПРб12_ОУП.03, ПРб13_ОУП.03, ПРб14_ОУП.03.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
1. Полуцилиндрический свод подвала имеет 6 м длины и 5,8 м в диаметре. Определите площадь полной поверхности подвала.

2. Моток медной проволоки длиной 150 м имеет массу 604 г. Найдите диаметр проволоки, если $\rho = 8900_{\text{кг/м}^3}$.

3. Куча щебня имеет форму конуса, образующая которого равна 5 м, а радиус основания 4 м. Сколько рейсов должен совершить 3-тонный грузовик, чтобы перевезти кучу щебня? Плотность щебня 2200 кг/м^3.

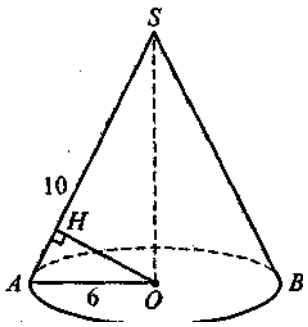
4. Внешний диаметр полого чугунного шара 20 см, а внутренний – 16 см. Плотность чугуна 7300 кг/м^3. Найдите массу шара (вычислите с точностью до 0,01 кг).

5. Три металлических шара с радиусами 10, 8 и 6 см переплавлены в один шар. Найдите радиус этого шара (угар не учитывается).

Порядок выполнения работы:
1)Выполнить чертеж
2)Записать кратко условие задачи

Задача 1: Необходимо по чертежу изготовить конус, площадь боковой поверхности которого равна 60 дм^2, а радиус основания равен 6 м. Для изготовления конуса необходимо найти расстояние от центра основания до образующей конуса.

Решение:



$$S_{бок} = \pi rl = 60\pi \Rightarrow rl = 60$$

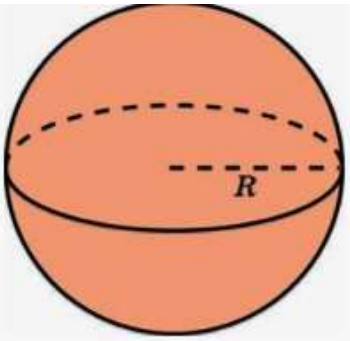
$$r = 6 \Rightarrow l = \frac{60}{r} = 10.$$

$$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

$$S_{\Delta ASO} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OS = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$$

С другой стороны, $S_{\Delta ASO} = \frac{1}{2} OH \cdot AS = 5OH = 24 \Rightarrow OH = \frac{24}{5}$

Задача 2: Необходимо по чертежу изготовить шар, площадь поверхности которого равна 225 см^2. Для изготовления шара вычислите его объем.



$$S_{пов} = 4 \cdot \pi \cdot R^2$$

$$R^2 = \frac{S_{пов}}{4 \cdot \pi}$$

$$R = \sqrt{\frac{S_{пов}}{4 \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{225}{4\pi}} = \frac{15}{2\sqrt{\pi}}$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{15}{2\sqrt{\pi}}\right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{3375}{8\pi\sqrt{\pi}} = \frac{1125}{2\sqrt{\pi}} (\text{см}^3)$$

Ответ: $V = \frac{1125}{2\sqrt{\pi}} \text{см}^3$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

Практическое занятие № 48

«Использование комбинаций многогранников и тел вращения в практико-ориентировочных задачах»

Цель работы: Научиться решать задачи на комбинацию геометрических тел

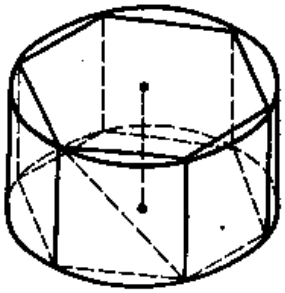
Выполнение работы способствует формированию:
ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб4_ОУП.03, ПРб5_ОУП.03, ПРб7_ОУП.03, ПРб11_ОУП.03, ПРб12_ОУП.03, ПРб13_ОУП.03, ПРб14_ОУП.03.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
1. Для изготовления детали по чертежу, в котором в цилиндр наклонно вписан квадрат так, что все его вершины лежат на окружностях основания необходимо найти сторону квадрата, если высота цилиндра равна 2см, а радиус основания равен 7см.

Порядок выполнения работы:
1)Выполнить чертеж
2)Записать кратко условие задачи

Задача. Для изготовления детали по чертежу, в котором в цилиндр вписана правильная шестиугольная призма необходимо найти отношения объема призмы к объему цилиндра.



