

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»
Многопрофильный колледж

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

ОП.01 ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

**для обучающихся специальности
09.02.13 Интеграция решений с применением технологий искусственного интеллекта**

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ	3
2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ	4
Практическое занятие № 1	4
Практическое занятие № 2	6
Практическое занятие № 3	9
Практическое занятие № 4	10
Практическое занятие № 5	12
Практическое занятие № 6	12
Практическое занятие № 7	15
Практическое занятие № 8	19
Практическое занятие № 9	22
Практическое занятие № 10	24
Практическое занятие № 11	26
Практическое занятие № 12	28
Практическое занятие №13	30
Практическое занятие №14	32

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки обучающихся составляют практические занятия.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование практических умений (умений решать задачи по математике), необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Элементы высшей математики» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения, обучающийся должен уметь:

Уд 1. Применять методы дифференциального и интегрального исчисления.

Уд 2. Строить математические модели, решать системы линейных алгебраических уравнений разными методами.

Уд 3. Применять SVD для анализа многомерных данных и уменьшения размерности данных в задачах машинного обучения.

Содержание практических и лабораторных занятий ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению **профессиональными компетенциями:**

ПК 3.2. Формировать сценарии обучения готовых моделей искусственного интеллекта.

А также формированию общих компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

Практические занятия проводятся в рамках соответствующей темы, после освоения дидактических единиц, которые обеспечивают наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1. Пределы и непрерывность функций

Практическое занятие № 1

Вычисление пределов функций, определение типов разрывов функций. Анализ непрерывности функций на интервале

Цель: формирование умений вычислять односторонние пределы функций, классифицировать точки разрыва.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять методы дифференциального и интегрального исчисления.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Вычислите пределы: а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+5} \right)^{7x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{4x^2}$.
2. Раскройте неопределённости: а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 2x^7}{2x^5 - 8x^7}$; б) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{\sqrt{x} - \sqrt{7}}$.
3. Исследовать на непрерывность и построить график функции:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < -1, \\ 2x, & -1 \leq x < 3, \\ x + 2, & x \geq 3. \end{cases}$$
4. Исследуйте на непрерывность:

$$f(x) = 4^{\frac{1}{x+3}} + 1.$$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 1. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=466080>):

- с. 176-179, п. 6.2. Свойства предела функции.
 - с. 179-182, п. 6.3. Непрерывность функции.
 - с. 182-184, п. 6.4. Непрерывность функции.
 - с. 184-186, п. 6.5. Замечательные пределы.
2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Найти а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^{3x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 3}{2x^2 + 1} \right)^{-3x^2}$.
Решение.

а) Имеем неопределенность вида (1^∞) . $\alpha(x) = \frac{5}{x}$ является бесконечно малой величиной при $x \rightarrow \infty$. Домножим показатель степени на $\left(\beta(x) \cdot \frac{1}{\alpha(x)} \right)$, это действие не нарушает знака

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^{3x} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{5}{x} \right)^{\frac{x}{5}} \right]^{\frac{5 \cdot 3x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{5}{x} \right)^{\frac{x}{5}} \right]^{15} = e^{15}$$

равенства:

б) Имеем неопределенность вида (1^∞) , так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{3}{x^2} \right)}{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 0}{2 + 0} = 1$$

. Выделим целую часть дроби

$\frac{2x^2 - 3}{2x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 1 - 4}{2x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 1}{2x^2 + 1} + \frac{-4}{2x^2 + 1} = 1 + \frac{-4}{2x^2 + 1}$. $\alpha(x) = \frac{-4}{2x^2 + 1}$ является бесконечно малой величиной при $x \rightarrow \infty$. Домножим показатель степени на $\left(\frac{1}{\alpha(x)} \cdot \frac{1}{\alpha(x)} \right)$, это действие не нарушает знака равенства:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 3}{2x^2 + 1} \right)^{-3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-4}{2x^2 + 1} \right)^{\frac{2x^2 + 1}{-4} \cdot (-3x^2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-4}{2x^2 + 1} \right)^{\frac{2x^2 + 1}{-4}} \right)^{\frac{12x^2}{2x^2 + 1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^2}{2x^2 + 1}} = e^6$$

Пример 2. Найти а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Решение.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \sin 6x}{2 \cdot 3 \cdot 2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$.

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 0} = 1 \cdot 1 = 1$.

Пример 3. Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$. Построить график.

Решение. Функция не определена при $x_0 = 5$, следовательно, функция в точке $x_0 = 5$ терпит разрыв. Вычислим односторонние пределы функции в точке $x_0 = 5$:

а) левосторонний $\lim_{x \rightarrow 5-0} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 5-0} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5-0} (x+5) = 10$;

б) правосторонний $\lim_{x \rightarrow 5+0} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 5+0} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5+0} (x+5) = 10$.

Функция $y = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ непрерывна на всей числовой прямой, исключая точку $x_0 = 5$. Точка $x_0 = 5$ является точкой разрыва первого рода. График функции показан на рисунке 1.

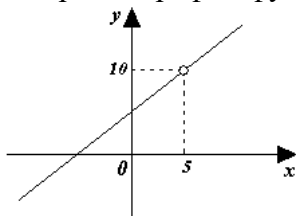


Рис. 1.

Пример 4. Исследовать на непрерывность функцию $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$.

Решение. Функция не определена при $x_0 = 1$, следовательно, функция в точке $x_0 = 1$ терпит разрыв. Вычислим односторонние пределы функции в точке $x_0 = 1$:

а) левосторонний $\lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = (2^{-\infty}) = 0$;

б) правосторонний $\lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = (2^{\infty}) = \infty$.

Функция $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$ непрерывна на всей числовой прямой, исключая точку $x_0=1$. Точка $x_0=1$ является точкой разрыва второго рода.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.2. Производная и её применение

Практическое занятие № 2

Вычисление производных для элементарных и составных функций. Исследование функций с помощью производных

Цель работы: формирование умений вычислять производные элементарных функций, умений исследования функции.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять методы дифференциального и интегрального исчисления.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Найти производные функций используя правила вычисления и таблицу производных элементарных функций:

а) $y = 7x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2$;

б) $y = 5\sqrt{x} - \frac{2\sqrt{x}}{x^3} + \frac{x^4}{\sqrt{x}}$;

в) $y = 3x^2x^2x^2 + 5x^2x^2 - 3x^2$;

г) $y = (9 + x^2)(2x - 1)$;

д) $y = \frac{x^3}{3x+5}$.

