

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Многопрофильный колледж

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**ОП.08 МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ
для обучающихся специальности
15.02.16 Технология машиностроения**

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ	3
2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ	4
Практическое занятие №1. Операции над матрицами	4
Практическое занятие №2. Вычисление определителей	6
Практическое занятие №3 Нахождение обратной матрицы	8
Практическое занятие № 4 Решение системы линейных уравнений по правилу Крамера	10
Практическое занятие № 5 Решение системы линейных уравнений методом Гаусса	13
Практическое занятие № 6 Решение системы линейных уравнений матричным методом	15
Практическое занятие № 7 Решение системы линейных уравнений различными методами	18
Практическое занятие № 8 Действия с комплексными числами в алгебраической форме	18
Практическое занятие № 9 Действия над комплексными числами в тригонометрической форме	20
Практическое занятие № 10. Переход от одной формы комплексных чисел к другой	23
Практическое занятие № 11 Вычисление пределов функций.	26
Практическое занятие № 12 Вычисление пределов с помощью замечательных пределов, раскрытие неопределенностей.	28
Практическое занятие №13 Непрерывность функций, классификация точек разрыва. Асимптоты функции	30
Практическое занятие № 14 Вычисление производных элементарных функций. Правила дифференцирования	31
Практическое занятие №15. Дифференцирование сложных функций	33
Практическое занятие №16. Исследование функций на монотонность, экстремумы, выпуклость, вогнутость, перегиб	36
Практическое занятие №17. Исследование функций и построение графиков	37
Практическое занятие №18. Вычисление неопределенных интегралов.	41
Решение типовых заданий:	42
Практическое занятие №19. Вычисление определенных интегралов	43
Практическое занятие № 20. Применение определенного интеграла к решению физических задач. ..	45
Практическое занятие № 21. Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур и объемов тел вращения	46
Практическое занятие №22. Решение комбинаторных задач	48
Практическое занятие №23. Решение задач на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики	49
Практическое занятие №24. Выборка. Числовые характеристики выборки. Генеральная совокупность и выборочная совокупность. Определение статистических распределений	53

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки обучающихся составляют практические занятия.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование профессиональных практических умений (умений выполнять определенные действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности) или учебных практических умений (умений решать задачи по математике), необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика в профессиональной деятельности» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

- Уд 1. анализировать сложные функции и строить их графики;
- Уд 2. выполнять действия над комплексными числами;
- Уд 3. производить действия над матрицами и определителями;
- Уд 4. решать системы линейных уравнений различными методами;
- Уд 5. решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;
- Уд 6. применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- Уд 7. вычислять значения геометрических величин.

Содержание практических и лабораторных занятий ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального (-ых) модуля (-лей) программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению ***профессиональными компетенциями:***

ПК 1.5. Выполнять расчеты параметров механической обработки изготовления деталей машин, в том числе с применением систем автоматизированного проектирования

А также формированию общих компетенций:

ОК. 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

Практические занятия проводятся в рамках соответствующей темы, после освоения дидактических единиц, которые обеспечивают наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1. Матрицы и определители

Практическое занятие №1. Операции над матрицами

Цель: формирование умений выполнять операции над матрицами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уд 3. производить действия над матрицами и определителями;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план;

Уо 01.02 владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями), конспекты лекций.

Задание:

Задание:

1. Найти матрицу $C = A^2 + 3AB$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Выяснить, является матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ обратной к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.
3. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите: $A+B$; $2A$; AB ; BA .

Краткие теоретические сведения:

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел. Матрица записывается в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Действия над матрицами:

1. Сложение.

Операция сложения вводится только для матриц одинаковых размеров. При сложении матриц их соответствующие элементы складываются.

$$A + B = C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Умножение на число.

При умножении матрицы на число каждый ее элемент умножается на это число.

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} \dots & ka_{2n} \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. Умножение матриц.

Операция умножения матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Чтобы найти элемент матрицы, стоящий в i -той строке в k -том столбце, нужно вычислить сумму произведений элементов i -той строки первой матрицы на соответствующие элементы k -того столбца второй.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите задание.
2. Определите, какие действия, и по каким правилам необходимо выполнить. Прочитайте конспект.
3. Выполните действия. Проверьте правильность вычислений.

Ход работы:

1. Найти матрицу $C = A^2 + 3AB$, если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

а) Найдем A^2 , умножая матрицу саму на себя

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

б) Найдем матрицу $3A$, умножив все элементы матрицы A на 3.

$$3A = 3 \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

в) Найдем произведение $3AB$

$$3AB = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}$$

г) Найдем матрицу C , складывая соответствующие элементы

$$C = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 24 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}$$

2. Найдем произведение $A \cdot A^{-1}$ и $A^{-1} \cdot A$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

В соответствии с определением данные матрицы являются взаимнообратными.

3. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдите: $A+B$; $2A$; AB ; BA .

$$A + B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -8 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 11 \\ 16 & -16 & -4 \\ 14 & -14 & -8 \end{pmatrix};$$

$$c_{11} = -3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 0 = 3;$$

$$c_{12} = -3 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) + (-3) \cdot (-2) = -2;$$

$$c_{13} = -3 \cdot (-5) + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 = 11;$$

$$c_{21} = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 = 16;$$

$$c_{22} = 1 \cdot 0 + 5 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-2) = -16;$$

$$c_{23} = 1 \cdot (-5) + 5 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = -4;$$

$$c_{31} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 = 14;$$

$$c_{32} = 2 \cdot 0 + 4 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-2) = -14;$$

$$c_{33} = 2 \cdot (-5) + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = -8.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -18 & 2 \\ -11 & -10 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Форма представления результата: Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. $90 \div 100$ -отлично; $80 \div 89$ -хорошо; $70 \div 79$ -удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно.

Тема 1.1. Матрицы и определители

Практическое занятие №2. Вычисление определителей

Цель: формирование умений вычислять определители.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уд 3. производить действия над матрицами и определителями;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план;

Уо 01.02 владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -15 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \quad 4) \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Таблица вида $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & k \end{vmatrix}$ называется определителем второго порядка и вычисляется по формуле $\begin{vmatrix} a & b \\ c & k \end{vmatrix} = a \cdot k - b \cdot c$

Таблица вида $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ называется определителем третьего порядка и вычисляется двумя способами: методом разложения по первой строке и методом треугольника.

Метод треугольника

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + a_2 \cdot b_3 \cdot c_1 + a_3 \cdot b_1 \cdot c_2) - (a_3 \cdot b_2 \cdot c_1 + a_2 \cdot b_1 \cdot c_3 + a_1 \cdot b_3 \cdot c_2)$$

Метод разложения по первой строке

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Определители любого порядка обладают следующими свойствами:

1. Общий множитель в строке можно выносить за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 8 \end{vmatrix}$$

2. Если каждый элемент в какой-то строке определителя равен сумме двух слагаемых, то исходный определитель равен сумме двух определителей, в которых вместо этой строки стоят первые и вторые слагаемые соответственно, а остальные строки совпадают с исходным определителем.

$$\begin{vmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} & b_{13} + c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3. Если две строки определителя поменять местами, то определитель поменяет знак.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

4. Определитель с двумя равными строками равен нулю

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

5. Определитель с двумя пропорциональными строками равен нулю

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 \end{vmatrix} = 0$$

6. Определитель, содержащий нулевую строку, равен нулю

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

7. Определитель не изменится, если к какой-то его строке прибавить другую строку, умноженную на некоторое число

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Пусть задан определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$. Ко второй строке прибавим

третье значение определителя не изменится

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1+2 & 0+3 & -1+1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

8. Определитель верхней (нижней) треугольной матрицы равен произведению его диагональных элементов.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot (-1) = -10$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно.

Тема 1.1. Матрицы и определители

Практическое занятие №3 Нахождение обратной матрицы

Цель: формирование умений выполнять операции над матрицами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уд 3. производить действия над матрицами и определителями;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план;

Уо 01.02 владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

Найти значение функции $f(x) = 4x^2 - 5x + 2$. Если $x = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Найти значение функции $f(x) = -2x^2 + 3x - 6$. Если $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Найти матрицу, обратную данной

$$\text{А) } A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}; \text{ Б) } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}; \text{ В) } \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & 2 \\ 11 & 10 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Пусть дана квадратная матрица A n -го порядка.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы n -го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$ -го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i -й строки и j -го столбца.

Например, минором элемента a_{12} матрицы A третьего порядка будет:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}.$$

Каждая матрица n -го порядка имеет n^2 миноров $(n-1)$ -го порядка.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n -го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца $(i+j)$ – четное число, и отличается от минора знаком, когда $(i+j)$ – нечетное число.

Пример. Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Алгоритм вычисления обратной матрицы

1. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица A – вырожденная и обратной матрицы A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица A – невырожденная и обратная матрица существует.

2. Находим матрицу A^T , транспонированную к A .

3. Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы и составляем из них присоединенную матрицу A^* .

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$.

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы A^{-1} , исходя из ее определения $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Пример. Найти матрицу, обратную к данной: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

1. Определитель матрицы $|A| = 5 \neq 0$, т.е. матрица A – невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

2. Находим матрицу A^T , транспонированную к A : $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A^T и составляем из них присоединенную матрицу A^* :

$$A^T_{11}=(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1; \quad A^T_{12}=(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3; \quad A^T_{13}=(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2;$$

$$A^T_{21}=(-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-3; \quad A^T_{22}=(-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1; \quad A^T_{23}=(-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1;$$

$$A^T_{31}=(-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1; \quad A^T_{32}=(-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2; \quad A^T_{33}=(-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3,$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы по формулам $A^{-1}A = AA^{-1} = E$:

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{3}{5} \cdot 2 + \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot 1 & \frac{1}{5} \cdot (-1) + \frac{3}{5} \cdot 1 + \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot 1 & \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{3}{5} \cdot 1 + \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot 2 \\ \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 1 & \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot (-1) + \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 1 & \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 2 \\ \frac{1}{5} \cdot 1 + \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot 2 + \frac{3}{5} \cdot 1 & \frac{1}{5} \cdot (-1) + \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot 1 + \frac{3}{5} \cdot 1 & \frac{1}{5} \cdot 1 + \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot 1 + \frac{3}{5} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно.

Тема 1.2. Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 4 Решение системы линейных уравнений по правилу Крамера

Цель: формирование умений решать системы линейных уравнений по правилу Крамера.
Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уд 4. решать системы линейных уравнений различными методами;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план;

Уо 01.02 владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

Решить системы линейных уравнений с двумя неизвестными по правилу Крамера

$$a) \begin{cases} x + 2y = -2 \\ 3x - y = 8 \end{cases}; b) \begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ x - 5y = 4 \end{cases}; c) \begin{cases} 7x + 3y = 1 \\ 2x - 6y = -10 \end{cases}$$

Решить системы линейных уравнений с тремя неизвестными по правилу Крамера

$$a) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \end{cases} \quad б) \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases} \quad в) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5; \end{cases}$$

Решить системы линейных уравнений с четырьмя неизвестными по правилу Крамера

$$a) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2; \end{cases} \quad d) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Метод Крамера

Теорема Крамера. Пусть Δ – определитель матрицы системы A , а Δ_j – определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j -го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

Формула получила название формулы Крамера.