Решение:

$$\frac{V_{призм}}{V_{цил.}} = \frac{S_{осн.} \times h}{\pi R^2 \times h} = \frac{S_{осн.}}{\pi R^2}$$

$a_6 = R$

$$S_{осн.} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{V_{призм}}{V_{цил.}} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

Ответ: $\frac{V_{призм}}{V_{цил.}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 5.1. Элементы комбинаторики

Практическое занятие № 49

«Решение комбинаторных задач. Размещения, сочетания и перестановки»

Цель работы: Научиться отличать сочетания от размещений, применять формулы для вычисления всех выборок без повторений.

Выполнение работы способствует формированию:

ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб8_ОУП.03, ПРб10_ОУП.03.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Станок оснащен 10 индикаторами, Сколько вариантов одновременного загорания трех индикаторов.
2. Из бригады рабочих 12 человек, необходимо выбрать 3 человека для работы на станке. Сколько существует различных способов такого выбора.
3. В цехе имеется 8 станков для различной обработки деталей. Сколько способов имеется для расстановки рабочих на станки в разном порядке?

Порядок выполнения работы

1. Определите вид выборки без повторения.
2. Выберете соответствующую формулу для вычисления возможных комбинаций.
3. Произведите вычисления, используя понятие факториала.

1.Индикаторы на пульте загораются последовательным набором четырёх разных лампочек, пронумерованными цифрами. Требуется определить число возможных вариантов загорания лампочек.

Решение.

Возможных цифр (нумерация лампочек) всего десять(1,2,3,4,5,6,7,8,9,0).Каждая набранная комбинация отличается от другой комбинации хотя бы одной цифрой(1,4,5,7 ≠2,4,5,7),либо порядком набора одинаковых цифр(1,4,5,7≠4,5,7,1),поэтому для подсчёта числа возможных комбинаций используем формулу числа размещений.

Формула размещений имеет вид:$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$. В нашем случае $n = 4, m = 10$.

Производим расчёт $A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

2.Сколько существует способов выбора трёх рабочих из десяти для проведения работ?

Решение.

В данном случае при выборе для нас важен только состав по три человека, порядок выбора роли не играет, поэтому в отличие от первого примера число способов подсчитаем по формуле сочетаний.

Формула сочетаний имеет вид6$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. В нашем случае n=10, m=3.

Производим расчёт: $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = 120$.

3.Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр1,2,3.4 9 цифры не повторяются)?

Решение.

По условию дано множество из четырёх элементов, которые требуется расположить в определённом порядке. Значит, требуется найти количество перестановок их четырёх элементов.

Формула перестановок из п –элементов имеет вид:$P_n = n!$ В нашем случае n =4.

Произведём расчёт: $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 5.2 Элементы теории вероятностей и математической статистики

Практическое занятие № 50

«Классическое определение вероятности, свойства вероятностей, теорема о сумме вероятностей. Вероятность в задачах технологического профиля»

Цель работы: научиться находить вероятности событий, используя классическое определение вероятности

Выполнение работы способствует формированию:

ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб4_ОУП.03, ПРб_ОУП.03, ПРб8_ОУП.03, ПРб10_ОУП.03, ПРб12_ОУП.03.

Задание:

1. Для проверки качество изготовленных деталей их пронумеровали от 1 до 10. Наудачу выбрана деталь. Какова вероятность того, что это она имеет простой номер?

2. Для проверки качества изготовленных деталей приготовили 300 шт. Чему равна

вероятность того, что наугад взятая деталь для проверки будет иметь номер, кратный 5?

3. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее- получить в сумме 7или8?

Порядок выполнения работы

1. Определите событие А, вероятность которого нужно вычислить.
2. Просчитайте общее число(n) возможных исходов.
3. Просчитайте число исходов(m), благоприятствующих наступлению события A.
4. Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события. $P(A) = \frac{m}{n}$.

1. На складе 10 одинаковых по размеру и весу деталей, из которых 6 оцинкованных и 4 обычных. Выбирается одна деталь. Какова вероятность того, что извлечённая деталь окажется оцинкованной?

Решение.

1. Событие А-«Извлечённая деталь оказалась оцинкованной».
2. число n=10
3. число m=6
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = 0{,}6$

2. Все детали, отобранные для проверки качества, пронумерованы от 1 до 30 и помещены в ящик. Извлекается одна деталь. Какова вероятность того, что число на взятой детали окажется кратным 5?

Решение.

1. Событие А-«На взятой детали число кратное 5».
2. число n=30
3. число m=6(числа 5,10,15,20,25,30)
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{30} = 0{,}2$.

3. Из букв слова *дифференциал* наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что эта буква будет: а) гласной, б) согласной, в) букв Событие А-«На взятой карточке число . кратное 5».

Решение.