2. Вычислить производную функции в точке:

а) $f(t) = 0,5t + 0,6t^2 + 0,8t + 8$; $f'(1) = ?$

б) $f(x) = ctgx - tgx$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = ?$

в) $f(x) = 2 \cdot 5^x + 3 \cdot e^x$; $f'(0) = ?$

г) $f(x) = \cos x \cdot (1 + \sin x)$; $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = ?$

д) $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$; $f'(1) = ?$

3. Найти производные функций используя правила вычисления и таблицу производных элементарных функций:

а) $y = \ln(2x + \cos x)$;

$$\text{б) } y = e^{\sin(3x-1)} ;$$

$$\text{в) } y = \left(\frac{1+x^2}{x^2+x} \right)^3 ;$$

$$\text{г) } y = \ln(\sqrt{2x^5}) ;$$

$$\text{д) } y = \sqrt[3]{1-x^3} .$$

4. Исследовать функции: а) $y = \frac{2x}{1-x^2}$; б) $y = x \ln x$.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 1. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=466080>):

с. 192-195, п. 7.2. Правила вычисления производных. Производные элементарных функций.

с. 203-210, п. 7.7. Монотонность и экстремумы функции.

с. 210-212, п. 7.8. Выпуклость и точки перегиба функции.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Найти производные функций: а) $y = 2x^5 - 5 \cdot 2^x + 4x - 7 \cdot \log_2 x - \ln 2$; б)

$$y = (1+x^2) \cdot \arctg x ; \text{ в) } y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} ; \text{ г) } y = \log_3(2x^3 + 1) .$$

Решение. а) Используя правила дифференцирования (4), (5), (7) и формулы (14), (17), (19), получим:

$$\begin{aligned} y' &= (2x^5)' - (5 \cdot 2^x)' + (4x)' - (7 \cdot \log_2 x)' - (\ln 2)' = \\ &= 2 \cdot (x^5)' - 5 \cdot (2^x)' + 4 \cdot (x)' - 7 \cdot (\log_2 x)' - 0 = \\ &= 10x^4 - 5 \cdot 2^x \ln 2 + 4 - \frac{7}{x \ln 2} . \end{aligned}$$

б) Используя правила дифференцирования (6) и формулу (26) получим:

$$\begin{aligned} y' &= (1+x^2)' \cdot \arctg x + (1+x^2) \cdot (\arctg x)' = 2x \cdot \arctg x + (1+x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2} = \\ &= 2x \cdot \arctg x + 1 . \end{aligned}$$

в) Используя правила дифференцирования (9) и формулы (20), (21) получим:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sin x + \cos x)' \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ &= \frac{(\cos x - \sin x) \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\cos x + \sin x)'}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2} . \end{aligned}$$

Пример 2. Найти производную функции $y = \log_3(2x^3 + 1)$.

Решение. Используя правила дифференцирования сложной функции (11) и формулы (14), (19) получим:

$$y' = (\log_3(2x^3 + 1))' = \frac{1}{(2x^3 + 1) \cdot \ln 3} (2x^3 + 1)' = \frac{6x^2}{(2x^3 + 1) \cdot \ln 3} .$$

Пример 3. Исследовать функцию $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ и построить ее график.

Решение. 1). Область определения: $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Точки $x = -1$ и $x = 1$ – точки разрыва функции.

2). Функция четная, т.к. $f(-x) = f(x)$, и ее график симметричен относительно оси ординат.

$$3). \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty.$$

Прямые $x = 1$ и (в силу симметрии графика) $x = -1$ – вертикальные асимптоты.

4). Поведение функции в бесконечности. Вычислим $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -1$. Прямая $y = -1$ – горизонтальная асимптота.

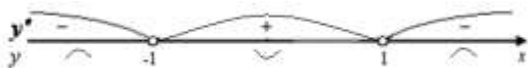
5). Найдем $y' = \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$; $y' = 0$ при $x = 0$ и y' не существует при $x = 1$ и $x = -1$.



Функция убывает на интервалах $(-\infty, -1)$ и $(-1, 0)$ и возрастает на интервалах $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$. Точка $x = 0$ – точка минимума и $f_{\min} = f(0) = 1$ – минимум функции.

$$y'' = \frac{4(1-x^2)^2 - 4x \cdot 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$$

6). Найдем y'' . Очевидно, что $y'' \neq 0$ при любых значениях x и y'' не существует при $x = 1$ и $x = -1$.

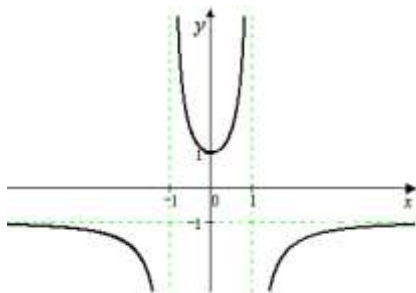


Функция выпукла вниз на интервале $(-1, 1)$ и выпукла вверх на интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$. Так как $y'' \neq 0$, то точек перегиба нет.

7). Точки пересечения с осями координат.

$x = 0$: $f(0) = 1$, т.е. точка пересечения с осью ординат $(0, 1)$.

$y = 0$: уравнение $f(x) = 0$ решений не имеет, следовательно, график функции не пересекает ось абсцисс.



Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.2. Производная и её применение

Практическое занятие № 3

Применение частных производных в многомерных функциях

Цель работы: формирование умений нахождения частных производных первого порядка.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять методы дифференциального и интегрального исчисления.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Найдите все частные производные первого порядка: $z = x^2y^3 + 3xy - y^2$.
2. Найдите $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ для: а) $z = \sin(xy) + \cos(x/y)$; б) $z = x^y$; в) $z = e^{(x^2+y^2)}$.
3. Найдите частные производные второго порядка $\partial^2 z/\partial x^2$, $\partial^2 z/\partial y^2$, $\partial^2 z/\partial x \partial y$ для $z = x^3y + 2x^2y^3$.
4. Вычислите градиент функции $f(x,y) = x^2 + 2xy - y^2$ в точке (1; 2).

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=476023>):

с. 145-150, п. 9.2. Частные производные. Дифференциал. Производная по направлению и градиент.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Найти частные производные $z = x^3 + 2x^2y - 3y^4$.