Алгоритм решения системы линейных уравнений методом Крамера.

1). Вычислить определитель матрицы A , составленной из коэффициентов системы линейных уравнений.

2). Составить матрицы $A_1, A_2, \dots, A_n$, путем замены соответствующих столбцов столбцом свободных членов, и вычислить их определители.

3). Вычислить значения переменных по формулам Крамера: $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \dots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}.$

Пример. Решить систему уравнений методом Крамера:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Решение. Составим матрицу из коэффициентов системы уравнений и вычислим ее определитель: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $|A| = 5 \neq 0$. Так как $\Delta \neq 0$, то по теореме Крамера система имеет

единственное решение.

Вычислим определители матриц A_1 , A_2 , A_3 , полученных из матрицы A , заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20; A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10; A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5.$$

Теперь по формулам Крамера найдем значения переменных:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{20}{5} = 4, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{10}{5} = 2, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{5}{5} = 1.$$

Ответ: (4; 2; 1).

Ход работы:

Рассмотрим пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Вычислим определители каждой переменной:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 40 - 15 + 10 - 0 = 20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 30 + 0 + 45 - 0 - 20 = -10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 30 - 0 - 20 - 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{10} = -1; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0$$

Ответ: (2; -1; 0).

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно.

Тема 1.2. Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 5 Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Цель: формирование умений решать системы линейных уравнений по правилу Гаусса.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уд 4. решать системы линейных уравнений различными методами;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план;

Уо 01.02 владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

Решить системы линейных уравнений с двумя неизвестными по правилу Гаусса

$$a) \begin{cases} x + 2y = -2 \\ 3x - y = 8 \end{cases}; b) \begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ x - 5y = 4 \end{cases}; c) \begin{cases} 7x + 3y = 1 \\ 2x - 6y = -10 \end{cases}$$

Решить системы линейных уравнений с тремя неизвестными по правилу Гаусса

$$a) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \end{cases} \quad б) \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases} \quad в) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5; \end{cases}$$

Решить системы линейных уравнений с четырьмя неизвестными по правилу Гаусса

$$a) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2; \end{cases} \quad б) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте расширенную матрицу.
3. Выполните элементарные преобразования строк матрицы, исключая последовательно переменные. В результате должна получиться ступенчатая матрица.
4. По ступенчатой матрице составьте систему.
5. Последовательно найдите значения всех неизвестных.
6. Запишите ответ.

Метод Гаусса (метод исключения неизвестных)

Метод Гаусса является наиболее общим точным методом решения и исследования систем линейных уравнений. Сущность его состоит в том, что посредством элементарных преобразований система приводится к ступенчатому виду, из которого все решения системы могут быть найдены непосредственно.

Элементарными преобразованиями системы являются:

- перестановка любых двух уравнений системы;

- умножение любого уравнения системы на число $\lambda \neq 0$;
- вычеркивание уравнения, у которого все коэффициенты и свободный член равны нулю;
- сложение двух уравнений системы.

Любое элементарное преобразование системы не меняет множество ее решений.

Чаще всего преобразования выполняются не с самой системой, а с ее расширенной матрицей, при этом элементарные преобразования системы легко превращаются в элементарные преобразования матрицы.

Пример. Решить систему уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \end{array} \right. \xrightarrow[(-2)]{\left(\begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right)} \xrightarrow{(-3)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ -x_2 - 7x_3 = -8, \\ -5x_2 - 13x_3 = -18; \end{array} \right. \xrightarrow{(-5)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ -x_2 - 7x_3 = -8, \\ 22x_3 = 22; \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ -x_2 - 7x_3 = -8, \\ 22x_3 = 22; \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 6 - 2x_2 - 3x_3, \\ x_2 = \frac{-8 + 7x_3}{-1}, \\ x_3 = 1; \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ответ: (1; 1; 1).

Пример. Решить систему уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 7x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выполним преобразования с помощью расширенной матрицы:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -5 \\ 7 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[(-2)]{\left(\begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right)} \xrightarrow[(-2)]{(7)} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 9 & -5 & 35 \end{array} \right) \xrightarrow[(-5)]{(9)} \\ & \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & -20 & -40 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Полученной матрице соответствует система
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 5x_2 - 5x_3 = 15, \\ -20x_3 = -40, \end{cases}$$
 которая имеет единственное

решение
$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Ответ: (1; 5; 2).

Если система несовместна (т.е. составляющие её уравнения противоречивы и система не имеет решения), то в результате приведения к ступенчатому виду получается абсурдное равенство типа $1=0$. Обратно: если мы получили равенство $1=0$ (вместо единицы в левой части может стоять любое число, не равное нулю), то система несовместна.

Пример. Решить систему уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1. \end{cases}$$

Решение. Выполним преобразования с помощью расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -6 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[(-2)]{(-1)} \xrightarrow{(-1)} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\left(\begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right)}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right).$$

Полученной матрице соответствует система $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ -4x_3 + 5x_4 = -4, \\ 0x_4 = -6. \end{cases}$ Третье уравнение системы не

имеет решений, следовательно, система решений не имеет.

Ответ: система несовместна.

Пример. Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$

Решение. Запишем расширенную матрицу и выполним первый шаг гауссовых исключений:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array} \right).$$

Разделим третью строку на 3 и выполним второй ход гауссовых исключений:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Последней матрице соответствует система уравнений: $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ -x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 1. \end{cases}$

Из второго уравнения находим: $x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4$ и, подставив в первое уравнение, получим: $x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4$.

Итак, $x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4$, $x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4$, x_3, x_4 – любые числа.

Ответ: система неопределенная и имеет бесконечное множество решений.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно.

Тема 1.2. Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 6 Решение системы линейных уравнений матричным методом

Цель: формирование умений решать системы линейных уравнений матричным методом.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уд 4. решать системы линейных уравнений различными методами;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план;

2. Составьте матричное уравнение.
3. Вычислите обратную матрицу.
4. Найдите значения неизвестных.
5. Запишите ответ.

Ход работы:

Решить систему линейных уравнений:

$$1) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -7 \\ 6x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases}.$$

Найдем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -10 - 9 = -19 \neq 0 \Rightarrow \text{обратная матрица есть.}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решим уравнение:

$$X = A^{-1}C = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 12 \end{pmatrix} = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} -20 - 18 \\ -12 + 12 \end{pmatrix} = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} -38 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (2; 0).

$$2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -25 \end{cases}.$$

Найдем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = -104.$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -12; \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -16;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -31; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 13; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 26; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13.$$

Составим обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix}.$$

Решим матричное уравнение:

$$X = A^{-1}C = -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix} = -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} -120 + 64 + 56 \\ -310 - 8 - 98 \\ 130 - 104 + 182 \end{pmatrix} = -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} 0 \\ -416 \\ 208 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (0; 4; -2).

Сделаем проверку:

$$\begin{cases} 0 + 12 - 2 = 10 \\ 0 - 8 + 4 = -4 \\ 0 - 4 - 10 = -14 \end{cases} \text{ (верно)}$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно

Тема 1.2. Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 7 Решение системы линейных уравнений различными методами

Цель: формирование умений решать системы линейных уравнений различными методами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уд 4. решать системы линейных уравнений различными методами;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план;

Уо 01.02 владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

Решить системы линейных уравнений с тремя неизвестными методом Крамера, методом Гаусса и матричным методом.

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5; \end{cases}$$

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно.

Тема 2.1. Комплексные числа

Практическое занятие № 8 Действия с комплексными числами в алгебраической форме.

Цель: формирование умений выполнения действий с комплексными числами в алгебраической форме.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уд 2. выполнять действия над комплексными числами;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план;

Уо 01.02 владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Даны комплексные числа: $z_1 = (7;1)$, $z_2 = (-1,5;1,5)$, $z_3 = (4;-3)$.

Записать эти числа в алгебраической форме.

2. Вычислить:

1) $z_1 + z_2$;

2) $z_2 - z_3$;

3) $\frac{z_1}{z_3}$;

4) $z_2 \cdot z_3$;

5) z_1^5 ;

3. Вычислить: $\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8$

Порядок выполнения работы:

1. Запишите комплексные числа в алгебраической форме $z = a + bi$

2. Выполните действия над комплексными числами в алгебраической форме, используя формулы:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i;$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Ход работы:

1. Даны комплексные числа: $z_1 = (7;1)$, $z_2 = (-1,5;1,5)$, $z_3 = (4;-3)$.

Записать эти числа в алгебраической форме.

Решение: Т.к. алгебраическая форма комплексного числа имеет вид: $z = a + bi$, то числа в алгебраической форме будут записаны в виде:

$$z_1 = 7 + i; \quad z_2 = -1,5 + 1,5i; \quad z_3 = 4 - 3i.$$

2. Вычислить:

$$z_1 + z_2 = (7 - 1,5) + (1 + 1,5)i = 5,5 + 2,5i;$$

$$z_2 - z_3 = (-1,5 - 4) + (1,5 + 3)i = -5,5 + 4,5i;$$

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{7+i}{4-3i} = \frac{(7+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{28+4i+21i+3i^2}{16-9i^2} = \frac{28+25i-3}{16+9} = \frac{25+25i}{25} = 1 + i;$$

$$z_2 \cdot z_3 = (-1,5 + 1,5i)(4 - 3i) = -6 + 4,5i + 6i - 4,5i^2 = -6 + 10,5i + 4,5 = -1,5 + 10,5i;$$

$$z_1^5 = (7 + i)^5 = ((7 + i)^2)^2(7 + i) = (49 + 14i + i^2)^2(7 + i) = (48 + 14i)^2(7 + i) = (2304 + 1344i + 196i^2)(7 + i) = (2304 + 1344i - 196)(7 + i) = (2108 + 1344i)(7 + i) = 13412 + 11516i$$

$$3. \text{ Вычислить: } \frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8$$

Решение:

$$\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8 = -2,1 - 2,7i;$$

$$1) \frac{1+3i}{i-3} = \frac{(1+3i)(-i-3)}{(i-3)(-i-3)} = \frac{-i-3-3i^2-9i}{-i^2+9} = \frac{-10i}{10} = -i$$

$$2) \frac{4-5i}{1+3i} = \frac{(4-5i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{4-12i-5i+15i^2}{1-9i^2} = \frac{-11-17i}{10} = -1,1 - 1,7i$$

$$3) i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$$

$$4) -i - 1,1 - 1,7i - 1 = -2,1 - 2,7i$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. $90 \div 100$ -отлично; $80 \div 89$ - хорошо; $70 \div 79$ -удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно.

Тема 2.1. Комплексные числа

Практическое занятие № 9 Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Цель: формирование умений выполнения действий с комплексными числами в тригонометрической форме.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уд 2. выполнять действия над комплексными числами;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план;

Уо 01.02 владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Даны комплексные числа: $z_1=(-3;-5)$, $z_2=(-7,2;7,2)$, $z_3=(2;6)$.