1. Событие А-«Наугад выбранная буква будет гласной».
2. число n=12(-число букв в слове)
3. число m=5(буквы :*и,е,е,и,а*)
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{12} \approx 0{,}417$
5. число m=7(буквы :*д,ф,ф,р,н,ц,л*)
6. Событие В-«Наугад выбранная буква будет согласной».
7. число n=12(-число букв в слове)
8. $P(\text{В}) = \frac{m}{n} = \frac{7}{12} \approx 0{,}583$
9. Событие С-«Наугад выбранная буква будет буквой *ч*».
10. число n=12(-число букв в слове)
11. число m=0(такой буквы нет в данном слове)
12. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{12} = 0$.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все

записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 5.2 Элементы теории вероятностей и математической статистики

Практическое занятие № 51

«Представление данных. Задачи математической статистики технологического профиля»

Цель работы: научиться решать задачи математической статистики

Выполнение работы способствует формированию:

ПРб2_ОУП.03, ПРб3_ОУП.03, ПРб_ОУП.03, ПРб_ОУП.03, ПРб7_ОУП.03, ПРб8_ОУП.03, ПРб10_ОУП.03, ПРб12_ОУП.03, ПРб13_ОУП.03.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1**.** Построить полигоны частот и относительных частот по распределению выборки из отобранных деталей для проверки качества:

x_i	2	4	7	8	9	12
n_i	p_1^2	$2p_2$	p_2	p_2^2	p_3	$3p_3$

.

2. Постройте гистограммы частот и относительных частот по распределению выборки из отобранных деталей для проверки качества:

№ интервала	Интервал, $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала, n_i
1	3 – 5	p_1
2	5 – 7	$2p_2$
3	7 – 9	$3p_3$
4	9 – 11	p_1^2
5	11 – 13	$2p_2^2$
6	13 – 15	$3p_3^2$
7	15 – 17	p_1+p_2

3. Для генеральной совокупности, заданной распределением:

x_i	5	10	15	20	25	30	35
N_i	p_1	$3p_1$	p_2	$2p_2$	p_2^2	$2p_3$	$2p_3^2$

.

Найдите генеральную среднюю, генеральную дисперсию, генеральное стандартное отклонение, моду, медиану и размах.

4. Из генеральной совокупности сделана выборка, заданная распределением:

x_i	2	4	6	8	10	12	14
n_i	p_2	$2p_2$	p_1	p_1^2	p_3	$2p_3$	p_2+p_3

Найти выборочную среднюю выборочные дисперсию и стандартное отклонение. Обратите внимание: $p_1=$ числу букв в Вашем имени; $p_2=$ числу букв в Вашей фамилии; $p_3=$ числу букв в имени Вашего отца.

Порядок выполнения работы:

1 Прочитав условие предложенной задачи , по конспекту лекции найдите соответствующие формулы.

2.Примените лекционный теоретический материал для решения каждой задачи.

3 В случае необходимости представить геометрическую интерпретацию числовых характеристик. выборки.

1. Задано распределение частот выборки из отобранных деталей для проверки качества:

x_i	2	6	12	15
n_i	3	10	7	5

Составить распределение относительных частот.

Определим сначала объем выборки:

$$n = 3 + 10 + 7 + 5 = 25.$$

Найдем относительные частоты по формуле $w_i = \frac{n_i}{n}$:

$$w_1 = \frac{3}{25} = 0{,}12\ ;\ w_2 = \frac{10}{25} = 0{,}40\ ;\ w_3 = \frac{7}{25} = 0{,}28\ ;\ w_4 = \frac{5}{25} = 0{,}20\ .$$

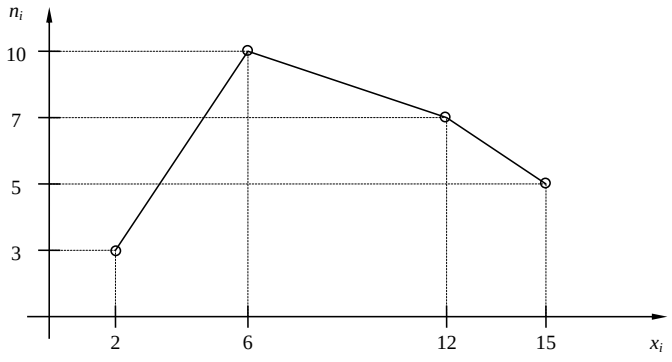
Следовательно,

x_i	2	6	12	15
w_i	0,12	0,40	0,28	0,20

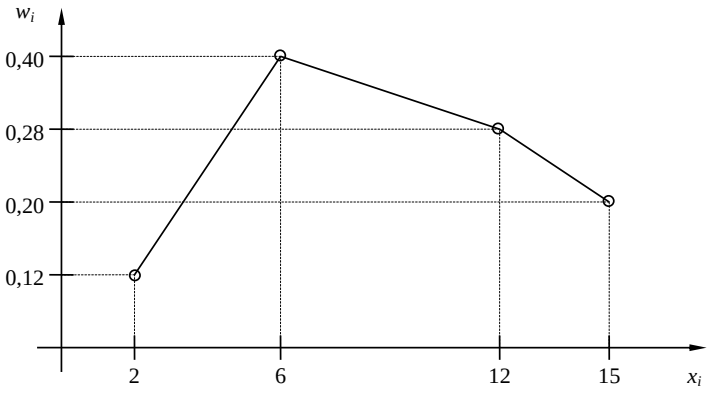
Контроль: $0{,}12+0{,}40+0{,}28+0{,}20=1$.