Решение.

$$\partial z/\partial x (y = \text{const}): \partial z/\partial x = 3x^2 + 4xy.$$

$$\partial z/\partial y (x = \text{const}): \partial z/\partial y = 2x^2 - 12y^3.$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.3. Интегралы и их применение

Практическое занятие № 4

Вычисление неопределённых интегралов методом подстановки и по частям

Цель: формирование умений вычислять неопределённые интегралы заменой переменной и по частям.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять методы дифференциального и интегрального исчисления.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Найти неопределённые интегралы, используя метод замены переменной: а) $\int \frac{dx}{e^{2x-1}}$; б) $\int \frac{dx}{(4x+3)^5}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$; г) $\int \sqrt[3]{3x+2} dx$.
2. Найти неопределённые интегралы, используя метод интегрирования по частям: а) $\int x e^{5x} dx$; б) $\int \ln(1-x) dx$; в) $\int x \sin 3x dx$.
3. Найти определённые интегралы: а) $\int_4^5 x \sqrt{x^2-16} dx$; б) $\int_1^e x \ln x dx$; в) $\int_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}}$.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 1. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=466080>):

с. 215-219, п. 8.1. Первообразная и неопределённый интеграл.

с. 219-229, п. 8.2. Методы вычисления неопределённого интеграла.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Найти неопределённые интегралы: а) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}$; в) $\int \frac{dx}{9x^2+18x+5}$; г) $\int \frac{8x^3}{2x+1} dx$.

Решение. а) Заменим $1+\sqrt{x}$ на t . Из соотношения $1+\sqrt{x}=t$ найдем x и дифференцированием получим dx . Выполним подстановку и вычислим полученный интеграл, затем вернемся к переменной x :

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} 1+\sqrt{x}=t \\ x=(t-1)^2 \quad dx=2(t-1)dt \end{array} \right| = \int \frac{2(t-1)dt}{t} = 2 \int \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t} =$$
$$= 2t - 2 \ln|t| + C = 2(1+\sqrt{x}) - 2 \ln|1+\sqrt{x}| + C.$$

б)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x)^2+1}} = \left| \begin{array}{l} 2x=t \\ x=\frac{t}{2} \quad dx=\frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{2} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|t + \sqrt{t^2+1}| + C = \frac{1}{2} \ln|2x + \sqrt{4x^2+1}| + C.$$

в) В знаменателе подынтегрального выражения выделим полный квадрат: $9x^2+18x+5 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 3 + 9 - 9 + 5 = (3x+3)^2 - 4$. Тогда получим:

$$\int \frac{dx}{9x^2 + 18x + 5} = \int \frac{dx}{(3x+3)^2 - 4} = \left| \begin{array}{l} 3x+3=t \\ x=\frac{t-3}{3} \quad dx=\frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{3} \frac{dt}{t^2 - 2^2} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = \frac{1}{12} \ln \left| \frac{3x+3-2}{3x+3+2} \right| + C = \frac{1}{12} \ln \left| \frac{3x+1}{3x+5} \right| + C.$$

$$\text{г) } \int \frac{8x^3}{2x+1} dx = \left| \begin{array}{l} 2x+1=t \\ x=\frac{t-1}{2} \quad dx=\frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{2} \frac{8 \left(\frac{t-1}{2} \right)^3}{t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{8(t-1)^3}{8t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{t^3 - 3t^2 + 3t - 1}{t} dt = \frac{1}{2} \int \left(t^2 - 3t + 3 - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{6} t^3 - \frac{3}{4} t^2 + \frac{3}{2} t - \frac{1}{2} \ln|t| + C =$$

$$= \frac{1}{6} (2x+1)^3 - \frac{3}{4} (2x+1)^2 + \frac{3}{2} (2x+1) - \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C.$$

Пример 2. Найти неопределенные интегралы: а) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int x^2 e^{-x+1} dx$.
Решение. а)

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \rightarrow \text{дифференцируем} \rightarrow \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{x}} \rightarrow \text{интегрируем} \rightarrow \quad v = \int dv = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-1/2} dx = 2x^{1/2} \end{array} \right| =$$

$$= \ln x \cdot 2x^{1/2} - \int \frac{2x^{1/2} dx}{x} = \ln x \cdot 2x^{1/2} - \int 2x^{-1/2} dx = \ln x \cdot 2x^{1/2} - 4x^{1/2} + C.$$

$$\text{б) } \int x^2 e^{-x+1} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \rightarrow \text{дифференцируем} \rightarrow \quad du = 2x dx \\ dv = e^{-x+1} dx \rightarrow \text{интегрируем} \rightarrow \quad v = \int e^{-x+1} dx = -e^{-x+1} \end{array} \right| =$$

$$= -x^2 e^{-x+1} + 2 \int e^{-x+1} x dx.$$

К полученному интегралу вновь применяем формулу (18):

$$\int e^{-x+1} x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \rightarrow \text{дифференцируем} \rightarrow \quad du = dx \\ dv = e^{-x+1} dx \rightarrow \text{интегрируем} \rightarrow \quad v = \int e^{-x+1} dx = -e^{-x+1} \end{array} \right| =$$

$$= -xe^{-x+1} - \int e^{-x+1} dx = -xe^{-x+1} - e^{-x+1}.$$

В итоге получаем:

$$\int x^2 e^{-x+1} dx = -x^2 e^{-x+1} + 2(-xe^{-x+1} - e^{-x+1}) + C = -x^2 e^{-x+1} - 2xe^{-x+1} - 2e^{-x+1} + C =$$

$$= -(x^2 + 2x + 2)e^{-x+1} + C.$$

3. Выполните все задания.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.3. Интегралы и их применение

Практическое занятие № 5

Применение определённых интегралов

Цель: формирование умений решать задачи на применение определённых интегралов.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять методы дифференциального и интегрального исчисления.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = 2x$.
2. Вычислите объём тела вращения фигуры, ограниченной $y = \sqrt{x}$, $x=4$, $y=0$, вокруг оси ОХ.
3. Тело движется со скоростью $v(t) = 3t^2 - 2t$. Найдите путь за время от $t=0$ до $t=2$.
4. Найдите длину дуги кривой $y = (2/3)x^{3/2}$ на отрезке $[0; 3]$.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 1. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=466080>):

с. 239-245, п. 9.4. Приложения определенного интеграла.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Найти площадь между $y = x^2$ и $y = x$.

Решение. Пересечение: $x^2 = x \Rightarrow x=0, x=1$. При $0 \leq x \leq 1$: $x \geq x^2$.

$$S = \int_0^1 (x - x^2) dx = [x^2/2 - x^3/3]_0^1 = 1/2 - 1/3 = 1/6.$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 2.1. Векторы и операции над ними

Практическое занятие № 6

Операции с векторами. Применение скалярного и векторного произведений в задачах аналитической геометрии

Цель: формирование умений выполнять операции над векторами, формирование умений решать задачи по теории алгебры векторов.