Записать эти числа в тригонометрической форме.

2. Вычислите: $z_2 \cdot z_3$; $\frac{z_1}{z_3}$; z_1^5 ; $\sqrt{z_2}$.

3. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

$$a) \left(3 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \right)^2 \quad b) \frac{24(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)}{3(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)}$$

Краткие теоретические сведения:

Тригонометрической формой комплексных чисел называется запись их в виде:

$$z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi).$$

При выполнении действий над комплексными числами в тригонометрической форме используются следующие формулы:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Для извлечения корня n -й степени из комплексного числа в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ используется формула :

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \text{ где } \sqrt[n]{r} - \text{арифметический корень, } k=0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Алгоритм перехода от алгебраической формы к тригонометрической:

Пусть комплексное число задано в алгебраической форме $z = a + bi$.

1) Модуль $r = |z|$ однозначно определяется по формуле $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2) Аргумент φ определяется из формул $\cos \varphi = \frac{a}{r}$, $\sin \varphi = \frac{b}{r}$.

Значения аргумента комплексного числа можно находить и так:

- Определить, в какой четверти находится вектор (использовать геометрическую интерпретацию числа) $z = a + bi$

- Решив уравнение $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$, получаем, что

$\arg z = \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ для внутренних точек 1 и 4 четвертей,

$\arg z = \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi$ для внутренних точек 2 четверти,

$\arg z = \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \pi$ для внутренних точек 3 четверти.

Если точка z лежит на действительной или мнимой оси, то $\arg z$ можно найти непосредственно.

3) Найдя модуль и аргумент комплексного числа, его можно записать в тригонометрической или показательной форме $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ или $z = re^{i\varphi}$.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите заданные числа в тригонометрической форме, используя алгоритм перехода к тригонометрической форме.

2. Выполните необходимые действия.

Ход работы:

Даны комплексные числа: $z_1=(7;1)$, $z_2=(-1,5;1,5)$, $z_3=(4;-3)$.

1. Записать числа z_1 , z_2 и z_3 в тригонометрической форме.

Решение:

1) $z_1 = 7 + i$

$$|z_1| = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2},$$

Число находится в первой четверти, значит

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{7} = \operatorname{arctg} 0,1429.$$

$$z_1 = 7 + i = 5\sqrt{2}(\cos 8^\circ 8' + i \sin 8^\circ 8').$$

$$2) \quad z_2 = -1,5 + 1,5i$$

$$|z_2| = \sqrt{(-1,5)^2 + 1,5^2} = \sqrt{2,25 + 2,25} = \sqrt{4,5} \approx 2,1$$

Число находится во второй четверти, значит $\varphi = \arctg \frac{b}{a} + \pi = \arctg(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$;

$$z_2 = -1,5 + 1,5i = 2,1(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}).$$

$$3) \quad z_3 = 4 - 3i$$

$$|z_3| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Число находится в четвертой четверти, значит

$$\varphi = \arctg \frac{-3}{4} = \arctg(-0,75) = -36^\circ 52'.$$

$$z_3 = 4 - 3i = 5(\cos(-36^\circ 52' + i \sin(-36^\circ 52')).$$

2. Вычислите:

$$1) \quad z_2 \cdot z_3;$$

$$2) \quad \frac{z_1}{z_3};$$

$$3) \quad z_1^5;$$

$$4) \quad \sqrt{z_2};$$

Решение:

$$z_2 \cdot z_3 = 2,1 \cdot 5 (\cos(135^\circ - 36^\circ 52') + i \sin(135^\circ - 36^\circ 52')) = 10,5(\cos 98^\circ 8' + i \sin 98^\circ 8');$$

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{5\sqrt{2}}{5} (\cos(8^\circ 8' - (-36^\circ 52')) + i \sin(8^\circ 8' + 36^\circ 52')) = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ);$$

$$z_1^5 = (5\sqrt{2})^5 (\cos 5 \cdot 8^\circ 8' + i \sin 5 \cdot 8^\circ 8') = 12500\sqrt{2}(\cos 40^\circ 40' + i \sin 40^\circ 40');$$

Воспользуемся формулой:

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} (\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n})$$

В нашем примере n=2.

$$\sqrt{z_2} = \omega_k = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}} (\cos \frac{135^\circ + 360^\circ k}{2} + i \sin \frac{135^\circ + 360^\circ k}{2});$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}} (\cos \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 0}{2} + i \sin \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 0}{2}) = \sqrt{2,1}(\cos 67^\circ 30' + i \sin 67^\circ 30');$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}} (\cos \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 1}{2} + i \sin \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 1}{2}) = \sqrt{2,1}(\cos 247^\circ 30' + i \sin 247^\circ 30')$$

2. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

$$(2 \cdot (\cos \frac{5\pi}{24} + i \sin \frac{5\pi}{24}))^6 = 2^6 (\cos \frac{5\pi}{24} \cdot 6 + i \sin \frac{5\pi}{24} \cdot 6) = 64 (\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}) = 64 (-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}) = -32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}i$$

$$\frac{24(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)}{3(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)} = \frac{24}{3} (\cos(75^\circ - 15^\circ) + i \sin(75^\circ - 15^\circ)) = 8(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 8\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4 + 4\sqrt{3}i$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно.

Тема 2.1. Комплексные числа

Практическое занятие № 10. Переход от одной формы комплексных чисел к другой

Цель: формирование умений выполнения действий с комплексными числами в алгебраической и тригонометрических формах, перехода от одной формы к другой.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уд 2. выполнять действия над комплексными числами;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план;

Уо 01.02 владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций

Задание:

1. Даны комплексные числа: $z_1 = (7;1)$, $z_2 = (-1,5;1,5)$, $z_3 = (4;-3)$.

Записать эти числа в алгебраической форме.

2. Вычислить: $z_1 + z_2$; $z_2 - z_3$; $\frac{z_1}{z_3}$; $z_2 \cdot z_3$; z_1^5 ;

3. Вычислить: $\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8$

4. Даны комплексные числа: $z_1 = (-3;-5)$, $z_2 = (-7,2;7,2)$, $z_3 = (2;6)$.

Записать эти числа в тригонометрической форме.

5. Вычислите: $z_2 \cdot z_3$; $\frac{z_1}{z_3}$; z_1^5 ; $\sqrt{z_2}$.

6. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

а) $\left(3 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)\right)^2$ б) $\frac{24(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)}{3(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)}$

Краткие теоретические сведения:

Комплексным числом называется выражение вида $a + bi$, где a и b – действительные числа, а символ i удовлетворяет условию $i^2 = -1$.

Комплексные числа $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ называются равными, если $a = c$ и $b = d$.

Комплексные числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ называются сопряженными. Числа $a + bi$ и $-a - bi$ называются противоположными.

Модулем комплексного числа называется длина радиус-вектора соответствующей точки комплексной плоскости. Обозначается $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$.

Запись комплексного числа z в виде $a + bi$, где a и $b \in \mathbb{R}$, называется алгебраической формой комплексного числа.

1. **Сумма** двух чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ равна $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

2. **Разность** двух чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ равна $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.

3. **Произведением** комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ называется комплексное число $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

4. **Частным** комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di \neq 0$ называется комплексное число $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$.

5. **Возведение комплексного числа в степень** $n \in \mathbb{N}$ рассматривается как частный случай умножения комплексного числа n раз.

Степени числа i :

$$i^n = \begin{cases} i, & \text{если } n = 4k + 1 \\ -1, & \text{если } n = 4k + 2 \\ -i, & \text{если } n = 4k + 3 \\ 1, & \text{если } n = 4k \end{cases}$$

Тригонометрической формой комплексных чисел называется запись их в виде:

$$z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi).$$

При выполнении действий над комплексными числами в тригонометрической форме используются следующие формулы:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Для извлечения корня n -й степени из комплексного числа в тригонометрической форме $z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ используется формула:

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \text{ где } \sqrt[n]{r} - \text{арифметический корень, } k=0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Алгоритм перехода от алгебраической формы к тригонометрической:

Пусть комплексное число задано в алгебраической форме $z = a + bi$.

1) Модуль $r = |z|$ однозначно определяется по формуле $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2) Аргумент φ определяется из формул $\cos \varphi = \frac{a}{r}$, $\sin \varphi = \frac{b}{r}$.

Значения аргумента комплексного числа можно находить и так:

- Определить, в какой четверти находится вектор (использовать геометрическую интерпретацию числа) $z = a + bi$

- Решив уравнение $tg\varphi = \frac{b}{a}$, получаем, что

$\arg z = \varphi = \arctg \frac{b}{a}$ для внутренних точек 1 и 4 четвертей,

$\arg z = \varphi = \arctg \frac{b}{a} + \pi$ для внутренних точек 2 четверти,

$\arg z = \varphi = \arctg \frac{b}{a} - \pi$ для внутренних точек 3 четверти.

Если точка z лежит на действительной или мнимой оси, то $\arg z$ можно найти непосредственно.

3) Найдя модуль и аргумент комплексного числа, его можно записать в тригонометрической или показательной форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ или $z = re^{i\varphi}$.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите заданные числа в тригонометрической форме, используя алгоритм перехода к тригонометрической форме.

2. Выполните необходимые действия.

Ход работы:

Даны комплексные числа: $z_1=(7;1)$, $z_2=(-1,5;1,5)$, $z_3=(4;-3)$.

1. Записать числа z_1 , z_2 и z_3 в тригонометрической форме.