2. По результатам примера 1 построить полигоны частот и относительных частот.

Решение. Отобразив на плоскости точки с координатами (x_i, n_i) и соединив их отрезками, получим полигон частот:



Аналогично построим полигон по точкам (x_i, w_i):



3.Постройте гистограмму по следующему статистическому распределению:

№ интервала	Интервал длиной h=5	Сумма частот вариант n_i
1	5 – 10	4
2	10 – 15	6
3	15 – 20	16
4	20 – 25	36
5	25 – 30	24
6	30 – 35	10
7	35 – 40	4

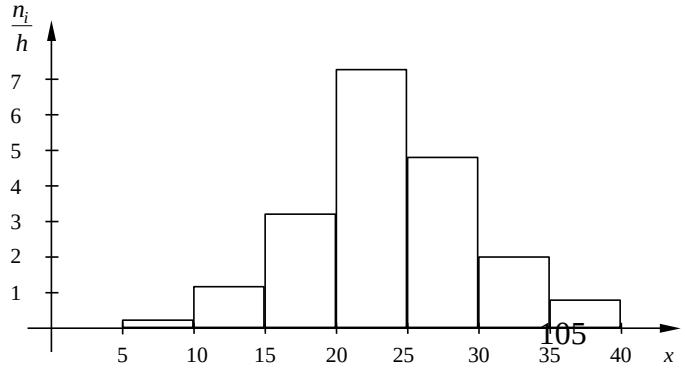
Решение. Прежде всего, определим объем выборки:

$$n = 4 + 6 + 16 + 36 + 24 + 10 + 4 = 100.$$

По известным суммам частот вариант рассчитаем плотность частоты по интервалам:

№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$		№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$
1	0,2		5	4,8
2	1,2		6	2,0
3	3,2		7	0,8
4	7,2			

Изобразим полученный результат:



4. Найдите статистические оценки генеральной совокупности, заданной следующим вариационным рядом:

варианта x_i	2	4	5	6
частота N_i	8	9	10	3

Решение. Определим объем совокупности:

$$N_\Gamma = 8+9+10+3 = 30.$$

Найдем генеральную среднюю:

$$\overline{X}_\Gamma = \frac{8\cdot 2+9\cdot 4+10\cdot 5+3\cdot 6}{30} = 4.$$

Для вычисления генеральной дисперсии используем формулу $D_\Gamma = \overline{X^2_\Gamma} - (\overline{X}_\Gamma)^2$. Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X^2_\Gamma} = \frac{8\cdot 2^2+9\cdot 4^2+10\cdot 5^2+3\cdot 6^2}{30} = 17{,}8.$$

Таким образом, $D_\Gamma = 17{,}8 - 4^2 = 1{,}8$.

Генеральное стандартное отклонение: $\sigma_\Gamma = \sqrt{D_\Gamma} = \sqrt{1{,}8} \cong 1{,}34$.

Обычно полученных результатов достаточно для практических задач. Однако можно получить дополнительные характеристики для более тонкой оценки генеральной совокупности. Приведем их:

Мода Mo : наибольшая частота

$$Mo = 10.$$

Медиана Me: вариационный ряд делится пополам в точке

$$Me = 4{,}5.$$

Размах вариации R: в примере

$x_{\max} = 6; x_{\min} = 2$,

поэтому

$$R = 6 - 2 = 4.$$

5. Из генеральной совокупности извлечена выборка

x_i	1	2	3	4	5
n_i	92	94	103	105	106

.

Найдите статистические характеристики выборки.

Решение. Определим объем выборки:

$$n = 92+94+103+105+106 = 500.$$

Выборочная средняя:

$$\overline{X}_B = \frac{92\cdot 1+94\cdot 2+103\cdot 3+105\cdot 4+106\cdot 5}{500} = 1{,}82.$$

Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X^2_B} = \frac{92\cdot 1^2+94\cdot 2^2+103\cdot 3^2+105\cdot 4^2+106\cdot 5^2}{500} = 11{,}45.$$

Выборочная дисперсия:

$$D_B = \overline{X_B^2} - \left(\overline{X}_B\right)^2 = 11{,}45 - 1{,}82^2 \cong 8{,}14.$$

Выборочное стандартное отклонение:

$$\sigma_B = \sqrt{8{,}14} \cong 2{,}85.$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.