Выполнив работу, вы будете уметь: выполнять операции над векторами.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Решить задачи.

а) Даны векторы $\vec{a} = (4; -2; 4)$ и $\vec{b} = (4; -2; -4)$. Найти: а) векторы $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a}$ и $\vec{d} = 2\vec{a} + \vec{b}$; б) угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{d}$.

б) Найти координаты и длину вектора $\overline{AB}$, если $A(2, -3)$, $B(4, -2)$.

в) Даны векторы $\vec{a} = (3; -1)$, $\vec{b} = (1; -2)$, $\vec{c} = (-1; 7)$. Найти: а) длину вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; б) разложить вектор $\vec{p}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Выполнить:

1) вычислить скалярное произведение $\vec{b}, \vec{c}$;

2) проверить, будут ли коллинеарными или ортогональными векторы $\vec{a}, \vec{c}$.

3) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;

4) найти модуль векторного произведения $\vec{a}, \vec{b}$;

5) проверить, будут ли компланарными векторы $\vec{a}, \vec{b}, 3\vec{c}$.

3. Вершины пирамиды находятся в точках $A(3, 4, 5)$, $B(1, 2, 1)$, $C(-2, -3, 6)$, $D(3, -6, -3)$. Вычислить:

1) площадь грани ACD;

2) объем пирамиды ABCD.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/catalog/product/2236736>):

с. 59-85, п. 5.1.-5.10. Геометрические векторы.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Даны векторы $\vec{a} = (2, -1, -2)$ и $\vec{b} = (8, -4, 0)$. Найти: а) векторы $\vec{c} = 2\vec{a}$ и $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$; б) длины векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$; в) скалярный квадрат вектора $\vec{d}$; г) скалярное произведение векторов $(\vec{c}, \vec{d})$; д) угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{d}$.

Решение. а) По определению $\vec{c} = 2\vec{a} = (4, -2, -4)$; $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = (6, -3, 2)$.

б) По формуле (1) найдем длины векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$:

$$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 6, \quad |\vec{d}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = 7.$$

в) По формуле (3) скалярный квадрат равен квадрату модуля вектора, т.е.

$$(\vec{d}, \vec{d}) = \vec{d}^2 = |\vec{d}|^2 = 7^2 = 49.$$

г) По формуле (2) скалярное произведение равно:

$$(\vec{c}, \vec{d}) = 4 \cdot 6 + (-2) \cdot (-3) + (-4) \cdot 2 = 22.$$

д) По формуле (4) угол между векторами $\bar{c}$ и $\bar{d}$ определяется равенством:

$$\cos \varphi = \frac{(\bar{c}, \bar{d})}{\|\bar{c}\| \|\bar{d}\|} = \frac{22}{6 \cdot 7} = 0,52$$

, откуда $\varphi = \arccos 0,52 \approx 58^\circ$.

Пример 2. Даны векторы $\bar{a} = 4\bar{i} + 4\bar{k}$, $\bar{b} = -\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} + 5\bar{j}$. Выполните следующие действия: а) вычислите скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $3\bar{b}$; б) проверьте, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$; в) вычислите смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $5\bar{c}$; г) найдите модуль векторного произведения $3\bar{c}$ и $\bar{b}$; д) проверьте, будут ли компланарны векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Решение. а) Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ в базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ имеют координаты $\bar{a} = (4, 0, 4)$, $\bar{b} = (-1, 3, 2)$, $\bar{c} = (3, 5, 0)$. Координаты вектора $3\bar{b} = (-3, 9, 6)$. По формуле (2) вычисляем: $(\bar{a}, 3\bar{b}) = 4(-3) + 0 \cdot 9 + 4 \cdot 6 = 12$.

б) Проверим, выполняются ли условия ортогональности и коллинеарности векторов:

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0, \quad \bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Используя координаты векторов $\bar{a} = (4, 0, 4)$ и $\bar{b} = (-1, 3, 2)$, убеждаемся, что ни одно из условий не выполняется:

$4(-1) + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \neq 0$ ® $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не ортогональны;

$\frac{4}{-1} \neq \frac{0}{3} \neq \frac{4}{2}$ ® $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не коллинеарны.

в) Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ в базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ имеют координаты $\bar{a} = (4, 0, 4)$, $\bar{b} = (-1, 3, 2)$, $\bar{c} = (3, 5, 0)$, $5\bar{c} = (15, 25, 0)$. По формуле (6) находим

$$\bar{a} \bar{b} (5\bar{c}) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 15 & 25 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 100 + 0 - 180 - 200 - 0 = -480.$$

г) Координаты вектора $3\bar{c} = (9, 15, 0)$. По формуле (5) вычисляем:

$$(3\bar{c}) \times \bar{b} = \left(\begin{vmatrix} 15 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 9 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 9 & 15 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (30, -18, 42)$$

по формуле (1) $|(3\bar{c}) \times \bar{b}| = \sqrt{30^2 + 18^2 + 42^2} = \sqrt{2988} = \sqrt{36 \cdot 83} = 6\sqrt{83}$.

д) По формуле (6) находим

$$\overline{abc} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 20 + 0 - 36 - 40 - 0 = -96 \neq 0.$$

Значит, $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ не компланарны.

Пример 3. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2, 3, 4)$, $B(4, 7, 3)$, $C(1, 2, 2)$, $D(-2, 0, -1)$. Вычислить: а) площадь грани ABC ; б) объем пирамиды $ABCD$.

Решение. а) Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, который

построен на тех же векторах, т.е. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|$. Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:
 $\overline{AB} = (4 - 2, 7 - 3, 3 - 4) = (2, 4, -1)$; $\overline{AC} = (1 - 2, 2 - 3, 2 - 4) = (-1, -1, -2)$.

Вычислим векторное произведение по формуле (5):

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \left(\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-9, 5, 2)$$

. В соответствии с

геометрическим смыслом векторного произведения

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{(-9)^2 + 5^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{110}$$

б) Найдем координаты вектора $\overline{AD}$: $\overline{AD} = (-4, -3, -5)$. Смешанное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ вычисляем по формуле (6):

$$\overline{ABACAD} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 11$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 2.2. Матрицы и системы линейных уравнений

Практическое занятие № 7

Операции с матрицами

Цель: формирование умений выполнять операции над матрицами.

Выполнив работу, вы будете уметь: строить математические модели, решать системы линейных алгебраических уравнений разными методами.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Найти матрицу $C = A^2 + 3AB$ $C = A^2 + 3AB$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Даны матрицы: $A = (-3 \ 2 \ -3 \ 1 \ 5 \ -2 \ 2 \ 4 \ -1)$ и $B = (1 \ 0 \ -5 \ 3 \ -4 \ 1 \ 0 \ -2 \ 2)$. Найдите: $A+B$; $2A$; AB ; BA .

3. Даны матрицы: $A = (6 \ -1 \ 4 \ 0 \ 3 \ 2 \ 3 \ 8 \ -2)$, $B = (9 \ -1 \ 5 \ 7 \ 0 \ 3 \ 1 \ 4 \ -1)$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Найдите: $2A+5B$; AC^T .

4. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -15 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -15 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, д) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 & -1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 & -1 & 3 & 2 & 7 & 4 \end{vmatrix}$.

5. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 5 \\ 7 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, найдите обратные.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/catalog/product/2236736>):

- с. 31-33, п. 3.1. Описание и виды матриц;
- с. 33-36, п. 3.2. Операции над матрицами;
- с. 36-41, п. 3.3. Определители и их свойства;
- с. 41-46, п. 3.4. Обратная матрица.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Для матриц A , B , C найти: а) $2A+5B$; б) AC^T .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 9 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$а) 2A + 3B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 18 & 10 & 6 \\ 8 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 3 & 15 \\ -9 & 12 & 18 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 13 \\ 9 & 22 & 24 \\ 8 & 9 & -4 \end{pmatrix}.$$

б) Транспонируем матрицу C .

$$C^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что C^T имеет размерность 3×2 , A – размерность 3×3 . Следовательно, произведение AC^T существует и имеет размерность 3×2 .

$$AC^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 9 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix}$$

Каждый элемент α_{ij} ($i=1,2,3, j=1,2$) равен сумме произведений соответствующих элементов i -й строки матрицы A и j -го столбца матрицы C^T .

$$\alpha_{11} = 2 \cdot 2 + 3(-3) + (-1) \cdot 1 = -6$$

$$\alpha_{12} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 = 22$$

$$\alpha_{21} = 9 \cdot 2 + 5(-3) + 3 \cdot 1 = 6$$

$$\alpha_{22} = 9 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 64$$

$$\alpha_{31} = 4 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) + (-2) \cdot 1 = 6$$

$$\alpha_{32} = 4 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + (-2) \cdot 1 = 14.$$

$$AC^T = \begin{pmatrix} -6 & 22 \\ 6 & 64 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Вычислить определители второго и третьего порядка:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-4) = 12 + 12 = 24 \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-4) = 12 + 12 = 24$$

$$2) \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$$

$$6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = -15 + 48 - 6 - 18 =$$

$$6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = -15 + 48 - 6 - 18 =$$

$$= 48 - 39 = 9 = 48 - 39 = 9$$

$$3) \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -7 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-7) \cdot 1 + (-6) \cdot (-3) \cdot 5 -$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -7 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-7) \cdot 1 + (-6) \cdot (-3) \cdot 5 -$$

$$-5 \cdot 2 \cdot 1 - (-6) \cdot 0 \cdot 2 - (-3) \cdot (-7) = 16 + 0 + 90 - 10 - 0 - 84 = 12$$

Пример 3. Вычислить определитель четвертого порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение: Для разложения определителя можно выбрать любую строку (столбец). В данном примере разложим определитель по элементам 2-й строки, т. к. в ней содержится нулевой элемент ($a_{22} = 0$).

Формула разложения определителя по 2-й строке:

$$\det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} = 1A_{21} + 0 + 5A_{23} + 2A_{24},$$

где A_{2i} ($i = 1 \dots 4$) – алгебраические дополнения к элементам a_{2i} .

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -(-11) = 11$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -(-9) = 9$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 40$$

$$\det A = 1 \cdot 11 + 5 \cdot 9 + 2 \cdot 40 = 136.$$

Пример 4. Для матрицы A найдите обратную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 9 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 9 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 90$$

$\det A \neq 0$, следовательно A^{-1} существует. Найдем присоединенную матрицу A^*

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Здесь A_{ij} – алгебраические дополнения к соответствующим элементам a_{ij} матрицы A .

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 30$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 14$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -20$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = -15$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = -17.$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Итак, присоединенная матрица имеет вид

$$A^* = \begin{pmatrix} -10 & 6 & 14 \\ 30 & 0 & -15 \\ -20 & 12 & -17 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$$

, следовательно, $A^{-1} = (-10 \ 6 \ 14 \ 30 \ 0 \ -15 \ -20 \ 12 \ -17)$.

Проверяем правильность вычисления обратной матрицы по формулам $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 2.2. Матрицы и системы линейных уравнений

Практическое занятие № 8

Решение СЛАУ методами Гаусса, Крамера и при помощи обратной матрицы

Цель: формирование умений решать системы линейных уравнений различными методами.

Выполнив работу, вы будете уметь: строить математические модели, решать системы линейных алгебраических уравнений разными методами.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Решить системы линейных уравнений с тремя неизвестными по правилу Крамера, методом Гаусса матричным методом:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5; \end{cases} \end{array}$$

2. Решить системы линейных уравнений с четырьмя неизвестными методом Гаусса:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases} \end{array}$$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/catalog/product/2236736>):

- с. 48, п. 4.1. Основные определения;
- с. 48-50, п. 4.2. Правило Крамера;
- с. 51-58, п. 4.3. Метод Жордана-Гаусса.

2. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Гулиян Б.Ш. Элементы высшей математики. (Режим доступа: <https://book.ru/book/955434>):

- с. 55-60, п. 9. Обратная матрица.
- 3. Ознакомьтесь с примерами решения.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Пример 1. Решить систему уравнений методом Крамера:

Решение. Составим матрицу из коэффициентов системы уравнений и вычислим ее

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A| = 5 \neq 0.$$

определитель: . Так как $\Delta \neq 0$, то по теореме Крамера система имеет единственное решение.

Вычислим определители матриц A_1 , A_2 , A_3 , полученных из матрицы A , заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20; \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5$$

Теперь по формулам Крамера найдем значения переменных:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{20}{5} = 4, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{10}{5} = 2, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{5}{5} = 1$$

Ответ: (4; 2; 1).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Пример 2. Решить систему уравнений методом Гаусса:

Решение.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ -x_2 - 7x_3 = -8, \\ -5x_2 - 13x_3 = -18; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ -x_2 - 7x_3 = -8, \\ 22x_3 = 22; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 6 - 2x_2 - 3x_3, \\ x_2 = \frac{-8 + 7x_3}{-1}, \\ x_3 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Ответ: (1; 1; 1).

Пример 3. Решить систему уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1. \end{cases}$$

Решение. Выполним преобразования с помощью расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -6 & 1 \end{array} \right) \quad \xrightarrow{\text{®}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \end{array} \right) \quad \xrightarrow{\text{®}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right).$$

Полученной матрице соответствует система
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ -4x_3 + 5x_4 = -4, \\ 0x_4 = -6. \end{cases}$$
 Третье уравнение системы не имеет решений, следовательно, система решений не имеет.

Ответ: система несовместна.

Пример 4. Решить систему уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу и выполним первый шаг гауссовых исключений:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{®}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array} \right).$$

Разделим третью строку на 3 и выполним второй ход гауссовых исключений:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{®}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Последней матрице соответствует система уравнений:
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ -x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим: $x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4$ и, подставив в первое уравнение, получим: $x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4$.

Итак, $x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4$, $x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4$, x_3, x_4 — любые числа.

Ответ: система неопределенная и имеет бесконечное множество решений.

Пример 5. Решить матричным способом систему
$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -8. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем матрицы A и B :

Убедимся, что $\det A \neq 0$, и найдем A^{-1} :

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8, \quad A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, Система имеет единственное решение.

Ответ: (-10; -6; -4).

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 2.3. Сингулярное разложение матриц (SVD)

Практическое занятие № 9

Реализация сингулярного разложения матрицы с помощью вычислительных методов

Цель: формирование умений сингулярного разложения матриц.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять SVD для анализа многомерных данных и уменьшения размерности данных в задачах машинного обучения.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Вычислим SVD простой матрицы вручную и проверим результаты в Python.

Рассчитаем SVD следующей матрицы размером 3×3 :

$A = (123456789)$

Задания:

Выполните пошагово ручной расчёт сингулярного разложения данной матрицы.

Проверьте результаты в Python, используя библиотеку NumPy.

```
import numpy as np

# исходная матрица A
A = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]])
```

```
# рассчитываем SVD
U, s, VT = np.linalg.svd(A)
print("Матрица U:\n", U)
print("\nДиагональная матрица  $\Sigma$ :\n", np.diag(s))
print("\nМатрица V транспонированная:\n", VT)
```

2. Используйте SVD для уменьшения размерности набора данных.

Получите набор случайных данных, проведите сингулярное разложение и уменьшите количество признаков.

Задания:

Создайте набор случайных данных размером 100×10.

Примените SVD для понижения размерности до трех первых сингулярных чисел.

Отобразите преобразованные данные графически.

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
# генерируем случайные данные
X = np.random.randn(100, 10)
```

```
# используем SVD для понижения размерности
```

```
U, s, VT = np.linalg.svd(X)
reduced_data = U[:, :3]
```

```
plt.scatter(reduced_data[:, 0], reduced_data[:, 1])
plt.title('Данные после понижения размерности')
plt.show()
```

3. Сжатие изображения с помощью SVD.

Применим SVD для снижения разрешения фотографии.

Задания:

Загрузите чёрно-белое изображение небольшого размера.

Преобразуйте его в двумерный массив пикселей.

Примените SVD для постепенного сокращения числа сингулярных чисел и наблюдайте влияние на визуализацию изображения.

```
from PIL import Image
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
img = Image.open('example_image.jpg').convert('L') # конвертируем в оттенки серого
img_array = np.asarray(img)
```

```
U, s, VT = np.linalg.svd(img_array)
```

```
for k in range(1, len(s)+1):
    compressed_img = U[:, :k].dot(np.diag(s[:k])).dot(VT[:, k, :])
    plt.imshow(compressed_img, cmap='gray')
    plt.title(f'Компрессия с {k} сингулярными значениями')
    plt.show()
```

Порядок выполнения работы:

1. Проанализировать условие задачи.
2. Выполнить решение, применяя необходимые формулы.
3. Записать ответ.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 2.3. Сингулярное разложение матриц (SVD)**Практическое занятие № 10****Применение SVD для анализа многомерных данных. Уменьшение размерности данных с использованием SVD в задачах машинного обучения.**

Цель: формирование умений сингулярного разложения (SVD) для анализа и преобразования многомерных данных.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять SVD для анализа многомерных данных и уменьшения размерности данных в задачах машинного обучения.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:**Практика 1. Снижение размерности многомерных данных с помощью SVD.**

Задача: применить SVD для понижения размерности двумерного набора данных и сравнить качество моделей регрессии/классификации.

Инструкция:

Загрузите небольшой набор данных (например, IRIS dataset).

Подготовьте данные: нормировка, стандартизация.

Примените SVD для уменьшения размерности до трёх новых координат.

Постройте график зависимости качества модели классификации от количества использованных сингулярных чисел.

Код:

```
import numpy as np
from sklearn.datasets import load_iris
from sklearn.decomposition import TruncatedSVD
from sklearn.model_selection import train_test_split
from sklearn.linear_model import LogisticRegression
from sklearn.metrics import accuracy_score

# загрузка данных
data = load_iris()
X = data.data
y = data.target
```

```

# разделение выборки на обучение и тестирование
X_train, X_test, y_train, y_test = train_test_split(X, y,
test_size=0.3, random_state=42)

# применим SVD для снижения размерности
s = []
acc_scores = []
for i in range(1, min(X.shape)):
    svd = TruncatedSVD(n_components=i)
    X_train_reduced = svd.fit_transform(X_train)

    model = LogisticRegression(max_iter=1000)
    model.fit(X_train_reduced, y_train)

    X_test_reduced = svd.transform(X_test)
    pred = model.predict(X_test_reduced)
    acc = accuracy_score(y_test, pred)

    s.append(i)
    acc_scores.append(acc)

# построим график зависимости точности от количества компонентов
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(s, acc_scores, marker='o', linestyle='-', color='b')
plt.xlabel('Количество сингулярных чисел')
plt.ylabel('Точность классификации')
plt.title('Качество классификатора в зависимости от размеров пространства')
plt.grid(True)
plt.show()

```

Практика 2. Анализ шума и фильтрация сигналов с помощью SVD.

Задача: применить SVD для очистки зашумлённого сигнала.

Инструкция:

Генерируйте случайный сигнал с наложенным шумом.

Примените SVD для выделения основной структуры сигнала путём отбрасывания малых сингулярных чисел.

Визуализируйте очищенный сигнал и сравните с оригиналом.

Код:

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# создаём сигнал с шумом
x = np.linspace(-np.pi*10, np.pi*10, 1000)
signal = np.sin(x) + np.cos(x)
noise = np.random.normal(scale=0.5, size=x.size)
noisy_signal = signal + noise

# применяем SVD для удаления шума
U, s, VT = np.linalg.svd(noisy_signal.reshape(-1, 1))
cleaned_signal = U.dot(np.diag(s)).dot(VT)[0]

```

```
# строим графики
plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(x, noisy_signal, label="Шумный сигнал")
plt.legend()

plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(x, cleaned_signal, label="Очищенный сигнал")
plt.legend()
plt.show()
```

Порядок выполнения работы:

1. Проанализировать условие задачи.
2. Выполнить решение, применяя необходимые формулы.
3. Записать ответ.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3.1. Линейные модели

Практическое занятие № 11

Построение линейной модели на основе экспериментальных данных. Оценка параметров линейной регрессии с помощью метода наименьших квадратов

Цель: формирование умений построения линейной модели.

Выполнив работу, вы будете уметь: строить математические модели, решать системы линейных алгебраических уравнений разными методами.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Простейший пример оценки параметров линейной регрессии вручную.

Задача: по заданному набору данных построить простую линейную модель вида $y=a+bx$ и оценить параметры a и b методом наименьших квадратов.

Исходные данные:

x	y
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6

Расчёты:

$$n = 5$$
$$\sum x_i = 15, \quad \sum y_i = 20, \quad \sum x_i^2 = 55, \quad \sum x_i y_i = 55$$

Решение вручную:

Найти среднее арифметическое:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{n}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_i y_i}{n}$$

Определить коэффициент наклона линии регрессии:

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Константа пересечения оси Y:

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$$

Задание: Решить задачу вручную, провести расчеты и убедиться в правильности формул.

2. Автоматизированное решение с использованием Python.

Задача: реализовать оценку параметров линейной регрессии с помощью библиотеки NumPy и проверить качество модели.

Код:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# исходные данные
x = np.array([1, 2, 3, 4, 5])
y = np.array([2, 3, 4, 5, 6])

# найдем коэффициенты линейной регрессии
A = np.vstack([x, np.ones(len(x))]).T
m, c = np.linalg.lstsq(A, y, rcond=None)[0]

# построим линию регрессии
line_y = m * x + c

# отображаем точки и линию регрессии
plt.scatter(x, y, color='blue', label='Экспериментальные данные')
plt.plot(x, line_y, color='red', label=f'Регрессия: y={m:.2f}*x+{c:.2f}')
plt.legend()
plt.show()

# подсчитаем коэффициент детерминации R²
SSR = sum((line_y - np.mean(y))**2)
SSE = sum((y-line_y)**2)
R_squared = SSR / (SSR+SSE)
print(f"Коэффициент детерминации R²: {R_squared}")
```

3. Анализ реальных данных.

Задача: подобрать оптимальную линейную модель для описания взаимосвязи между двумя показателями (например, расходы на рекламу и продажи товаров).

Задание:

Загрузите реальные данные (например, набор данных Boston Housing Dataset).

Выделите признаки и целевую переменную.

Проведите линейную регрессию и проанализируйте качество модели.

Порядок выполнения работы:

1. Проанализировать условие задачи.
2. Выполнить решение, применяя необходимые формулы.
3. Записать ответ.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3.1. Линейные модели

Практическое занятие № 12

Применение линейных моделей для предсказания значений

Цель: формирование умений применять линейные модели для предсказания значений.

Выполнив работу, вы будете уметь: строить математические модели, решать системы линейных алгебраических уравнений разными методами.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Простая линейная регрессия.

Задача: исследовать зависимость между объемом рекламы и количеством проданного товара.

Шаг 1. Сбор данных: Имеются следующие данные о затратах на рекламу (в тыс. рублей) и количестве проданного товара (в штуках):

Затраты на рекламу	Продажи
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

Шаг 2. Подготовка данных: Запишите данные в виде массива Python.

Шаг 3. Построение модели: Создайте модель простой линейной регрессии с помощью библиотеки scikit-learn.

Шаг 4. Предсказание: Сделайте прогнозы по новым данным затрат на рекламу и проверьте точность модели.

Код:

```
import numpy as np
from sklearn.linear_model import LinearRegression
import matplotlib.pyplot as plt
```

```

# Данные
advertising_cost = np.array([1, 2, 3, 4, 5]).reshape(-1, 1)
sales_volume = np.array([1, 2, 3, 4, 5])

# Модель
model = LinearRegression().fit(advertising_cost, sales_volume)

# Прогнозируем новые значения
new_advertising_cost = np.array([6, 7, 8]).reshape(-1, 1)
predicted_sales = model.predict(new_advertising_cost)

# Показываем результаты
plt.scatter(advertising_cost, sales_volume, color='black')
plt.plot(advertising_cost, model.predict(advertising_cost),
color='blue', linewidth=3)
plt.scatter(new_advertising_cost, predicted_sales, color='green')
plt.show()

```

2. Многомерная линейная регрессия.

Задача: построить модель прогнозирования цены дома исходя из площади жилья и количества комнат.

Шаг 1. Собрать данные: Имеются данные о цене домов, площади и числе комнат:

Площадь (м²)	Количество комнат	Цена (тыс. руб.)
50	2	3
60	3	4
70	4	5
80	5	6
90	6	7

Шаг 2. Подготовка данных: Преобразуйте данные в подходящий формат для дальнейшего анализа.

Шаг 3. Моделирование: Постройте многомерную линейную регрессию.

Шаг 4. Проверка качества модели: Посмотрите, насколько хорошо ваша модель предсказывает цену дома.

Код:

```

import pandas as pd
from sklearn.linear_model import LinearRegression
from sklearn.metrics import mean_absolute_error

```

```

# Данные
df = pd.DataFrame({
    'Площадь': [50, 60, 70, 80, 90],
    'Комнат': [2, 3, 4, 5, 6],
    'Цена': [3, 4, 5, 6, 7]
})

```

```

# Тренировочная выборка

```

```

X = df[['Площадь', 'Комнат']]
y = df['Цена']

```

```
# Строим модель
model = LinearRegression().fit(X, y)

# Тестовые данные
test_X = [[100, 7]]
predicted_price = model.predict(test_X)

# Оцениваем точность
mae = mean_absolute_error(y, model.predict(X))

print(f'Прогнозируемая цена дома: {predicted_price}, MAE: {mae}')
```

Порядок выполнения работы:

1. Проанализировать условие задачи.
2. Выполнить решение, применяя необходимые формулы.
3. Записать ответ.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3.2. Нелинейные модели

Практическое занятие №13

Построение полиномиальной модели для аппроксимации данных

Цель: формирование умений построения полиномиальной модели для аппроксимации данных.

Выполнив работу, вы будете уметь: строить математические модели, решать системы линейных алгебраических уравнений разными методами.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Построение простой полиномиальной модели.

Задача: построить полиномиальную модель второй степени для данных, отражающих зависимость урожайности зерновых культур от температуры окружающей среды.

Шаг 1. Набор данных:

Температура (°C)	Урожайность (кг/га)
10	200
15	300
20	400
25	500

30	600
----	-----

Шаг 2. Запишите данные в массив Python.

Шаг 3. Подберите полином второго порядка для аппроксимации данных.

Шаг 4. Сделайте прогноз урожая при температуре 22 градуса.

Код:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from sklearn.preprocessing import PolynomialFeatures
from sklearn.linear_model import LinearRegression

# Исходные данные
temperature = np.array([10, 15, 20, 25, 30]).reshape(-1, 1)
yield_values = np.array([200, 300, 400, 500, 600])

# Построим полином второй степени
poly_features = PolynomialFeatures(degree=2)
X_poly = poly_features.fit_transform(temperature)

# Линейная регрессия для полиномиальной модели
regressor = LinearRegression()
regressor.fit(X_poly, yield_values)

# Построим график
plt.scatter(temperature, yield_values, color='black')
plt.plot(temperature, regressor.predict(X_poly), color='blue')
plt.title('Аппроксимация полиномом 2-й степени')
plt.show()

# Прогнозируем урожайность при T=22°C
temp_new = np.array([22]).reshape(-1, 1)
X_poly_new = poly_features.transform(temp_new)
predicted_yield = regressor.predict(X_poly_new)
print(f'Урожайность при температуре 22°C: {predicted_yield[0]:.2f} кг/га')
```

Подбор оптимальной степени полинома.

Задача: подобрать лучшую степень полинома для аппроксимации временных рядов потребления энергии домохозяйством.

Шаг 1. Имеются данные о потреблении энергии за неделю:

Время суток (час)	Потребление энергии (Вт/ч)
0	100
1	120
2	110
...	...
23	150

Шаг 2. Экспериментально выберите оптимальную степень полинома, оценив меру соответствия R2R2 и MSE.

Код:

```
from sklearn.metrics import r2_score, mean_squared_error
```

```

hours = np.arange(24).reshape(-1, 1)
energy_consumption = np.array([100, 120, 110, 130, 140, 150, 160, 170, 180,
190, 200, 210, 220, 230, 240, 250, 260, 270, 280, 290, 300, 310, 320, 330])

best_degree = None
best_r2 = float('-inf')

for degree in range(1, 6):
    poly_features = PolynomialFeatures(degree=degree)
    X_poly = poly_features.fit_transform(hours)
    regressor = LinearRegression()
    regressor.fit(X_poly, energy_consumption)
    predictions = regressor.predict(X_poly)
    current_r2 = r2_score(energy_consumption, predictions)
    if current_r2 > best_r2:
        best_r2 = current_r2
        best_degree = degree

print(f"Оптимальная степень полинома: {best_degree}, R^2: {best_r2:.2f}")

```

3. Самостоятельная работа

Выбор конкретного набора данных (например, температурные условия и урожайность пшеницы), проведение полного цикла анализа и построения полиномиальной модели, включая подбор оптимальной степени полинома и проверку качества аппроксимации.

Порядок выполнения работы:

1. Проанализировать условие задачи.
2. Выполнить решение, применяя необходимые формулы.
3. Записать ответ.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3.2. Нелинейные модели

Практическое занятие №14

Решение задач прогнозирования с помощью экспоненциальной и логарифмической нелинейных моделей

Цель: формирование умений решать задачи прогнозирования.

Выполнив работу, вы будете уметь: строить математические модели, решать системы линейных алгебраических уравнений разными методами.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:**1. Экспоненциальная модель прогнозирования численности популяции животных.**

Задача: построить экспоненциальную модель для прогнозирования динамики численности популяции кроликов, основываясь на начальных данных.

Шаг 1. Начальные данные:

Год	Численность
2010	100
2011	120
2012	144
2013	173
2014	207

Шаг 2. Построить экспоненциальную модель, подобрав оптимальный параметр kk :

Код:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import curve_fit

def exponential_func(t, k):
    return 100 * np.exp(k*(t-2010))

years = np.array([2010, 2011, 2012, 2013, 2014])
population = np.array([100, 120, 144, 173, 207])

p_optimal, _ = curve_fit(exponential_func, years, population)
fitted_population = exponential_func(years, p_optimal)

plt.scatter(years, population, color='black', label='Фактические данные')
plt.plot(years, fitted_population, color='red', label='Экспоненциальная модель')
plt.title('Прогноз численности популяции кроликов')
plt.legend()
plt.show()
```

2. Логарифмическое сглаживание временного ряда экономических показателей.

Задача: построить логарифмическую модель для прогнозирования доходов компании, учитывая растущую нестабильность рынка.

Шаг 1. Входные данные:

Год	Доход (млрд Р)
2010	10
2011	15
2012	20
2013	25
2014	30

Шаг 2. Построить логарифмическую модель:

Код:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```

from scipy.optimize import curve_fit

def log_function(x, a, b):
    return a*np.log(b*x)

years = np.array([2010, 2011, 2012, 2013, 2014])
revenue = np.array([10, 15, 20, 25, 30])

params, _ = curve_fit(log_function, years, revenue)
fitted_revenue = log_function(years, params[0], params[1])

plt.scatter(years, revenue, color='black', label='Фактические доходы')
plt.plot(years, fitted_revenue, color='blue', label='Логарифмическая модель')
plt.title('Прогноз доходов компании')
plt.legend()
plt.show()

```

3. Самостоятельная работа

Выбор конкретного набора данных (например, темпы распространения вируса гриппа, экономические показатели страны) и проведение полной процедуры анализа и построения соответствующей нелинейной модели (экспоненциальной или логарифмической).

Порядок выполнения работы:

1. Проанализировать условие задачи.
2. Выполнить решение, применяя необходимые формулы.
3. Записать ответ.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.