Решение:

1) $z_1 = 7 + i$

$$|z_1| = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2},$$

Число находится в первой четверти, значит

$$\varphi = \arctg \frac{1}{7} = \arctg 0,1429.$$

$$z_1 = 7 + i = 5\sqrt{2}(\cos 8^\circ 8' + i\sin 8^\circ 8').$$

2) $z_2 = -1,5 + 1,5i$

$$|z_2| = \sqrt{(-1,5)^2 + 1,5^2} = \sqrt{2,25 + 2,25} = \sqrt{4,5} \approx 2,1$$

Число находится во второй четверти, значит $\varphi = \arctg \frac{b}{a} + \pi = \arctg (-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$;

$$z_2 = -1,5 + 1,5i = 2,1(\cos \frac{3\pi}{4} + i\sin \frac{3\pi}{4}).$$

3) $z_3 = 4 - 3i$

$$|z_3| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Число находится в четвертой четверти, значит

$$\varphi = \arctg \frac{-3}{4} = \arctg (-0,75) = -36^\circ 52'.$$

$$z_3 = 4 - 3i = 5(\cos(-36^\circ 52' + i\sin(-36^\circ 52')).$$

2. Вычислите:

1) $z_2 \cdot z_3$;

2) $\frac{z_1}{z_3}$;

3) z_1^5 ;

4) $\sqrt{z_2}$;

Решение:

$$z_2 \cdot z_3 = 2,1 \cdot 5 (\cos(135^\circ - 36^\circ 52') + i\sin(135^\circ - 36^\circ 52')) = 10,5(\cos 98^\circ 8' + i\sin 98^\circ 8');$$

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{5\sqrt{2}}{5} \left(\cos(8^\circ 8' - (-36^\circ 52')) + i \sin(8^\circ 8' + 36^\circ 52') \right) = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ);$$

$$z_1^5 = (5\sqrt{2})^5 (\cos 5 \cdot 8^\circ 8' + i \sin 5 \cdot 8^\circ 8') = 12500\sqrt{2}(\cos 40^\circ 40' + i \sin 40^\circ 40');$$

Воспользуемся формулой:

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

В нашем примере $n=2$.

$$\sqrt{z_2} = \omega_k = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{135^\circ + 360^\circ k}{2} + i \sin \frac{135^\circ + 360^\circ k}{2} \right);$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 0}{2} + i \sin \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 0}{2} \right) = \sqrt{2,1}(\cos 67^\circ 30' + i \sin 67^\circ 30');$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 1}{2} + i \sin \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 1}{2} \right) = \sqrt{2,1}(\cos 247^\circ 30' + i \sin 247^\circ 30')$$

1. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

$$\left(2 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{24} + i \sin \frac{5\pi}{24} \right) \right)^6 = 2^6 \left(\cos \frac{5\pi}{24} \cdot 6 + i \sin \frac{5\pi}{24} \cdot 6 \right) = 64 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = 64 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}i$$

$$\frac{24(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)}{3(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)} = \frac{24}{3} (\cos(75^\circ - 15^\circ) + i \sin(75^\circ - 15^\circ)) = 8(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 8 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 4 + 4\sqrt{3}i$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно.

Тема 3.1. Предел и непрерывность функции

Практическое занятие № 11 Вычисление пределов функций.

Цель: формирование умений вычислять пределы функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уд 6. применять методы дифференциального и интегрального исчисления;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план;

Уо 01.02 владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Задание:

Вычислить пределы функций

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{10x^2 - 5x}{x^2 - 0.25}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + x - 15}{3x^2 + 7x - 6}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x + 2}{x^3 + 1}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^3 - 54x}{x^2 + x + 1}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}.$$

Вычислить пределы функций, раскрывая неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x + 7}{5x^3 + x - 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x^3}{x^4 + x^5}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^5}{x^2 + x^3}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^5 - 3x^3 + 2x}{x^3 + 3x^2 - 1}$. д) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x)$;

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

Ход работы:

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Раскрытие неопределенностей различных типов

Для того чтобы найти предел элементарной функции, когда аргумент стремится к значению, принадлежащему области определения этой функции, нужно в выражение функции вместо аргумента подставить его предельное значение.

Далеко не всякая подстановка предельного значения в функцию вместо независимой переменной может сразу привести к нахождению предела. Случаи, в которых подстановка предельного значения в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $\left(\frac{0}{0}\right)$, $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$, (1^∞) , (∞^0) , (0^0) . Рассмотрим несколько типов примеров, классифицируя их по виду неопределенности и предельному значению x .

1-й тип. Рассмотрим примеры вида $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ с неопределенностью вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ в общем случае – сложные степенные или показательные функции. В случае степенных функций необходимо выносить за скобку в числителе и в знаменателе дроби x с наибольшим показателем степени среди всех слагаемых дроби; в случае показательных функций за скобку выносится наиболее быстро возрастающее слагаемое среди всех слагаемых дроби. После сокращения дроби неопределенность устраняется.

Полезно запомнить правило:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} 0, & \text{если } n < m, \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{если } n = m, \\ \infty, & \text{если } n > m. \end{cases}$$

2-й тип. Рассмотрим примеры вида $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ с неопределенностью вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. В этом случае необходимо разложить на множители и числитель, и знаменатель дроби или домножить и числитель, и знаменатель дроби на одно и то же выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения. После сокращения дроби неопределенность устраняется.

3-й тип. Рассмотрим примеры с неопределенностью вида $(\infty - \infty)$. Если функция, стоящая под знаком предела, представляет собой алгебраическую сумму дробей, то неопределенность устраняется или приводится к 2-му типу после приведения дробей к общему знаменателю. Если упомянутая функция представляет собой алгебраическую сумму иррациональных выражений, то неопределенность устраняется или приводится к 1-му типу путем домножения и деления функции на одно и то же (сопряженное) выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. $90 \div 100$ -отлично; $80 \div 89$ - хорошо; $70 \div 79$ -удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно.

Тема 3.1. Предел и непрерывность функции

Практическое занятие № 12 Вычисление пределов с помощью замечательных пределов, раскрытие неопределенностей.

Цель: формирование умений вычислять пределы функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уд 6. применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план;
Уо 01.02 владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

Вычислить пределы функций, применяя первый замечательный предел или свойство эквивалентно малых величин

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin 2x}{\sin 3x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin^2 2x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin x^3}{1-\cos^2 x}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5\arcsin 2x}{\arctg 4x}$

Вычислить пределы функций применяя второй замечательный предел

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{6n}$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{4n}\right)^{n^2}$; d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5+3n}{4-2n}\right)^n$

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

Ход работы:

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Замечательные пределы.

Первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел (число e): $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ или $\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$.

Для того что бы избавиться от неопределенности вида $\left(1^\infty\right)$. необходимо выделить целую дробь (которая должна быть равна 1) в выражении, стоящем под знаком предела, которое

представляет собой степенно-показательную функцию. Неопределенность устраняется при помощи выделения второго замечательного предела.

Например:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 0)^\infty = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{k}\right)}\right)^{k \cdot \frac{x}{k}} = \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{ky} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \right]^k = e^k; \\ 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^n &= (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}} \right]^{4 \cdot \frac{n}{4}} = e^{-4} = e^4; \\ 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{4n}\right)^{n+2} &= (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{3}{4n}\right)^{\frac{4n}{3}} \right]^{\frac{3}{4n}(n+2)} = e^{\frac{3(n+2)}{4n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{4n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{4n} + \frac{2}{n}} = \\ e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+0}{4}} &= e^{\frac{3}{4}}; \\ 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x &; \text{Данный предел можно вычислить двумя способами:} \end{aligned}$$

1 способ:

Разделим числитель на знаменатель, выделив целую часть:

$$\begin{aligned} \frac{-x+3}{x-2} &\overset{x-2}{=} \frac{x+3}{x-2} = 1 + \frac{5}{x-2}; \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x-2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{5}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{5}} \right]^{\frac{5}{x-2} \cdot x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{x-2}} = \\ e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{x-2}} &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{1-0}} = e^5; \end{aligned}$$

2 способ:

Поделив числитель и знаменатель дроби на x , сведем данный предел к частному пределов:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{x}{x} + \frac{3}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{2}{x}}\right)^x = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x} = \frac{e^3}{e^{-2}} = e^5.$$

Пределы от некоторых тригонометрических функций необходимо решать применяя первый замечательный предел или закон эквивалентных величин при условии $x \rightarrow 0$.

Эквивалентными называются бесконечно малые величины, предел от понятия которых равен единице.

В курсе математического анализа доказывается, что при отыскании предела отношений двух бесконечно малых величин можно заменить на предел эквивалентных им величинам.

$$\left(\sin x \sim x; \sin^2 \frac{x}{3} \sim \left(\frac{x}{3}\right)^2; \operatorname{tg} x \sim x \dots\right)$$

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$; так как $\sin x$ и x при $x \rightarrow 0$ эквивалентные бесконечно малые величины, поэтому в данном выражении можно $\sin \frac{x}{2}$ заменить его аргументом $\frac{x}{2}$. Тогда решение выглядит следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{4}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{4x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \left| \frac{\sin ax \sim ax}{\sin bx \sim bx} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{b} = \frac{a}{b};$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100 – отлично; 80 ÷ 89 – хорошо; 70 ÷ 79 – удовлетворительно; менее 70 – не удовлетворительно

Тема 3.1. Предел и непрерывность функции

Практическое занятие №13 Непрерывность функций, классификация точек разрыва. Асимптоты функции.

Цель: формирование умений вычислять односторонние пределы и классифицировать точки разрыва.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уд 6. применять методы дифференциального и интегрального исчисления;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план;

Уо 01.02 владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Задание:

1. Исследовать на непрерывность и построить график функции:

$$\text{а) } y = \frac{x^3 + 1}{x + 1}; \text{ б) } y = 3^{\frac{1}{x+1}} + 1; \text{ в) } y(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ 1 - x, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{1-x}, & x > 1. \end{cases}$$

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Непрерывность функции определяется в точках, принадлежащих области определения функции. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 . Эта функция называется *непрерывной* в точке x_0 , если:

- 1) существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ функции $f(x)$ в точке x_0 ;
- 2) этот предел равен значению функции в точке x_0 .

Иначе говоря, f непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0}^{def} f(x) = f(x_0)$. (1)

Непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 означает, что в этой точке существуют односторонние пределы, равные значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0), \quad (2)$$

где $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$ – правосторонний предел функции f в точке x_0 ; $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$ – левосторонний предел функции f в точке x_0 ; $f(x_0)$ – значение функции f в точке x_0 .

Если условия (1) или (2) в точке x_0 не выполняются, то точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Если существуют конечные односторонние пределы $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$, причем не все три числа $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$, $f(x_0)$ равны между собой, то x_0 называют *точкой разрыва первого рода*.

Если в точке разрыва x_0 хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ не существует или бесконечен, то x_0 называют *точкой разрыва второго рода*.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно

Тема 3.2. Производная функции и ее применение

Практическое занятие № 14 Вычисление производных элементарных функций. Правила дифференцирования

Цель: формирование умений вычислять производные элементарных функций с использованием правил дифференцирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уд 6. применять методы дифференциального и интегрального исчисления;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план;

Уо 01.02 владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание 1	Задание 2
1) $y = 7x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2$;	6) $f(t) = 0,5t + 0,6t^2 + 0,8t + 8$; $f'(1) = ?$
2) $y = 5\sqrt{x} - \frac{2\sqrt{x}}{x^3} + \frac{x^4}{\sqrt{x}}$;	7) $f(x) = \operatorname{ctgx} - \operatorname{tgx}$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = ?$
3) $y = 3\operatorname{ctgx} + 5\ln x - 3^x$;	8) $f(x) = 2 \cdot 5^x + 3 \cdot e^x$; $f'(0) = ?$
4) $y = (9 + x^2)(2x - 1)$;	9) $f(x) = \cos x \cdot (1 + \sin x)$; $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = ?$
5) $y = \frac{x^3}{3x+5}$;	10) $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$; $f'(1) = ?$

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

1. Получить у преподавателя задания.

2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Дана функция $y = f(x)$ которая определена в некоторой окрестности точки x . Пусть x_1 и x_2 – Значение аргумента, а $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ – соответствующие значение функции.

Разность $\Delta x = x_2 - x_1$ – называется приращением аргумента, а разность $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$ – приращение функции на $[x_1; x_2]$.

Дф: производной функции $y = f(x)$ по аргументу x называют конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последний стремится к нулю

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx};$$

Операция нахождения производной называется дифференцированием. Геометрическая производная представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции

$$y = f(x); \text{ т.е. } y' = f'(x) = k = \operatorname{tg} \alpha.$$

Физический смысл производной может быть определен через мгновенную скорость:

Для выполнения данной работы необходима таблица

Таблица производных основных элементарных функций.

$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$c' = 0, c = \text{const};$	$x' = 1;$	$(CU)' = C \cdot U'$		
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$(u \cdot v)' = u'v + uv'$ $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \quad \left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}, \quad v(x) \neq 0$		

Решение типовых задач:

Задание 1: Найти производные функций используя правила вычисления и таблицу производных элементарных функций.

$$1. y = 6x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 4$$

$$y' = (6x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 4)' = 24x^3 - 24x^2 + 4x;$$

$$2. y = (5x - 4) \cdot (x + 2)$$

$$y' = ((5x-4)(x+2))' = \begin{vmatrix} u = 5x-4; & u' = 5 \\ v = x+2; & v' = 1 \\ (u \cdot v)' = u'v + uv' \end{vmatrix} =$$

$$= 5(x+2) + 1(5x-4) = 5x + 10 + 5x - 4 = 10x + 6$$

$$3. \quad y = \frac{x+1}{x}$$

$$y' = \left(\frac{x+1}{2x} \right)' = \begin{vmatrix} u = x+1; & u' = 1 \\ v = 2x; & v' = 2 \\ \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{1 \cdot 2x - 2(x+1)}{(2x)^2} = \frac{2x - 2x - 2}{4x^2} =$$

$$= \frac{-2}{4x^2} = -\frac{1}{2x^2};$$

Задание 2: Вычислить производную функции в точке.

$$1) \quad y = 3x^5 - 8x^4 + 9x^2 - 4$$

$$y'(-1) = 3 \cdot (-1)^5 - 8 \cdot (-1)^4 + 9(-1)^2 - 4 = -3 - 8 + 9 - 4 = -6.$$

$$2) \quad y = 5 \sin x \cos x$$

$$y' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 5((\sin x)' \cdot \cos x + \sin x (\cos x)') = 5(\cos^2 x - \sin^2 x) = 5(\cos 2x) = 5(\cos 2 \frac{\pi}{2}) =$$

$$5 \cos \pi = 5 \cdot (-1) = -5$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно

Тема 3.2. Производная функции и ее применение

Практическое занятие №15. Дифференцирование сложных функций.

Цель: формирование умений вычислять производные сложных функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уд 1. анализировать сложные функции и строить их графики;

Уд 6. применять методы дифференциального и интегрального исчисления;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план;

Уо 01.02 владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций, таблица производных.

Задание:

Найти производные функций

1. $y = (5x^3 - 2x)^6$
2. $f(x) = 3 \sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3. $f(x) = \arcsin 4x + \arccos^2 x$
4. $f(x) = \log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$
5. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Порядок выполнения работы:

1. Определите вид функции. Если функция является сложной, то введите промежуточный аргумент.
2. Определите, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Примените соответствующее правило.
3. Используя таблицу производных, найдите производные функций.
4. Раскройте скобки и приведите подобные, если это упростит запись функции.

Ход работы:

Найти производные функций:

1. $g(x) = (1 - 4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u = 1 - 4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$$y' = 10(1 - 4x^2)^9 \cdot (1 - 4x^2)' = 10(1 - 4x^2)^9(-8x) = -80x(1 - 4x^2)^9$$

2. $f(x) = \sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = (\sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (\sin \frac{1}{2}x)' \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x (\cos 2x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$, $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (\sin \frac{1}{2}x)' \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x (\cos 2x)' \\ &= \cos \frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)' = \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x - 2 \sin \frac{1}{2}x \cdot \sin 2x. \end{aligned}$$

3. $y = \frac{2^{3x+5x^2}}{\log_2(3+10x)}$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = 3x + 5x^2$, для второй функции $u = 3 + 10x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$.

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} = \frac{2^{3x+5x^2} \ln 2 (3x+5x^2)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \frac{1}{(3+10x) \ln 2} (3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} =$$

$$\frac{2^{3x+5x^2} \ln 2 (3x+5x^2) \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \frac{10}{(3+10x) \ln 2}}{(\log_2(3+10x))^2}$$

/

$$4. f(x) = \arcsin \frac{3}{5}x + \arccos 5x$$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U+V)' = U' + V'$.

$$f'(x) = \left(\arcsin \frac{3}{5}x\right)' + (\arccos 5x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = \frac{3}{5}x$, для второй функции $u = 5x$.

При дифференцировании используем следующие формулы:
 $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$$f'(x) = \left(\arcsin \frac{3}{5}x\right)' + (\arccos 5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{5}x)^2}} \left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}} (5x)' = \frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25}x^2}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

$$5. f(x) = \arccos \sqrt{1-e^{2x}}$$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент $u = \sqrt{1-e^{2x}}$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f'(x) = (\arccos \sqrt{1-e^{2x}})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1-e^{2x}})'$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент $u = 1 - e^{2x}$.

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$f'(x) = (\arccos \sqrt{1 - e^{2x}})' = -\frac{1}{\sqrt{1 - (1 - e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1 - e^{2x}})' = -\frac{1}{\sqrt{1 - 1 + e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - e^{2x}}} \cdot (1 - e^{2x})' = -\frac{1}{e^x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - e^{2x}}} \cdot (-2e^x) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно.

Тема 3.2. Производная функции и ее применение

Практическое занятие №16. Исследование функций на монотонность, экстремумы, выпуклость, вогнутость, перегиб

Цель: формирование умений исследования функции с помощью производной.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уд 1. анализировать сложные функции и строить их графики;

Уд 6. применять методы дифференциального и интегрального исчисления;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план;

Уо 01.02 владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций, учебники.

Задание:

1. Функция задает технологический процесс. Исследуйте эту функцию на монотонность:

$$f(x) = x^5 - x^3 - 2x$$

2. Функция задает технологический процесс. Найдите экстремумы функции:

$$f(x) = x^4 - 4x^3$$

3. Функция задает технологический процесс. Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы: $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

4. Найдите промежутки выпуклости функции:

$$f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 + 100$$

Краткие теоретические сведения:

Алгоритм нахождения экстремумов функции и интервалов ее монотонности с помощью первой производной

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.

2. Найти производную функции $f'(x)$.

3. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.

4. Исследовать характер изменения функции $f(x)$ и знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$.

5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

Помни: критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x) < 0$, от промежутка, в котором $f'(x) > 0$, и точка максимума - в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0 , знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

6. Вычислить значения функции в точках экстремума.

7. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

Алгоритм нахождения выпуклостей функции и точек перегиба:

1. Находим вторую производную.
2. Находим точки, в которых $f''(x) = 0$ или не существует.
3. Исследуем знак второй производной слева и справа от найденных точек и делаем вывод об интервалах выпуклости и о наличии точек перегиба.
4. Находим значение функции в точках перегиба.

Порядок выполнения работы:

- 1) Запишите функцию.
- 2) Определите, каким алгоритмом нужно воспользоваться для выполнения задания.
- 3) Примените соответствующий алгоритм.
- 4) Запишите ответ.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. $90 \div 100$ - отлично; $80 \div 89$ - хорошо; $70 \div 79$ - удовлетворительно; менее 70 - не удовлетворительно.

Тема 3.2. Производная функции и ее применение

Практическое занятие №17. Исследование функций и построение графиков

Цель: формирование умений исследования функции и построения графиков.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Уд 1. анализировать сложные функции и строить их графики;
- Уд 6. применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план;
- Уо 01.02 владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Функция задает технологический процесс. Исследуйте функцию по общей схеме и постройте ее график:

1. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.

2. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$.

Краткие теоретические сведения:

Общая схема исследования функций.

1. Найти область определения функции $D(y)$.
2. Найти (если это не вызывает затруднений) точки пересечения графика с осями координат (при $x = 0$ и при $y = 0$).
3. Исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность.
4. Найти интервалы монотонности, точки экстремумов и значения функции в этих точках.
5. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика функции.
6. Найти асимптоты графика функции.
7. Найти дополнительные точки и построить график по результатам исследования.
8. Найти область значений.

Алгоритм нахождения экстремумов функции и интервалов ее монотонности с помощью первой производной

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.
2. Найти производную функции $f'(x)$.
3. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.
4. Исследовать характер изменения функции $f(x)$ и знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$.
5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

Помни: критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x) < 0$, от промежутка, в котором $f'(x) > 0$, и точка максимума - в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0 , знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

6. Вычислить значения функции в точках экстремума.
7. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

Алгоритм нахождения выпуклостей функции и точек перегиба:

1. Находим вторую производную.
2. Находим точки, в которых $f''(x) = 0$ или не существует.

- Исследуем знак второй производной слева и справа от найденных точек и делаем вывод об интервалах выпуклости и о наличии точек перегиба.
- Находим значение функции в точках перегиба.

Асимптоты.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x; f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ равно $-\infty$ или $+\infty$.

Замечание. Прямая $x = a$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = a$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ равно b .

Замечание. График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - kx - b| = 0$

Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \rightarrow \infty$.

Порядок выполнения работы:

- Провести анализ заданной функции по общей схеме.
- Построить график функции.

Ход работы:

Исследовать функцию и построить ее график.

$$y = \frac{x^2}{2x-2}.$$

- Область определения функции $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$
- При подстановке значения $x = 0$ получим $y(0) = 0$.

Такую же точку получим, если приравняем функцию к нулю. Точка $x = 0$ - единственная точка пересечения с осями координат.

- Проверяем функцию на четность

$$y(-x) = \frac{(-x)^2}{-2x-2} = -\frac{x^2}{2x+2}.$$

$$y(-x) \neq y(x); y(-x) \neq -y(x).$$

Итак, функция ни четная, ни нечетная, непериодическая.

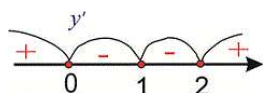
4. Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную функции

$$y' = \frac{2x(2x-2) - x^2 \cdot 2}{(2x-2)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2}{(2x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(2x-2)^2}$$

Приравнивая ее к нулю, получим критические точки $x = 0; x = 2$. Они разбивают область определения на следующие интервалы монотонности $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения.

Графически интервалы монотонности будут иметь вид



Исследуемая функция возрастает на интервалах $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ и убывает $(0; 1) \cup (1; 2)$.

5. Точка $x = 0$ — точка локального максимума, $x = 2$ — локального минимума. Найдем значение функции $y_{\max} = 0; y_{\min} = 2$.

6. Для отыскания интервалов выпуклости найдем вторую производную

$$y'' = \frac{(4x-4)(2x-2)^2 - (2x^2-4x) \cdot 2(2x-2) \cdot 2}{(2x-2)^4} = \frac{8}{(2x-2)^3} = \frac{8}{8(x-1)^3} = \frac{1}{(x-1)^3}$$

Таких интервалов нет, поскольку вторая производная не принимает нулевых значений в области определения.

7. Прямая $x = 1$ — вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$.

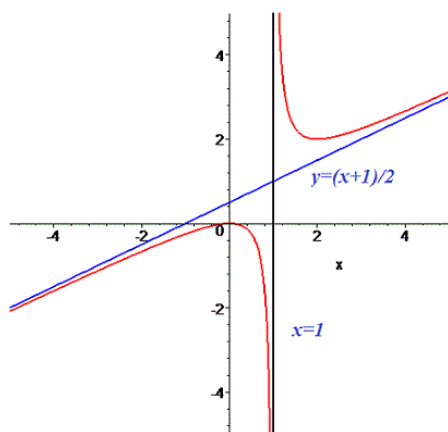
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2x-2)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{2x-2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

Конечный вид прямой следующий

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

8. На основе проведенного анализа выполняем построение графика функции. Для этого сначала строим вертикальные и наклонные асимптоты, затем находим значение функции в нескольких точках и по ним проводим построение.



Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно.

Тема 3.3. Интеграл и его приложения

Практическое занятие №18. Вычисление неопределенных интегралов.

Цель: формирование умений вычислять неопределённые интегралы заменой переменной и непосредственным интегрированием.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уд 6. применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
 Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план;
 Уо 01.02 владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Найдите неопределенные интегралы:

1) $\int (8x^4 - 6x^2 + 2x - 3) dx$

2) $\int \frac{3x^4 + 2x^2 - 3x + 7}{x^2} dx$

3) $\int \cos(10x - 5) dx$

4) $\int 3^{4x^2} x dx$

5) $\int \frac{5dx}{25 + 16x^2}$

$$6) \int \frac{x^2 dx}{(1-2x^3)^2}$$

$$7) \int \frac{2x^4 - 4x^2 - 3x - 1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, приведите интеграл к табличным формулам. Проинтегрируйте.
3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то введите новую переменную, найдите ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Найдите полученный интеграл. В случае неопределенного интеграла вернитесь к старой переменной.

Способ подстановки(замены переменной) заключается в следующем:

–заменяют новой переменной такую часть подынтегральной функции, при дифференцировании, которой получается оставшаяся часть подынтегрального выражения (не считая постоянного множителя);

– путем введения новой переменной интегрирования удастся свести заданный интеграл к новому интегралу, который сравнительно легко вычисляется непосредственным интегрированием;

–в полученном результате производят обратную замену, т. е. переходят к старой переменной интегрирования.

Решение типовых заданий:

Найти неопределенные интегралы методом подстановки:

$$1) \int (3x - 2)^4 dx;$$

$$2) \int \frac{5x dx}{x^2 + 7};$$

$$3) \int \sin 12x dx;$$

$$4) \int e^{x^2} x dx;$$

1) $\int (3x - 2)^4 dx$; Для того чтобы привести этот интеграл к табличному, введем новую переменную: $3x - 2 = t$. Продифференцируем обе части равенства $d(3x - 2) = dt$

$$(3x - 2)' dx = dt$$

$$3dx = dt$$

Выразим дифференциал старой переменной через дифференциал новой переменной: $dx = \frac{dt}{3}$;

Решение этого примера оформляется так:

$$\begin{aligned} \int (3x - 2)^4 dx &= \left| \begin{array}{l} 3x - 2 = t \\ d(3x - 2) = dt \\ (3x - 2)' dx = dt \\ 3dx = dt \\ dx = \frac{dt}{3} \end{array} \right| = \int t^4 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int t^4 dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^5}{5} + c = \frac{t^5}{15} + c = \\ &= \frac{(3x - 2)^5}{15} + c. \end{aligned}$$

$$2) \int \frac{5x dx}{x^2+7} = 5 \int \frac{x dx}{x^2+7} = \left| \begin{array}{l} x^2 + 7 = m \\ d(x^2 + 7) = dm \\ (x^2 + 7)' dx = dm \\ 2x dx = dm \\ x dx = \frac{dm}{2} \end{array} \right| = 5 \int \frac{\frac{dm}{2}}{m} = 5 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{dm}{m} = 2,5 \ln|m| + c =$$

$$2,5 \ln|x^2 + 7| + c;$$

$$3) \int \sin 12x dx = \left| \begin{array}{l} 12x = t \\ d(12x) = dt \\ (12x)' dx = dt \\ 12 dx = dt \\ dx = \frac{dt}{12} \end{array} \right| = \int \sin t \frac{dt}{12} = \frac{1}{12} \int \sin t dt = \frac{1}{12} (-\cos t) + c =$$

$$-\frac{1}{12} \cos(12x) + c;$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно

Тема 3.3. Интеграл и его приложения

Практическое занятие №19. Вычисление определенных интегралов

Цель: формирование умений вычислять определённые интегралы методом замены переменной.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уд 6. применять методы дифференциального и интегрального исчисления;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план;

Уо 01.02 владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Вычислите определенные интегралы:

$$1. \int_{-2}^3 (4x^3 + 3x^2 + 2x + 1) dx$$

$$1. \int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$2. \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{3\sqrt{1-x^2}}$$

$$3. \int_{-2}^b \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x} \cos x dx$$

5. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{dx}{\sin \frac{2x}{3}}$

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать. Вычислить значение определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.
3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то необходимо вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл.

Ход работы:

1) $\int_{-1}^3 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 5) dx$

$$\int_{-1}^3 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 5) dx = 4 \int_{-1}^3 x^3 dx - 3 \int_{-1}^3 x^2 dx + 2 \int_{-1}^3 x dx + 5 \int_{-1}^3 dx = x^4 - x^3 + x^2 + 5x \Big|_{-1}^3 =$$

2) $3^4 - 3^3 + 3^2 + 5 \cdot 3 - (1 + 1 + 1 - 5) = 81 - 27 + 9 + 15 + 2 = 80$

$$\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2}$$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2} = \frac{5}{4} \int_0^{0,4} \frac{dx}{1+\frac{25}{4}x^2} = \frac{5}{4} \int_0^{0,4} \frac{dx}{1+(\frac{5}{2}x)^2} = \left[\begin{array}{l} \frac{5}{2}x = t \\ \frac{5}{2}dx = dt \\ dx = \frac{2}{5}dt \\ x_H = 0 \quad t_H = 0 \\ x_B = 0,4 \quad t_B = 1 \end{array} \right] =$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{5} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \arctg t \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (\arctg 1 - \arctg 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos^4 x}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos^4 x} = \left[\begin{array}{l} \cos x = t \\ d\cos x = dt \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \\ x_H = 0 \quad t_H = \cos 0 = 1 \\ x_B = \frac{\pi}{3} \quad t_B = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{array} \right] = \int_1^{0,5} \frac{-dt}{t^3} = -\frac{t^{-2}}{-2} \Big|_1^{0,5} = \frac{1}{2t^2} \Big|_1^{0,5} = \frac{1}{2 \cdot 0,25} - \frac{1}{2} = 2 - 0,5 = 1,5$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно

Тема 3.3. Интеграл и его приложения

Практическое занятие № 20. Применение определенного интеграла к решению физических задач.

Цель: формирование умений решать задачи с физическим содержанием с помощью определенных интегралов.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уд 6. применять методы дифференциального и интегрального исчисления;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план;

Уо 01.02 владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

1) Вычислите массу участка стержня $x_1 = 0$ до $x_2 = 3$ (м), если его линейная плотность задается формулой $\rho(x) = x^2 + 1$ (кг/м³).

2) Скорость движения на конвейерной ленте $v = v(t)$. Найдём путь S , пройденный содержимым конвейерной ленты за промежуток времени от $t_1 = 2$ до $t_2 = 7$ мин.

3) Тело брошено вертикально вверх со скоростью, которая изменяется по закону $v = 29.4 - 9.8t$ м/с. Найти наибольшую высоту подъёма.

Порядок выполнения работы:

1) Записать формулу, используя определенный интеграл $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$

2) Вычислить определенный интеграл

Ход работы:

1. Скорость движения на конвейерной ленте $v = (9t^2 - 8t)$ м/с. Найти путь, пройденный содержимым конвейерной ленты за 4-ю секунду.

Решение: согласно условию, $f(t) = 9t^2 - 8t$, $t_1 = 3, t_2 = 4$. Следовательно, $s = \int_3^4 (9t^2 - 8t) dt = [3t^3 - 4t^2]_3^4 = 83$ (м).

2. Вычислите массу участка стержня $x_1 = 0$ до $x_2 = 1$ (м), если его линейная плотность задается формулой $\rho(x) = x^2 + 1$ (кг/м³).

Решение:

Согласно формуле, имеем:

$$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx$$

$$m = \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} + 1 - \left(\frac{0^3}{3} + 0 \right) = \frac{4}{3}$$

Ответ: 1,33 кг

3. Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью $v = (39.2 - 9.8t)$ м/с.

Найти наибольшую высоту подъема тела.

Решение: тело достигнет наибольшей высоты подъема в такой момент времени t , когда $v = 0$, т.е. $39,2 - 9,8t = 0$, откуда $t = 4$ с. По формуле (1) находим $h = 78,4$

Форма представления результата: Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. $90 \div 100$ -отлично; $80 \div 89$ - хорошо; $70 \div 79$ -удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно

Тема 3.3. Интеграл и его приложения

Практическое занятие № 21. Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур и объемов тел вращения

Цель: формирование умений находить площади плоских фигур с помощью определенных интегралов.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уд 6. применять методы дифференциального и интегрального исчисления;

Уд 7. вычислять значения геометрических величин;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план;

Уо 01.02 владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = 2x^3; y = 0; x = 0; x = 3$

2) $y = 2x^2; y = 0; x = 1; x = 3$.

3) $y = 2x; y = 0; x = 1; x = 3$.

4) $y = e^x; y = 0; x = 0; x = 2$.

5) $y = x^3; y = x^2; x = 1; x = 2$.

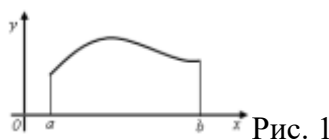
Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

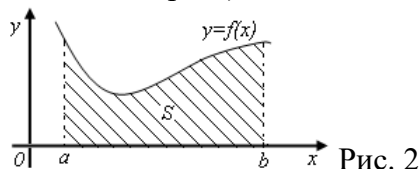
Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на этом отрезке неотрицательные значения, т.е. $f(x) > 0$ при $x \in [a; b]$. Фигура, образованная линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$, называется криволинейной трапецией (рис. 1). Определенный интеграл от неотрицательной функции имеет простой геометрический смысл: это площадь криволинейной трапеции.



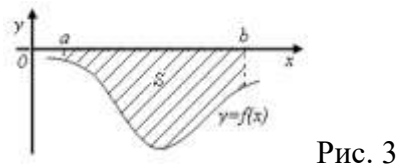
Площади плоских фигур

1. Если функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a; b]$, то площадь S под кривой $y = f(x)$ на $[a; b]$ (рис. 2) численно равна определенному интегралу от $f(x)$ на данном отрезке: $S = \int_a^b f(x) dx$ (геометрический смысл определенного интеграла).

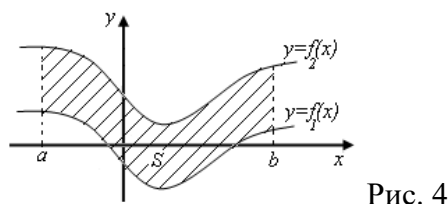


2. Если функция $f(x)$ – неположительна на отрезке $[a; b]$, то площадь S под кривой $y = f(x)$ на $[a; b]$ (рис. 3) равна определенному интегралу от $f(x)$ на $[a; b]$, взятому со знаком «минус»:

$$S = - \int_a^b f(x) dx.$$



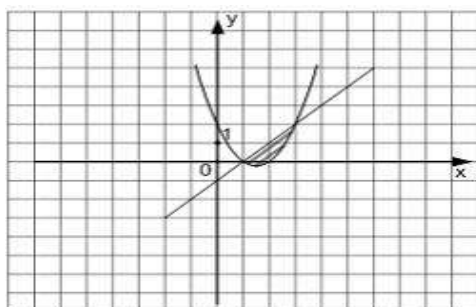
3. Если функция $f_2(x) \geq f_1(x)$ на отрезке $[a; b]$, то площадь S фигуры, заключенной между кривыми $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$ на $[a; b]$ (рис. 4) определяется формулой $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$.



Ход работы:

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 3x + 2$ и $y = x - 1$.

Найдем пределы интегрирования - точки пересечения графиков функций, для этого приравняем правые части исходных функций и решим получившееся уравнение $x^2 - 3x + 2 = x - 1$. Корнями этого уравнения являются числа $x = 1$ и $x = 3$, следовательно, они и являются пределами интегрирования.



Значит, площадь фигуры равна:

$$S = \int_1^3 (x-1)dx - \int_1^3 (x^2 - 3x + 2)dx = \frac{x^2}{2} - x - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right) = 4,5 - 3 - 0,5 + 1 - \left(\frac{27}{3} - 3 \cdot 4,5 + 6 - \frac{1}{3} + 1,5 - 2\right) = 1\frac{1}{3} \text{ (кв. ед.)}$$

Получили, что площадь фигуры равна $1\frac{1}{3}$ (кв. ед.)

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно

Тема 4.1 Элементы теории вероятностей и математической статистики

Практическое занятие №22. Решение комбинаторных задач

Цель: формирование умений вычислять количества различных комбинаций, используя формулы комбинаторики

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уд 5. решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;

Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план;

Уо 01.02 владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. В соревнованиях участвует 10 человек, трое из них займут 1-е, 2-е и 3-е место. Сколько существует различных вариантов?
2. Из группы, в которой учится 12 человек, необходимо выбрать 3 человека в совет колледжа. Сколько существует различных способов такого выбора.
3. На книжной полке расставлены 8 книг различных авторов. Сколько способов имеется для расстановки этих книг в разном порядке?

Порядок выполнения работы

1. Определите вид выборки без повторения.
2. Выберите соответствующую формулу для вычисления возможных комбинаций.
3. Произведите вычисления, используя понятие факториала.

Ход работы:

1. Кодовый замок открывается последовательным набором четырёх разных цифр. Требуется определить число возможных кодов, которые можно подобрать для этого замка.

Решение.

Возможных цифр всего десять (1,2,3,4,5,6,7,8,9,0). Каждая набранная комбинация кода отличается от другой комбинации хотя бы одной цифрой (1,4,5,7 ≠ 2,4,5,7), либо порядком набора одинаковых цифр (1,4,5,7 ≠ 4,5,7,1), поэтому для подсчёта числа возможных комбинаций кодов используем формулу числа размещений.

2. Формула размещений имеет вид: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$. В нашем случае $n = 4$, $m = 10$.

Производим расчёт: $A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

3. Сколько существует способов выбора трёх человек из десяти?

Решение.

В данном случае при выборе для нас важен только состав по три человека, порядок выбора роли не играет, поэтому в отличие от первого примера число способов подсчитаем по формуле сочетаний.

Формула сочетаний имеет вид: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. В нашем случае $n=10$, $m=3$.

Производим расчёт: $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = 120$.

4. Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 9, если цифры не повторяются?

Решение.

По условию дано множество из четырёх элементов, которые требуется расположить в определённом порядке. Значит, требуется найти количество перестановок их четырёх элементов.

Формула перестановок из n — элементов имеет вид: $P_n = n!$. В нашем случае $n=4$.

Произведём расчёт: $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Форма представления результата: Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ — 1 балл. За неправильный ответ — 0 баллов. 90 ÷ 100 — отлично; 80 ÷ 89 — хорошо; 70 ÷ 79 — удовлетворительно; менее 70 — не удовлетворительно.

Тема 4.1 Элементы теории вероятностей и математической статистики

Практическое занятие №23. Решение задач на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики

Цель: формирование умений вычислять вероятности событий, используя классическое определение вероятности и элементы комбинаторики.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Уд 5. решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;
- Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план;
- Уо 01.02 владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

1. Готовясь к докладу, студент выписал из книги цитату, но, забыв номер страницы, на которой она находилась, написал номер наудачу. Какова вероятность того, что студент записал нужный номер, если он помнит, что номер выражается двузначным числом?

2. В ящике 15 изготовленных деталей, среди которых 10 окрашены. Сборщик наудачу выбрал 3 детали. Какова вероятность того, что выбранные детали оказались окрашенными?
3. Имеется 8 карточек. Одна сторона каждой из них чистая, а на другой написаны буквы :К,И,Р,Д, А,Н,З,П. Карточки кладут на стол чистой стороной вверх, перемешивают, а затем последовательно одну за другой переворачивают. Какова вероятность того, при последовательном появлении букв будет составлен слово ПРАЗДНИК?
4. Цепь состоит из независимых блоков, соединенных в систему с одним входом и одним выходом.

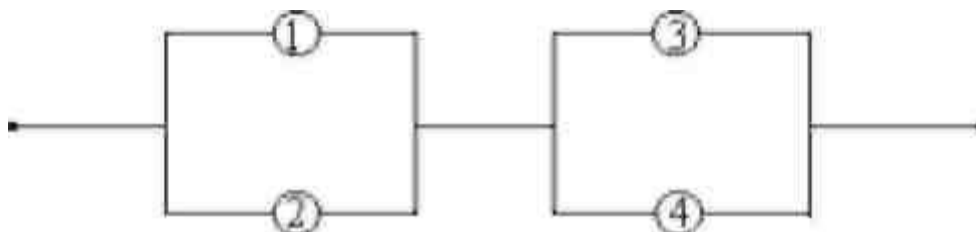


рис. 1

Выход из строя за время T различных элементов цепи — независимые события, имеющие следующие вероятности: $q_1=0,1$; $q_2=0,2$; $q_3=0,3$; $q_4=0,4$. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Найти надежность системы/

Краткие теоретические сведения:

Вероятностью события A называется отношение числа m случаев, благоприятствующих его появлению, к общему числу всех несовместных равновозможных и образующих полную группу событий.

Такое определение вероятности называют классическим. Вероятность события обозначается $P(A)$ и вычисляется по формуле: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Вероятность появления события заключена в пределах от 0 до 1: $0 \leq P(A) \leq 1$

При решении задач на вычисление вероятности применяются формулы для подсчета числа комбинаций из данных элементов:

- число перестановок вычисляется по формуле: $P_n = n!$

- число размещений из n элементов по m элементов в каждом вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

- число сочетаний из n элементов по m элементов в каждом вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$$

Надежность каждого элемента системы электроснабжения можно характеризовать вероятностью рабочего состояния p и вероятностью отказа q . Если не учитывать плановые простои (ремонт), то можно считать, что элементы в любой момент времени находятся в одном из этих состояний. Тогда сумма вероятностей этих состояний равна 1: $p + q = 1$.

Для группы из двух элементов возможны следующие сочетания:

1. оба элемента в рабочем состоянии;
2. первый элемент в вынужденном простое, второй в рабочем состоянии;
3. первый элемент в рабочем состоянии, второй в вынужденном простое;
4. оба элемента в вынужденном простое.

Вероятности этих состояний можно найти, воспользовавшись теоремой умножения вероятностей.

Так при **последовательном соединении двух элементов** с надежностью каждого p_1 и p_2 надежность всей схемы определяется как $P = p_1 \cdot p_2$

Другими словами *схема работает, если работают оба элемента. При отказе одного (любого) из них схема работать не будет (ток через цепь не пойдет).*

Вероятность отказа для последовательного соединения

$P = 1 - q_1 q_2$ (для двух элементов).

$P = 1 - q_1 q_2 \cdot \dots q_n$ (для n –элементов).

При **параллельном соединении двух элементов** с надежностью каждого p_1 и p_2 надежность всей схемы определяется как $P = p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot q_2 + p_2 q_1$

Пользуясь формулой для вероятности появления хотя бы одного события, надежность схемы параллельного соединения записывают в виде $P = 1 - q_1 q_2$.

Другими словами *схема работает, если работают оба элемента, но также она работает, если выйдет из строя и какой либо один из элементов.*

Порядок выполнения работы:

1. Определите событие A , вероятность которого нужно вычислить.
2. Просчитайте общее число (n) возможных исходов.
3. Просчитайте число исходов (m), благоприятствующих наступлению события A .
4. Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Ход работы:

1. Вероятность того, что новый датчик прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение:

Проработав год, датчик может либо сломаться на второй год, либо благополучно служить и после 2 лет работы.

Пусть P – вероятность того, что датчик прослужил больше года;

P_1 – вероятность того, что он сломается на второй год;

P_2 – вероятность того, что он прослужит больше двух лет.

Очевидно, $P = P_1 + P_2$.

Тогда $P_1 = P - P_2 = 0,93 - 0,87 = 0,06$

2. Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры и набрал их наудачу, помня, что они различны. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение:

Событие А- «номер набран верно».

Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Всего имеется 10 цифр, т.е. число элементов равно 10; в каждое соединение входит по 3 цифры; порядок цифр (элементов) существен при наборе номера, значит, нужно найти число размещений из 10 элементов по 3 по формуле:

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7!} = 720. \text{ Итак, } n=720$$

Число m=1, т.к. только один набор из трёх цифр является нужным. Значит,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$$

2. Из коробки, в которой находятся 12 белых и 8 чёрных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся чёрными?

Решение:

Событие А- «оба шара окажутся чёрными».

Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов

$$(12+8) \text{ по два: } n = C_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{1 \cdot 2 \cdot 18!} = 190.$$

Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно числу сочетаний из 8 элементов (8 черных шаров) по два: $n = C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{1 \cdot 2 \cdot 6!} = 28$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{28}{190} \approx 0,147$$

4. Цепь состоит из независимых блоков, соединенных в систему с одним входом и одним выходом.

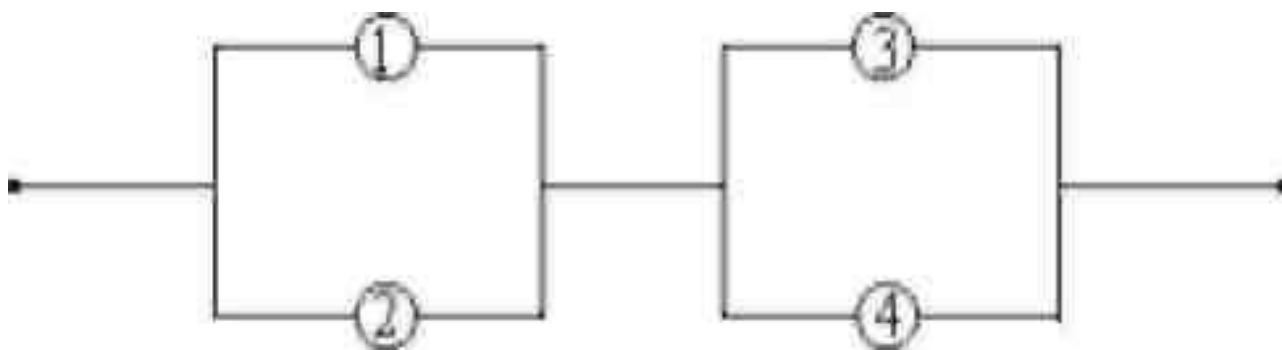


рис. 1

Выход из строя за время T различных элементов цепи — независимые события, имеющие следующие вероятности: $q_1=0,1$; $q_2=0,2$; $q_3=0,3$; $q_4=0,4$. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Найти надежность системы.

Решение:

Событие А — система надежна.

Событие A_i — i-й блок работает безотказно.

Элементы 1 и 2 соединены параллельно, и элементы 3 и 4 соединены параллельно, а между собой они соединены последовательно, тогда используя формулы, получим

$$P(A) = (1 - q_1 q_2) \cdot (1 - q_3 q_4) = (1 - 0,1 \cdot 0,2) \cdot (1 - 0,3 \cdot 0,4) = (1 - 0,02) \cdot (1 - 0,12) = 0,98 \cdot 0,88 = 0,8624$$

Форма представления результата: Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно

Тема 4.1 Элементы теории вероятностей и математической статистики Практическое занятие №24. Выборка. Числовые характеристики выборки. Генеральная совокупность и выборочная совокупность. Определение статистических распределений

Цель: формирование умений проводить расчеты статистических характеристик

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

Уд 5. решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;
Уо 01.01 распознавать и анализировать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; выделять её составные части; определять этапы решения задачи; составлять план действий; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план;
Уо 01.02 владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

1. Построить полигоны частот и относительных частот по распределению выборки:

x_i	2	4	7	8	9	12
n_i	p_1^2	$2p_2$	p_2	p_2^2	p_3	$3p_3$

2. Постройте гистограммы частот и относительных частот по распределению выборки:

№ интервала	Интервал, $X_i - X_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала, n_i
1	3 – 5	p_1
2	5 – 7	$2p_2$
3	7 – 9	$3p_3$
4	9 – 11	p_1^2
5	11 – 13	$2p_2^2$
6	13 – 15	$3p_3^2$

7	15 – 17	p_1+p_2
---	---------	-----------

3. Для генеральной совокупности, заданной распределением:

x_i	5	10	15	20	25	30	35
N_i	p_1	$3p_1$	p_2	$2p_2$	p_2^2	$2p_3$	$2p_3^2$

Найдите генеральную среднюю, генеральную дисперсию, генеральное стандартное отклонение, моду, медиану и размах.

4. Из генеральной совокупности сделана выборка, заданная распределением:

x_i	2	4	6	8	10	12	14
n_i	p_2	$2p_2$	p_1	p_1^2	p_3	$2p_3$	p_2+p_3

Найти выборочную среднюю, выборочные дисперсию и стандартное отклонение. Обратите внимание: p_1 = числу букв в Вашем имени; p_2 = числу букв в Вашей фамилии; p_3 = числу букв в имени Вашего отца.

Порядок выполнения работы:

1 Прочитав условие предложенной задачи, по конспекту лекции найдите соответствующие формулы.

2. Примените лекционный теоретический материал для решения каждой задачи.

3 В случае необходимости представить геометрическую интерпретацию числовых характеристик. выборки.

Ход работы: 1. Задано распределение частот выборки:

x_i	2	6	12	15
n_i	3	10	7	5

Составить распределение относительных частот.

Определим сначала объем выборки:

$$n = 3 + 10 + 7 + 5 = 25.$$

Найдем относительные частоты по формуле $w_i = \frac{n_i}{n}$:

$$w_1 = \frac{3}{25} = 0,12; w_2 = \frac{10}{25} = 0,40; w_3 = \frac{7}{25} = 0,28; w_4 = \frac{5}{25} = 0,20.$$

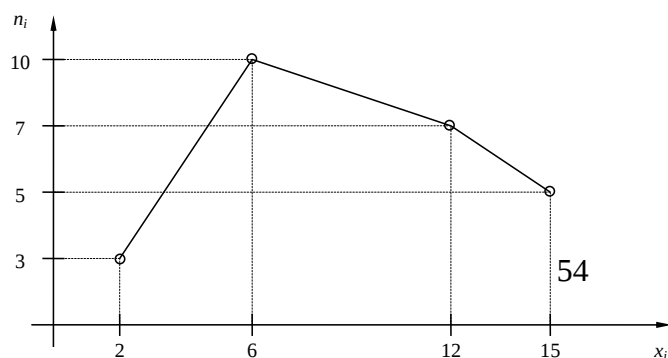
Следовательно,

x_i	2	6	12	15
w_i	0,12	0,40	0,28	0,20

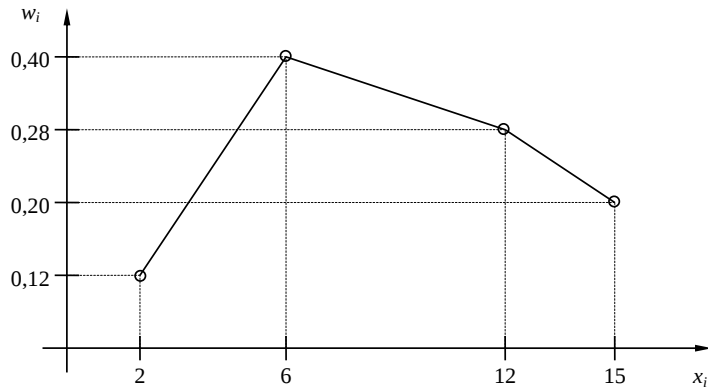
Контроль: $0,12 + 0,40 + 0,28 + 0,20 = 1$.

2. По результатам примера 1 построить полигоны частот и относительных частот.

Решение. Отобразив на плоскости точки с координатами (x_i, n_i) и соединив их отрезками, получим полигон частот:



Аналогично построим полигон по точкам (x_i, w_i) :



3. Постройте гистограмму по следующему статистическому распределению:

№ интервала	Интервал длиной $h=5$	Сумма частот вариант n_i
1	5 – 10	4
2	10 – 15	6
3	15 – 20	16
4	20 – 25	36
5	25 – 30	24
6	30 – 35	10
7	35 – 40	4

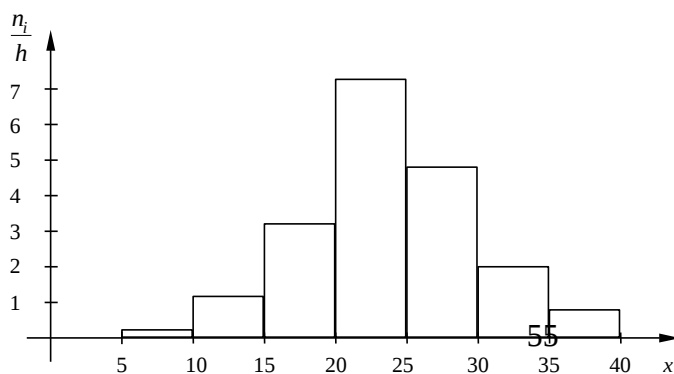
Решение. Прежде всего, определим объем выборки:

$$n = 4 + 6 + 16 + 36 + 24 + 10 + 4 = 100.$$

По известным суммам частот вариантов рассчитаем плотность частоты по интервалам:

№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$	№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$
1	0,2	5	4,8
2	1,2	6	2,0
3	3,2	7	0,8
4	7,2		

Изобразим полученный результат:



4. Найдите статистические оценки генеральной совокупности, заданной следующим вариационным рядом:

варианта x_i	2	4	5	6
частота N_i	8	9	10	3

Решение. Определим объем совокупности:

$$N_{\Gamma} = 8 + 9 + 10 + 3 = 30.$$

Найдем генеральную среднюю:

$$\bar{X}_{\Gamma} = \frac{8 \cdot 2 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{30} = 4.$$

Для вычисления генеральной дисперсии используем формулу $D_{\Gamma} = \overline{X_{\Gamma}^2} - (\bar{X}_{\Gamma})^2$. Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X_{\Gamma}^2} = \frac{8 \cdot 2^2 + 9 \cdot 4^2 + 10 \cdot 5^2 + 3 \cdot 6^2}{30} = 17,8.$$

Таким образом, $D_{\Gamma} = 17,8 - 4^2 = 1,8$.

Генеральное стандартное отклонение: $\sigma_{\Gamma} = \sqrt{D_{\Gamma}} = \sqrt{1,8} \approx 1,34$.

Обычно полученных результатов достаточно для практических задач. Однако можно получить дополнительные характеристики для более тонкой оценки генеральной совокупности.

Приведем их:

Мода Mo : наибольшая частота

$$Mo = 10.$$

Медиана Me : вариационный ряд делится пополам в точке

$$Me = 4,5.$$

Размах вариации R : в примере

$$x_{\max} = 6; x_{\min} = 2,$$

поэтому

$$R = 6 - 2 = 4.$$

5. Из генеральной совокупности извлечена выборка

x_i	1	2	3	4	5
n_i	92	94	103	105	106

Найдите статистические характеристики выборки.

Решение. Определим объем выборки:

$$n = 92 + 94 + 103 + 105 + 106 = 500.$$

Выборочная средняя:

$$\bar{X}_B = \frac{92 \cdot 1 + 94 \cdot 2 + 103 \cdot 3 + 105 \cdot 4 + 106 \cdot 5}{500} = 1,82.$$

Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X_B^2} = \frac{92 \cdot 1^2 + 94 \cdot 2^2 + 103 \cdot 3^2 + 105 \cdot 4^2 + 106 \cdot 5^2}{500} = 11,45.$$

Выборочная дисперсия:

$$D_B = \overline{X_B^2} - (\bar{X}_B)^2 = 11,45 - 1,82^2 \approx 8,14.$$

Выборочное стандартное отклонение:

$$\sigma_B = \sqrt{8,14} \cong 2,85.$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно