

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Многопрофильный колледж

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**ОП.01 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ В ОТРАСЛИ ИНФОРМАЦИОННЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ**

**для обучающихся специальности
09.02.11 Разработка и управление программным обеспечением**

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ	3
2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ	4
Практическое занятие № 1	4
Практическое занятие № 2	5
Практическое занятие № 3	7
Практическое занятие № 4	9
Практическое занятие № 5	10
Практическое занятие № 6	12
Практическое занятие № 7	13
Практическое занятие № 8	15
Практическое занятие № 9	17
Практическое занятие № 10	18
Практическое занятие № 11	20
Практическое занятие № 12	21
Практическое занятие № 13	22
Практическое занятие № 14	23
Практическое занятие № 15	24
Практическое занятие № 16	25
Практическое занятие № 17	26
Практическое занятие № 18	26
Практическое занятие № 19	27
Практическое занятие № 20	28
Практическое занятие № 21	29
Практическое занятие № 22	31
Практическое занятие № 23	32
Практическое занятие № 24	33
Практическое занятие № 25	34
Практическое занятие № 26	36
Практическое занятие № 27	37
Практическое занятие № 28	38
Практическое занятие № 29	39
Практическое занятие № 30	39
Практическое занятие № 31	40
Практическое занятие № 32	41
Практическое занятие № 33	42
Практическое занятие № 34	42
Практическое занятие № 35	43
Практическое занятие № 36	44
Практическое занятие № 37	45
Практическое занятие № 38	46
Практическое занятие № 39	46
Практическое занятие № 40	47

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки обучающихся составляют практические занятия.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование профессиональных практических умений (умений выполнять определенные действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности) или учебных практических умений (умений решать задачи по математике), необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математический аппарат в отрасли информационных технологий» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения, обучающийся должен уметь:

Уд 1. Выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений.

Уд 2. Выполнять операции над векторами.

Уд 3. Выполнять действия над комплексными числами.

Уд 4. Применять формулы и законы алгебры логики для преобразования логических выражений.

Уд 5. Выполнять операции над множествами.

Уд 6. Определять типы графов и давать их характеристики.

Уд 7. Применять методы дифференциального и интегрального исчисления.

Уд 8. Применять стандартные методы и модели к решению вероятностных и статистических задач.

Уд 9. Применять современные пакеты прикладных программ многомерного статистического анализа.

Содержание практических занятий ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению **профессиональными компетенциями:**

ПК 2.4. Выполнять тестирование и отладку программного обеспечения.

А также формированию общих компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

Практические занятия проводятся в рамках соответствующей темы, после освоения дидактических единиц, которые обеспечивают наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1. Матрицы и определители

Практическое занятие № 1

Операции над матрицами

Цель: формирование умений выполнять операции над матрицами.

Выполнив работу, вы будете уметь: выполнять операции над матрицами.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Найти матрицу $C = A^2 + 3AB$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите: $A+B$; $2A$; AB ; BA .
3. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 5 \\ 7 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Найдите: $2A+5B$; AC^T .

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/catalog/product/2236736>):

с. 31-33, п. 3.1. Описание и виды матриц;

с. 33-36, п. 3.2. Операции над матрицами.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Для матриц A , B , C найти: а) $2A+5B$; б) AC^T .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 9 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\text{а) } 2A + 3B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 18 & 10 & 6 \\ 8 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 3 & 15 \\ -9 & 12 & 18 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 13 \\ 9 & 22 & 24 \\ 8 & 9 & -4 \end{pmatrix}.$$

б) Транспонируем матрицу C .

$$C^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что C^T имеет размерность 3×2 , A – размерность 3×3 .

Следовательно, произведение AC^T существует и имеет размерность 3×2 .

$$AC^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 9 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix}$$

Каждый элемент α_{ij} ($i=1,2,3, j=1,2$) равен сумме произведений соответствующих элементов i -й строки матрицы A и j -го столбца матрицы C^T .

$$\alpha_{11} = 2 \cdot 2 + 3(-3) + (-1) \cdot 1 = -6$$

$$\alpha_{12} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 = 22$$

$$\alpha_{21} = 9 \cdot 2 + 5(-3) + 3 \cdot 1 = 6$$

$$\alpha_{22} = 9 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 64$$

$$\alpha_{31} = 4 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) + (-2) \cdot 1 = 6$$

$$\alpha_{32} = 4 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + (-2) \cdot 1 = 14.$$

$$AC^T = \begin{pmatrix} -6 & 22 \\ 6 & 64 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}.$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.1. Матрицы и определители

Практическое занятие № 2

Вычисление определителей

Цель: формирование умений вычислять определители.

Выполнив работу, вы будете уметь: выполнять операции над матрицами.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Вычислить определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}, \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -15 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}, \quad \text{г) } \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/catalog/product/2236736>):

с. 36-41, п. 3.3. Определители и их свойства.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Вычислить определители второго и третьего порядка:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-4) = 12 + 12 = 24$$

$$2) \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 - \\ - 6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = -15 + 48 - 6 - 18 = \\ = 48 - 39 = 9$$

$$3) \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -7 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-7) \cdot 1 + (-6) \cdot (-3) \cdot 5 - \\ - 5 \cdot 2 \cdot 1 - (-6) \cdot 0 \cdot 2 - (-3) \cdot (-7) = 16 + 0 + 90 - 10 - 0 - 84 = 12$$

Пример 2. Вычислить определитель четвертого порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение: Для разложения определителя можно выбрать любую строку (столбец). В данном примере разложим определитель по элементам 2-й строки, т. к. в ней содержится нулевой элемент ($a_{22} = 0$).

Формула разложения определителя по 2-й строке:

$$\det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} = 1A_{21} + 0 + 5A_{23} + 2A_{24},$$

где A_{2i} ($i = 1 \dots 4$) – алгебраические дополнения к элементам a_{2i} .

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -(-11) = 11$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -(-9) = 9$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 40$$

$$\det A = 1 \cdot 11 + 5 \cdot 9 + 2 \cdot 40 = 136.$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.1. Матрицы и определители

Практическое занятие № 3

Нахождение обратной матрицы. Вычисление ранга матрицы

Цель: формирование умений находить обратную матрицу и ранг матрицы.

Выполнив работу, вы будете уметь: выполнять операции над матрицами.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Выяснить, является матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ обратной к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.
2. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 5 \\ 7 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ найдите обратные.
3. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & -7 & -1 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & -5 & -2 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/catalog/product/2236736>):

с. 41-46, п. 3.4. Обратная матрица;

с. 46-47, п. 3.5. Ранг матрицы.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Для матрицы A найдите обратную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 9 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 9 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 90$$

$\det A \neq 0$, следовательно A^{-1} существует. Найдём присоединенную матрицу A^*

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Здесь A_{ij} – алгебраические дополнения к соответствующим элементам a_{ij} матрицы A .

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 30$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -20$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 14$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = -15$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = -17.$$

Итак, присоединенная матрица имеет вид

$$A^* = \begin{pmatrix} -10 & 6 & 14 \\ 30 & 0 & -15 \\ -20 & 12 & -17 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*, \text{ следовательно, } A^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 6 & 14 \\ 30 & 0 & -15 \\ -20 & 12 & -17 \end{pmatrix}.$$

Проверяем правильность вычисления обратной матрицы по формулам $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Пример 2. Найти ранг матрицы Q.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -4 \\ 1 & 9 & 6 & -7 \\ 2 & 8 & -8 & 1 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для нахождения ранга матрицы достаточно привести ее к ступенчатому виду. Матрица называется ступенчатой, если первый ненулевой элемент каждой строки находится правее первого ненулевого элемента предыдущей строки. Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк. Чтобы привести матрицу Q к ступенчатой форме, совершим над ее строками элементарные преобразования. Они указаны справа от соответствующей строки. Например, $II - 2I$ – из 2-й строки вычитаем 1-ю строку, умноженную на 2 и т. д.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -4 \\ 1 & 9 & 6 & -7 \\ 2 & 8 & -8 & 1 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III - 2I \\ IV - I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -6 & -12 & 9 \\ 0 & -4 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ III + 3II \\ IV + 2II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, ранг матрицы Q равен 2.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.2. Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 4

Решение системы линейных уравнений по формулам Крамера

Цель: формирование умений решать системы линейных уравнений по правилу Крамера.

Выполнив работу, вы будете уметь: решать системы линейных уравнений.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Решить системы линейных уравнений с тремя неизвестными по правилу Крамера:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5; \end{cases} \end{array}$$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/catalog/product/2236736>):

с. 48, п. 4.1. Основные определения;

с. 48-50, п. 4.2. Правило Крамера.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Решить систему уравнений методом Крамера:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Решение. Составим матрицу из коэффициентов системы уравнений и вычислим ее

определитель: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $|A| = 5 \neq 0$. Так как $\Delta \neq 0$, то по теореме Крамера система имеет

единственное решение.

Вычислим определители матриц A_1 , A_2 , A_3 , полученных из матрицы A , заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20; \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5.$$

Теперь по формулам Крамера найдем значения переменных:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{20}{5} = 4, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{10}{5} = 2, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{5}{5} = 1.$$

Ответ: (4; 2; 1).

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.2. Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 5

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

Цель: формирование умений решать системы линейных уравнений методом Гаусса.

Выполнив работу, вы будете уметь: решать системы линейных уравнений.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Решить системы линейных уравнений с тремя неизвестными по правилу Крамера:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5; \end{cases} \end{array}$$

2. Решить системы линейных уравнений с четырьмя неизвестными методом Гаусса:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases} \end{array}$$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znaniyum.ru/catalog/product/2236736>):

с. 51-58, п. 4.3. Метод Жордана-Гаусса.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Решить систему уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \end{cases} \xrightarrow{\substack{(-2) \cdot \text{1}^{\text{я}} \rightarrow \text{2}^{\text{я}} \\ (-3) \cdot \text{1}^{\text{я}} \rightarrow \text{3}^{\text{я}}}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ -x_2 - 7x_3 = -8, \\ -5x_2 - 13x_3 = -18; \end{cases} \xrightarrow{(-5) \cdot \text{2}^{\text{я}} \rightarrow \text{3}^{\text{я}}} \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ -x_2 - 7x_3 = -8, \\ 22x_3 = 22; \end{cases} \xrightarrow{\substack{x_3 = 1; \\ x_2 = \frac{-8 + 7x_3}{-1}; \\ x_1 = 6 - 2x_2 - 3x_3;}} \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases} \end{array}$$

Ответ: (1; 1; 1).

Пример 2. Решить систему уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 7x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выполним преобразования с помощью расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -5 \\ 7 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(-2) \leftarrow \text{row 1} \\ (7) \leftarrow \text{row 1} \\ (-2) \leftarrow \text{row 1}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 9 & -5 & 35 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(9) \leftarrow \text{row 2} \\ (-5) \leftarrow \text{row 2}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & -20 & -40 \end{array}\right).$$

Полученной матрице соответствует система
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 5x_2 - 5x_3 = 15, \\ -20x_3 = -40, \end{cases}$$
 которая имеет единственное

решение
$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Ответ: (1; 5; 2).

Пример 3. Решить систему уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1. \end{cases}$$

Решение. Выполним преобразования с помощью расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -6 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(-2) \leftarrow \text{row 1} \\ (-1) \leftarrow \text{row 1}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(-1) \leftarrow \text{row 2} \\ (-1) \leftarrow \text{row 2}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Полученной матрице соответствует система
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ -4x_3 + 5x_4 = -4, \\ 0x_4 = -6. \end{cases}$$
 Третье уравнение системы не

имеет решений, следовательно, система решений не имеет.

Ответ: система несовместна.

Пример 4. Решить систему уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу и выполним первый шаг гауссовых исключений:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array}\right).$$

Разделим третью строку на 3 и выполним второй ход гауссовых исключений:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует система уравнений:
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ -x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим: $x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4$ и, подставив в первое уравнение, получим: $x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4$.

Итак, $x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4$, $x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4$, x_3, x_4 – любые числа.

Ответ: система неопределенная и имеет бесконечное множество решений.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.2. Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 6

Решение системы линейных уравнений матричным методом

Цель: формирование умений решать системы линейных уравнений матричным методом.

Выполнив работу, вы будете уметь: решать системы линейных уравнений.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Решить системы линейных уравнений с тремя неизвестными матричным методом:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5; \end{cases} \end{array}$$

2. **(Практическая подготовка)** Решить задачи с помощью системы линейных уравнений. Систему решить любым методом.

Задача 1. Распределение ресурсов в облачной инфраструктуре. В облачной инфраструктуре используются три типа виртуальных машин: А, В и С. Машина А требует 2 Гб оперативной памяти, 1 ядро процессора и 10 Гб дискового пространства. Машина В — 1 Гб памяти, 2 ядра и 20 Гб диска. Машина С — 3 Гб памяти, 1 ядро и 15 Гб диска. Всего доступно: 20 Гб памяти, 12 ядер, 125 Гб диска. Сколько машин каждого типа можно развернуть, чтобы использовать все ресурсы?

Задача 2. Балансировка нагрузки между тремя серверами. Три сервера обрабатывают три типа запросов: лёгкие, средние и тяжёлые. Сервер 1: за час — 5 лёгких, 3 средних, 1 тяжёлый. Сервер 2: за час — 2 лёгких, 4 средних, 2 тяжёлых. Сервер 3: за час — 3 лёгких, 2 средних, 3 тяжёлых. За час нужно обработать: 40 лёгких, 30 средних, 20 тяжёлых запросов. Сколько часов должен работать каждый сервер?

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Гуляян Б.Ш. Элементы высшей математики. (Режим доступа: <https://book.ru/book/955434>):

с. 55-60, п. 9. Обратная матрица.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Решить матричным способом систему

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -8. \end{cases}$$

Решение. Запишем матрицы A и B : $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Убедимся, что $\det A \neq 0$, и найдем A^{-1} :

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8, \quad A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$. Система имеет единственное решение.

Ответ: (-10; -6; -4).

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.3. Векторы и действия с ними

Практическое занятие № 7

Векторы и операции над ними

Цель: формирование умений выполнять операции над векторами, формирование умений решать задачи по теории алгебры векторов.

Выполнив работу, вы будете уметь: выполнять операции над векторами.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Решить задачи.

а) Даны векторы $\vec{a} = (4; -2; 4)$ и $\vec{b} = (4; -2; -4)$. Найти: а) векторы $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a}$ и $\vec{d} = 2\vec{a} + \vec{b}$; б) угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{d}$.

б) Найти координаты и длину вектора $\overline{AB}$, если $A(2, -3)$, $B(4, -2)$.

в) Даны векторы $\vec{a} = (3; -1)$, $\vec{b} = (1; -2)$, $\vec{c} = (-1; 7)$. Найти: а) длину вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; б) разложить вектор $\vec{p}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Выполнить:

а) вычислить скалярное произведение $\vec{b}, \vec{c}$;

б) проверить, будут ли коллинеарными или ортогональными векторы $\vec{a}, \vec{c}$.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/catalog/product/2236736>):

с. 59-85, п. 5.1.-5.10. Геометрические векторы.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Даны векторы $\vec{a} = (2, -1, -2)$ и $\vec{b} = (8, -4, 0)$. Найти: а) векторы $\vec{c} = 2\vec{a}$ и $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$; б) длины векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$; в) скалярный квадрат вектора $\vec{d}$; г) скалярное произведение векторов $(\vec{c}, \vec{d})$; д) угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{d}$.

Решение. а) По определению $\vec{c} = 2\vec{a} = (4, -2, -4)$; $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = (6, -3, 2)$.

б) По формуле (1) найдем длины векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$:

$$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 6, \quad |\vec{d}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = 7.$$

в) По формуле (3) скалярный квадрат равен квадрату модуля вектора, т.е.

$$(\vec{d}, \vec{d}) = \vec{d}^2 = |\vec{d}|^2 = 7^2 = 49.$$

г) По формуле (2) скалярное произведение равно:

$$(\vec{c}, \vec{d}) = 4 \cdot 6 + (-2) \cdot (-3) + (-4) \cdot 2 = 22.$$

д) По формуле (4) угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{d}$ определяется равенством:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{c}, \vec{d})}{|\vec{c}| |\vec{d}|} = \frac{22}{6 \cdot 7} = 0,52, \text{ откуда } \varphi = \arccos 0,52 \approx 58^\circ.$$

Пример 2. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{i} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$. Выполните следующие действия: а) вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $3\vec{b}$; г) проверьте, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. а) Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ имеют координаты $\vec{a} = (4, 0, 4)$, $\vec{b} = (-1, 3, 2)$, $\vec{c} = (3, 5, 0)$. Координаты вектора $3\vec{b} = (-3, 9, 6)$. По формуле (2) вычисляем: $(\vec{a}, 3\vec{b}) = 4(-3) + 0 \cdot 9 + 4 \cdot 6 = 12$.

б) Проверим, выполняются ли условия ортогональности и коллинеарности векторов:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0, \quad \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Используя координаты векторов $\vec{a} = (4, 0, 4)$ и $\vec{b} = (-1, 3, 2)$, убеждаемся, что ни одно из условий не выполняется:

$$4(-1) + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \neq 0 \Rightarrow \vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ не ортогональны;}$$

$$\frac{4}{-1} \neq \frac{0}{3} \neq \frac{4}{2} \Rightarrow \vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ не коллинеарны.}$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.3. Векторы и действия с ними

Практическое занятие № 8

Решение задач

Цель: формирование умений выполнять операции над векторами, формирование умений решать задачи по теории алгебры векторов.

Выполнив работу, вы будете уметь: выполнять операции над векторами.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Выполнить:

а) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $\vec{a}$, $\vec{b}$;

в) проверить, будут ли компланарными векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $3\vec{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках A(3, 4, 5), B(1, 2, 1), C(-2, -3, 6), D(3, -6, -3).

Вычислить:

а) площадь грани ACD;

б) объем пирамиды ABCD.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=476023>):

с. 59-85, п. 5.1.-5.10. Геометрические векторы.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{i} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$. Выполните следующие действия: а) вычислите смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $5\vec{c}$; б) найдите модуль векторного произведения $3\vec{c}$ и $\vec{b}$; в) проверьте, будут ли компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Решение. а) Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ в базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ имеют координаты $\bar{a} = (4, 0, 4)$, $\bar{b} = (-1, 3, 2)$, $\bar{c} = (3, 5, 0)$, $5\bar{c} = (15, 25, 0)$. По формуле (6) находим

$$\overline{ab}(5\bar{c}) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 15 & 25 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 100 + 0 - 180 - 200 - 0 = -480.$$

б) Координаты вектора $3\bar{c} = (9, 15, 0)$. По формуле (5) вычисляем:

$$(3\bar{c}) \times \bar{b} = \left(\begin{vmatrix} 15 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 9 & 15 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (30, -18, 42),$$

по формуле (1) $|(3\bar{c}) \times \bar{b}| = \sqrt{30^2 + 18^2 + 42^2} = \sqrt{2988} = \sqrt{36 \cdot 83} = 6\sqrt{83}$.

в) По формуле (6) находим

$$\overline{abc} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 20 + 0 - 36 - 40 - 0 = -96 \neq 0.$$

Значит, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ не компланарны.

Пример 2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2, 3, 4)$, $B(4, 7, 3)$, $C(1, 2, 2)$, $D(-2, 0, -1)$. Вычислить: а) площадь грани ABC ; б) объем пирамиды $ABCD$.

Решение. а) Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, который построен на тех же векторах, т.е. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|$. Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB} = (4 - 2, 7 - 3, 3 - 4) = (2, 4, -1); \quad \overline{AC} = (1 - 2, 2 - 3, 2 - 4) = (-1, -1, -2).$$

Вычислим векторное произведение по формуле (5):

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \left(\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-9, 5, 2). \text{ В соответствии с}$$

геометрическим смыслом векторного произведения

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{(-9)^2 + 5^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{110}.$$

б) Найдем координаты вектора $\overline{AD}$: $\overline{AD} = (-4, -3, -5)$. Смешанное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ вычисляем по формуле (6):

$$\overline{ABACAD} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 11.$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 2.1. Комплексные числа

Практическое занятие № 9

Действия с комплексными числами в алгебраической форме

Цель: формирование умений выполнения действий с комплексными числами в алгебраической форме.

Выполнив работу, вы будете уметь: выполнять действия над комплексными числами.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

- Даны комплексные числа: $z_1 = (7;1)$, $z_2 = (-1,5;1,5)$, $z_3 = (4;-3)$. Записать эти числа в алгебраической форме.
- Вычислить:
 - $z_1 + z_2$;
 - $z_2 - z_3$;
 - $\frac{z_1}{z_3}$;
 - $z_2 \cdot z_3$;
 - z_1^5 .
- Вычислить: $\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8$.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 1. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=466080>):

с. 140-142, п. 4.1. Алгебраическая форма комплексного числа.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Даны комплексные числа $z_1 = 12 + 5i$ и $z_2 = 3 - 4i$. Найти: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$;

в) $z_1 z_2$; г) $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение.

а) $z_1 + z_2 = (12 + 5i) + (3 - 4i) = 12 + 5i + 3 - 4i = 15 + i$.

б) $z_1 - z_2 = (12 + 5i) - (3 - 4i) = 12 + 5i - 3 + 4i = 9 + 9i$.

в) $z_1 z_2 = (12 + 5i)(3 - 4i) = 36 - 48i + 15i - 20i^2 = 36 - 33i + 20 = 56 - 33i$.

г) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{12 + 5i}{3 - 4i} = \frac{(12 + 5i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{36 + 48i + 15i + 20i^2}{9 - 16i^2} = \frac{36 + 63i - 20}{9 + 16} = \frac{16 + 63i}{25} = \frac{16}{25} + \frac{63i}{25} = 0,64 + 2,52i$.

Пример 2. Решить квадратные уравнения: а) $x^2 + 9 = 0$; б) $x^2 + 6x + 18 = 0$.

Решение.

а) $x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9i^2} = \pm 3i$.

б) $x^2 + 6x + 18 = 0 \Rightarrow D = 6^2 - 4 \cdot 18 = -36 < 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-36}}{2}$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36i^2}}{2} = \frac{-6 \pm 6i}{2} = -3 \pm 3i.$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 2.1. Комплексные числа

Практическое занятие № 10

Перевод комплексных чисел из одной формы в другую

Цель: формирование умений осуществлять перевод комплексных чисел из одной формы в другую.

Выполнив работу, вы будете уметь: выполнять действия над комплексными числами.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Даны комплексные числа: $z_1 = (-3; -5)$, $z_2 = (-7, 2; 7, 2)$, $z_3 = (2; 6)$. Записать эти числа в тригонометрической и показательной форме.
2. Записать комплексные числа в тригонометрической и показательной формах: $z = -5$.
3. Записать комплексные числа в алгебраической и показательной формах: $z = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right)$, $z = 8 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{4} \right)$.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 1. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=466080>):

с. 142-146, п. 4.2. Геометрическое изображение комплексных чисел;

с. 146-148, п. 4.3. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Даны комплексные числа $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = -\sqrt{3} + i$. Представить их в тригонометрической форме.

Решение. Найдем модуль комплексного числа z_1 : $r_1 = |z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Из соотношений $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ получим аргумент числа z_1 : $\cos \varphi_1 = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\sin \varphi_1 = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\varphi_1 = \arg z_1 = -\frac{\pi}{4}$. Следовательно, число z_1 в тригонометрической форме

выглядит так $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$.

Аналогично найдем модуль комплексного числа z_2 : $r_2 = |z_2| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. Из соотношений $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ получим аргумент числа z_2 : $\cos \varphi_2 = \frac{x}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \varphi_2 = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$, $\varphi_2 = \arg z_2 = \frac{5\pi}{6}$. Следовательно, число z_2 в тригонометрической форме выглядит так $z_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$.

Пример 2. Записать число $z = 4 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{4\pi}{3} \right)$ в алгебраической форме.

Решение.

Так как аргумент $\varphi = \frac{4\pi}{3}$, то числу z соответствует на комплексной плоскости точка, расположенная в III четверти. Используя формулы приведения, находим

$$\cos \frac{4\pi}{3} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{4\pi}{3} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Подставим в тригонометрическую форму числа полученные значения и раскроем скобки:

$$z = 4 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 4 \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = -4 \cdot \frac{1}{2} + 4i \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -2 - 2i \cdot \sqrt{3}.$$

Итак, алгебраическая форма данного числа имеет вид $z = -2 - 2i \cdot \sqrt{3}$.

Пример 3. Представить в алгебраической форме число $z = 2(\cos 2\pi + i \cdot \sin 2\pi)$.

Решение.

Подставив значения $\cos 2\pi = 1$, $\sin 2\pi = 0$ в данное равенство, получим

$$z = 2(1 + i \cdot 0) = 2.$$

Итак, алгебраическая форма данного числа имеет вид $z = 2$.

Пример 4. Записать число $z = 3 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2} \right)$ в показательной форме.

Решение.

$$\text{Здесь } r = 3, \varphi = \frac{3\pi}{2}.$$

Следовательно, показательная форма числа имеет вид $z = 3 \cdot e^{i \frac{3\pi}{2}}$.

Пример 5. Записать число $z = -5i$ в показательной форме.

Решение.

Чтобы представить число в показательной форме, необходимо найти модуль и аргумент числа z .

Здесь $a = 0, b = -5$; тогда $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0 + (-5)^2} = 5$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, так как точка z лежит на мнимой оси комплексной плоскости. Зная r и φ , получим $z = 5 \cdot e^{i \frac{3\pi}{2}}$.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 2.1. Комплексные числа

Практическое занятие № 11

Действия с комплексными числами в тригонометрической, показательной формах

Цель: формирование умений выполнения действий с комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

Выполнив работу, вы будете уметь: выполнять действия над комплексными числами.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

- Даны комплексные числа: $z_1=(-3;-5)$, $z_2=(-7,2;7,2)$, $z_3=(2;6)$. Записать эти числа в тригонометрической и показательной форме. Вычислите: $z_2 \cdot z_3$; $\frac{z_1}{z_3}$; z_1^5 ; $\sqrt{z_2}$.
- Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

$$\text{а) } \left(3 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)\right)^2, \quad \text{б) } \left(3 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)\right)^2, \quad \text{в) } \frac{24(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)}{3(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)}, \quad \text{г) } \frac{24(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)}{3(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)}.$$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 1. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=466080>):

с. 146-148, п. 4.3. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа;

с. 148-154, п. 4.2. Степени и корни в множестве комплексных чисел.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Даны комплексные числа $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$ и $z_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$. Найти: а) $z_1 z_2$; б) $\frac{z_1}{z_2}$; в) z_1^{28} ; г) $\sqrt[3]{z_2}$.

Решение.

$$\text{а) } z_1 z_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6} \right) \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right).$$

$$\text{б) } \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{6} \right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(-\frac{13\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{13\pi}{12} \right) \right).$$

$$\text{в) } z_1^{28} = (\sqrt{2})^{28} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \cdot 28 \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \cdot 28 \right) \right) = 2^{14} (\cos(-7\pi) + i \sin(-7\pi)).$$

$$\text{г) } \sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2, \text{ откуда получаем три значения корня:}$$

$$\text{при } k = 0 \quad (\sqrt[3]{z_2})_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{18} + i \sin \frac{5\pi}{18} \right),$$

$$\text{при } k = 1 \quad (\sqrt[3]{z_2})_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{18} + i \sin \frac{17\pi}{18} \right),$$

$$\text{при } k = 2 \quad (\sqrt[3]{z_2})_3 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{29\pi}{18} + i \sin \frac{29\pi}{18} \right).$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3.1. Алгебра высказываний**Практическое занятие № 12****Построение таблиц истинности**

Цель: формирование умений построения таблиц истинности.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять формулы и законы алгебры логики для преобразования логических выражений.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Постройте таблицу истинности для формулы: $F(A, B) = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$.
2. Постройте таблицу истинности для формулы: $F(A, B, C) = A \wedge (B \vee \neg C)$.
3. Постройте таблицу истинности для формулы: $F(A, B, C) = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$.
4. Постройте таблицу истинности для формулы: $F(A, B) = A \leftrightarrow B$.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=476023>):

с. 297-303, п. 12.1. Основы математической логики.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Построить таблицы истинности для следующих логических выражений: а) $F = (A \vee B) \& (\bar{A} \vee \bar{B})$; б) $F = A \& (\bar{B} \vee \bar{C})$.

Решение.

а) Подсчитываем количество переменных: $n=2$;

определяем число строк в таблице: $m=2^2=4$;

подсчитываем количество логических операций в формуле: 5;

устанавливаем последовательность выполнения логических операций с учетом скобок и приоритетов:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 5 & 2 & 4 & 3 \\ (A & \vee & B) & \& & (\bar{A} & \vee & \bar{B}) \end{array}$$

определяем количество столбцов в таблице: $2+5=7$;

строим и заполняем таблицу истинности наборами входных переменных и значениями логических операций:

A	B	$A \vee B$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \vee \bar{B}$	$(A \vee B) \& (\bar{A} \vee \bar{B})$
0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

б) Подсчитываем количество переменных: $n=3$;
определяем число строк в таблице: $m=2^3=8$;
подсчитываем количество логических операций в формуле: 5;
устанавливаем последовательность выполнения логических операций с учетом скобок и приоритетов:

$$A \ \& \ (\overline{B} \ \vee \ \overline{B} \ \& \ \overline{C})$$

определяем количество столбцов в таблице: $3+5=8$;
строим и заполняем таблицу истинности наборами входных переменных и значениями логических операций:

A	B	C	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{B} \ \& \ \overline{C}$	$\overline{B} \ \vee \ (\overline{B} \ \& \ \overline{C})$	$A \ \& \ (\overline{B} \ \vee \ \overline{B} \ \& \ \overline{C})$
0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3.1. Алгебра высказываний

Практическое занятие № 13

Упрощение формул логики с помощью равносильных преобразований

Цель: формирование умений упрощения формул логики с помощью равносильных преобразований.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять формулы и законы алгебры логики для преобразования логических выражений.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Упростите формулу: $F = A \wedge (A \vee B)$ с помощью законов поглощения.
2. Упростите формулу: $F = (A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$, проверьте результат таблицей истинности.
3. Упростите формулу: $F = \neg(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B)$.
4. Докажите равносильность: $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ (закон де Моргана).

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=476023>):

с. 297-303, п. 12.1. Основы математической логики.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Упростить формулу: $F = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)$.

Решение.

$F = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)$ — выносим B за скобку (дистрибутивность):

$F = B \wedge (A \vee \neg A) = B \wedge 1 = B$.

Пример 2. Упростить: $F = A \vee (\neg A \wedge B)$.

Решение. Применяем закон поглощения расширенный:

$F = A \vee (\neg A \wedge B) = (A \vee \neg A) \wedge (A \vee B) = 1 \wedge (A \vee B) = A \vee B$.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» — умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» — некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» — необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» — теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3.1. Алгебра высказываний

Практическое занятие № 14

Решение задач

Цель: формирование умений решать задачи с применением математической логики.

Выполнив работу, вы будете уметь: Уд 4. Применять формулы и законы алгебры логики для преобразования логических выражений.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Запишите в виде логической формулы высказывание: «Число n кратно 2 или кратно 3, но не кратно 6».
2. Для логической функции $F(A, B, C) = (A \rightarrow B) \wedge (\neg B \vee C)$ постройте таблицу истинности и упростите формулу.
3. Разработайте логическую схему для устройства, выдающего сигнал 1 тогда и только тогда, когда хотя бы два из трёх входных сигналов A, B, C равны 1.
4. Упростите функцию $F = (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$ методом карт Карно.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=476023>):

с. 297-303, п. 12.1. Основы математической логики.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Составить формулу: «Если A и B , то C ».

Решение. Данное высказывание — импликация: $F = (A \wedge B) \rightarrow C$.

По определению: $F = \neg(A \wedge B) \vee C = (\neg A \vee \neg B) \vee C = \neg A \vee \neg B \vee C$.

Пример 2. Определить, при каких значениях A, B формула $F = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ тождественно истинна.

1). *Решение.* $F = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) = (A \leftrightarrow B)$. Функция истинна, когда $A = B$ (оба 0 или оба 1).

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 4.1. Основы теории множеств

Практическое занятие № 15

Множества и основные операции над ними

Цель: формирование умений выполнять операции над множествами.

Выполнив работу, вы будете уметь: выполнять операции над множествами.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Даны $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Найдите: $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; $A \Delta B$.
2. Изобразите операции $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ на диаграмме Эйлера-Венна.
3. Дано $U = \{1, 2, \dots, 10\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Найдите: $\bar{A}$ (дополнение); $A \cap B$; $A \cup B$.
4. Докажите тождество: $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Канцедаль, С.А. Дискретная математика. (Режим доступа: <https://znaniyum.ru/catalog/product/2215742>): с. 5-14, п. 1.1. Множества.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Даны $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f\}$. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.

Решение.

$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$ — все элементы обоих множеств.

$A \cap B = \{c, d\}$ — только общие элементы.

$A \setminus B = \{a, b\}$ — элементы A , не входящие в B .

Пример 2. Доказать, что $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Решение. Это закон дистрибутивности. Элемент x принадлежит левой части $\Leftrightarrow x \in A$, или $(x \in B \text{ и } x \in C)$. Элемент x принадлежит правой части $\Leftrightarrow (x \in A \text{ или } x \in B) \text{ и } (x \in A \text{ или } x \in C)$. По законам логики эти условия равносильны, что и доказывает тождество.

3. Выполните все задания.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 4.1. Основы теории множеств

Практическое занятие № 16

Решение задач

Цель: формирование умений решать задачи с применением теории множеств.

Выполнив работу, вы будете уметь: выполнять операции над множествами.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. В группе 30 студентов: 18 занимаются спортом, 15 рисуют, 8 занимаются и тем и другим. Сколько студентов не занимаются ни спортом, ни рисованием?
2. Пусть $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10, x \text{ чётное}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10, x \text{ кратно } 3\}$. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, декартово произведение $A \times B$.
3. Из 100 студентов английский знают 40, немецкий — 35, оба языка — 12. Сколько не знают ни одного языка? Сколько знают только английский?
4. Докажите, что $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (формула включений-исключений).

Краткие теоретические сведения:

Формула включений-исключений: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Для трёх множеств: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Канцедаль, С.А. Дискретная математика. (Режим доступа: <https://znanium.ru/catalog/product/2215742>): с. 5-14, п. 1.1. Множества.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. В классе 25 учеников: 14 любят математику, 11 любят физику, 5 любят оба предмета. Сколько учеников не любят ни математику, ни физику?

Решение. Пусть M – математика, F – физика. $|M \cup F| = |M| + |F| - |M \cap F| = 14 + 11 - 5 = 20$. Не любят ни один предмет: $25 - 20 = 5$ учеников.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 5.1. Основы теории графов

Практическое занятие № 17

Моделирование и анализ графов: основные понятия, виды и способы задания

Цель: формирование умений различать виды графов и реализовывать различные способы их задания.

Выполнив работу, вы будете уметь: определять типы графов и давать их характеристики.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Нарисуйте граф $G = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ и определите: степень каждой вершины, является ли граф связным.
2. Дан граф. Запишите его в виде: а) списка смежности; б) перечисления рёбер.
3. Нарисуйте: а) полный граф K_4 ; б) двудольный граф $K_{2,3}$; в) ориентированный граф с 4 вершинами и 5 дугами.
4. Определите, является ли граф планарным, простым, регулярным. Обоснуйте ответ.

Краткие теоретические сведения:

Граф $G = (V, E)$ — пара множеств вершин V и рёбер E . Степень вершины $\deg(v)$ — число рёбер, инцидентных v . Граф связен, если между любыми двумя вершинами существует путь. Ориентированный граф (орграф) — рёбра имеют направление.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=476023>):

с. 337-360, п. 12.5. Элементы теории графов.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Для графа $V = \{A, B, C, D\}$, $E = \{AB, BC, CD, DA, AC\}$ найти степени вершин и проверить лемму о рукопожатиях.

Решение. $\deg(A) = 3$ (рёбра AB, DA, AC); $\deg(B) = 2$; $\deg(C) = 3$; $\deg(D) = 2$.

$\sum \deg(v) = 3 + 2 + 3 + 2 = 10 = 2|E| = 2 \cdot 5 = 10$. Лемма выполнена.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» — умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» — некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» — необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» — теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 5.1. Основы теории графов

Практическое занятие № 18

Матричное представление графов: построение матриц смежности и инцидентности

Цель: формирование умений построения и использования матричного представления графов.

Выполнив работу, вы будете уметь: определять типы графов и давать их характеристики.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Для графа G с $V = \{1,2,3,4\}$ и $E = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,4)\}$ постройте матрицу смежности A .
2. По матрице смежности восстановите граф: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Нарисуйте граф, определите степени вершин.
3. Постройте матрицу инцидентности для графа из задания 1.
4. По матрице смежности орграфа найдите матрицу достижимости. Количество путей длины 2 между вершинами даётся матрицей A^2 .

Краткие теоретические сведения:

Матрица смежности A размера $n \times n$: $A[i][j] = 1$, если ребро $(i,j) \in E$, иначе 0. Для неориентированного графа A симметрична. Матрица инцидентности B размера $n \times m$: $B[i][j] = 1$, если вершина i инцидентна ребру j .

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=476023>):

с. 337-360, п. 12.5. Элементы теории графов.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Построить матрицу смежности для графа $V = \{1,2,3\}$, $E = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$.

Решение. Матрица 3×3 :

	1	2	3
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0

Степень вершины = сумма строки: $\deg(1) = 2$, $\deg(2) = 2$, $\deg(3) = 2$. Граф регулярный.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 5.1. Основы теории графов

Практическое занятие № 19

Алгоритмы на графах: поиск эйлеровых и гамильтоновых циклов

Цель: изучение критериев существования эйлеровых и гамильтоновых циклов.

Выполнив работу, вы будете уметь: определять типы графов и давать их характеристики.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Определите, существует ли эйлеров цикл в графе с матрицей смежности. Обоснуйте. Если да — укажите один из возможных циклов.
2. Для графа K_4 (полный граф из 4 вершин) найдите все гамильтоновы циклы.
3. Докажите или опровергните: в графе с 5 вершинами, где каждая вершина имеет степень 3, существует эйлеров цикл.
4. Рассмотрите задачу Кёнигсберга: дан мультиграф (4 вершины, 7 рёбер). Существует ли эйлеров путь?

Краткие теоретические сведения:

Теорема Эйлера: граф содержит эйлеров цикл $\Leftrightarrow$ он связан и все вершины имеют чётную степень. Эйлеров путь (не цикл) существует $\Leftrightarrow$ граф связан и ровно 2 вершины имеют нечётную степень. Гамильтонов цикл — цикл, проходящий через каждую вершину ровно один раз. Универсального эффективного критерия для гамильтоновых циклов не существует.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=476023>):

с. 337-360, п. 12.5. Элементы теории графов.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Граф: $V=\{1,2,3,4\}$, $E=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1),(1,3)\}$. Существует ли эйлеров цикл?

Решение. Степени: $\deg(1)=3$, $\deg(2)=2$, $\deg(3)=3$, $\deg(4)=2$.

Вершины 1 и 3 имеют нечётную степень. Эйлерова цикла нет.

Но эйлеров путь есть (2 нечётных вершины): например, $1-2-3-4-1-3$ — не путь. Эйлеров путь: $1-2-3-4-1$ — не проходит ребро $(1,3)$. Путь: $1-3-4-1-2-3$ (начало 1, конец 3). Проверяем: все рёбра пройдены по одному разу ✓.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» — умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» — некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» — необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» — теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 5.1. Основы теории графов

Практическое занятие № 20

Иерархические структуры: построение, обход и применение деревьев

Цель: изучение свойств деревьев как частного случая графов, формирование умений строить деревья и выполнять их обход.

Выполнив работу, вы будете уметь: определять типы графов и давать их характеристики.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Постройте двоичное дерево поиска (BST) для последовательности: 5, 3, 7, 1, 4, 6, 8. Выполните обходы: прямой (preorder), симметричный (inorder), обратный (postorder).
2. Для заданного дерева найдите: высоту, листья, внутренние узлы, глубину каждого узла.

3. Постройте минимальное остовное дерево для взвешенного графа с 5 вершинами (веса рёбер заданы).
4. Докажите: дерево с n вершинами имеет ровно $n-1$ рёбер.

Краткие теоретические сведения:

Дерево — связный граф без циклов. Свойства: n вершин $\Rightarrow n-1$ рёбер. Корневое дерево — дерево с выделенным корнем. Высота дерева — максимальная длина пути от корня до листа. Обходы двоичного дерева: *prorder* (корень $\rightarrow$ лево $\rightarrow$ право), *inorder* (лево $\rightarrow$ корень $\rightarrow$ право), *postorder* (лево $\rightarrow$ право $\rightarrow$ корень).

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=476023>):

с. 337-360, п. 12.5. Элементы теории графов.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Построить BST для: 4, 2, 6, 1, 3. Выполнить *inorder* обход.

Решение. Корень: 4. Вставляем 2 (< 4 , левый сын). Вставляем 6 (> 4 , правый сын). Вставляем 1 (< 4 , < 2 , левый сын 2). Вставляем 3 (< 4 , > 2 , правый сын 2). *Inorder* (levo $\rightarrow$ koren $\rightarrow$ pravo): 1, 2, 3, 4, 6 — отсортированная последовательность.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» — умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» — некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» — необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» — теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 6.1. Дифференциальное исчисление

Практическое занятие № 21

Вычисление пределов с помощью замечательных пределов, раскрытие неопределённостей

Цель: формирование умений вычислять замечательные пределы функций.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять методы дифференциального исчисления.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Вычислите пределы: а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+5} \right)^{7x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{4x^2}$.
2. Раскройте неопределённости: а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 2x^7}{2x^5 - 8x^7}$; б) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{\sqrt{x} - \sqrt{7}}$.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 1. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=466080>):

с. 176-179, п. 6.2. Свойства предела функции.

с. 184-186, п. 6.5. Замечательные пределы.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Найти а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{3x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 3}{2x^2 + 1}\right)^{-3x^2}$.

Решение.

а) Имеем неопределенность вида (1^∞) . $\alpha(x) = \frac{5}{x}$ является бесконечно малой величиной при $x \rightarrow \infty$. Домножим показатель степени на $\left(\alpha(x) \cdot \frac{1}{\alpha(x)}\right)$, это действие не нарушает знака

равенства:
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{3x} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{\frac{5}{x} \cdot 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{15} = e^{15}.$$

б) Имеем неопределенность вида (1^∞) , так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{3}{x^2}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 0}{2 + 0} = 1. \text{ Выделим целую часть дроби}$$

$\frac{2x^2 - 3}{2x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 1 - 4}{2x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 1}{2x^2 + 1} + \frac{-4}{2x^2 + 1} = 1 + \frac{-4}{2x^2 + 1}$. $\alpha(x) = \frac{-4}{2x^2 + 1}$ является бесконечно малой величиной при $x \rightarrow \infty$. Домножим показатель степени на $\left(\alpha(x) \cdot \frac{1}{\alpha(x)}\right)$, это действие не нарушает знака равенства:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 3}{2x^2 + 1}\right)^{-3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-4}{2x^2 + 1}\right)^{\frac{2x^2 + 1}{-4} \cdot \frac{-4}{2x^2 + 1} \cdot (-3x^2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-4}{2x^2 + 1}\right)^{\frac{2x^2 + 1}{-4}}\right]^{\frac{12x^2}{2x^2 + 1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^2}{2x^2 + 1}} = e^6.$$

Пример 2. Найти а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Решение.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \sin 6x}{2 \cdot 3 \cdot 2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 0} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 6.1. Дифференциальное исчисление

Практическое занятие № 22

Вычисление односторонних пределов, классификация точек разрыва

Цель: формирование умений вычислять односторонние пределы функций, классифицировать точки разрыва.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять методы дифференциального исчисления.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Исследовать на непрерывность и построить график функции:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < -1, \\ 2x, & -1 \leq x < 3, \\ x + 2, & x \geq 3. \end{cases}$$

2. Исследуйте на непрерывность:

$$f(x) = 4^{\frac{1}{x+3}} + 1.$$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 1. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=466080>):

с. 179-182, п. 6.3. Непрерывность функции.

с. 182-184, п. 6.4. Непрерывность функции.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$. Построить график.

Решение. Функция не определена при $x_0=5$, следовательно, функция в точке $x_0=5$ терпит разрыв. Вычислим односторонние пределы функции в точке $x_0=5$:

а) левосторонний $\lim_{x \rightarrow 5-0} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 5-0} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5-0} (x+5) = 10$;

б) правосторонний $\lim_{x \rightarrow 5+0} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 5+0} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5+0} (x+5) = 10$.

Функция $y = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ непрерывна на всей числовой прямой, исключая точку $x_0=5$. Точка $x_0=5$ является точкой разрыва первого рода. График функции показан на рисунке 1.

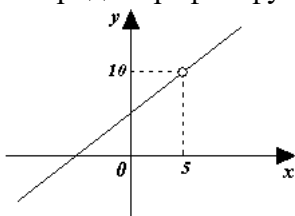


Рис. 1.

Пример 2. Исследовать на непрерывность функцию $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$.

Решение. Функция не определена при $x_0=1$, следовательно, функция в точке $x_0=1$ терпит разрыв. Вычислим односторонние пределы функции в точке $x_0=1$:

а) левосторонний $\lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = (2^{-\infty}) = 0$;

б) правосторонний $\lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = (2^{\infty}) = \infty$.

Функция $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$ непрерывна на всей числовой прямой, исключая точку $x_0=1$. Точка $x_0=1$ является точкой разрыва второго рода.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 6.1. Дифференциальное исчисление

Практическое занятие № 23

Вычисление производных элементарных функций. Правила дифференцирования

Цель: формирование умений вычислять производные элементарных функций с использованием правил дифференцирования.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять методы дифференциального исчисления.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Найти производные функций используя правила вычисления и таблицу производных элементарных функций:

а) $y=7x^4-4x^3+5x^2-2$;

б) $y=5\sqrt{x}-\frac{2\sqrt{x}}{x^3}+\frac{x^4}{\sqrt{x}}$;

в) $y=3\operatorname{ctgx}+5\ln x-3^x$;

г) $y=(9+x^2)(2x-1)$;

д) $y=\frac{x^3}{3x+5}$.

2. Вычислить производную функции в точке:

а) $f(t)=0,5t+0,6t^2+0,8t+8$; $f'(1)=?$

б) $f(x)=\operatorname{ctgx}-\operatorname{tgx}$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=?$

в) $f(x)=2\cdot 5^x+3\cdot e^x$; $f'(0)=?$

г) $f(x)=\cos x\cdot(1+\sin x)$; $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=?$

д) $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$; $f'(1)=?$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 1. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=466080>):

с. 192-195, п. 7.2. Правила вычисления производных. Производные элементарных функций.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Найти производные функций: а) $y = 2x^5 - 5 \cdot 2^x + 4x - 7 \cdot \log_2 x - \ln 2$; б) $y = (1+x^2) \cdot \operatorname{arctg} x$; в) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$; г) $y = \log_3(2x^3 + 1)$.

Решение. а) Используя правила дифференцирования (4), (5), (7) и формулы (14), (17), (19), получим:

$$\begin{aligned} y' &= (2x^5)' - (5 \cdot 2^x)' + (4x)' - (7 \cdot \log_2 x)' - (\ln 2)' = \\ &= 2 \cdot (x^5)' - 5 \cdot (2^x)' + 4 \cdot (x)' - 7 \cdot (\log_2 x)' - 0 = \\ &= 10x^4 - 5 \cdot 2^x \ln 2 + 4 - \frac{7}{x \ln 2}. \end{aligned}$$

б) Используя правила дифференцирования (6) и формулу (26) получим:

$$\begin{aligned} y' &= (1+x^2)' \cdot \operatorname{arctg} x + (1+x^2) \cdot (\operatorname{arctg} x)' = 2x \cdot \operatorname{arctg} x + (1+x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2} = \\ &= 2x \cdot \operatorname{arctg} x + 1. \end{aligned}$$

в) Используя правила дифференцирования (9) и формулы (20), (21) получим:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sin x + \cos x)' \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ &= \frac{(\cos x - \sin x) \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\cos x + \sin x)'}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}. \end{aligned}$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 6.1. Дифференциальное исчисление

Практическое занятие № 24

Вычисление производных сложных функций

Цель: формирование умений вычислять производные сложных функций.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять методы дифференциального исчисления.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Найти производные функций используя правила вычисления и таблицу производных элементарных функций:

а) $y = \ln(2x + \cos x)$;

б) $y = e^{\sin(3x-1)}$;

$$\text{в) } y = \left(\frac{1+x^2}{x^2+x} \right)^3;$$

$$\text{г) } y = \ln \left(\sqrt{2x^5} \right);$$

$$\text{д) } y = \sqrt[3]{1-x^3}.$$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 1. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=466080>):

с. 192-195, п. 7.2. Правила вычисления производных. Производные элементарных функций.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Найти производную функции $y = \log_3(2x^3 + 1)$.

Решение. Используя правила дифференцирования сложной функции (11) и формулы (14), (19) получим:

$$y' = \left(\log_3(2x^3 + 1) \right)' = \frac{1}{(2x^3 + 1) \cdot \ln 3} (2x^3 + 1)' = \frac{6x^2}{(2x^3 + 1) \cdot \ln 3}.$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 6.1. Дифференциальное исчисление

Практическое занятие № 25

Производные и дифференциалы высших порядков. Правило Лопиталя

Цель: формирование умений вычислять производные функций высших порядков.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять методы дифференциального исчисления.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Найти производные 2-го порядка функций: а) $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$; б) $y = x^2 \sqrt{1-x^2}$; в) $y = x \ln(x+1)$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя: а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \ln(1+x)}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$; в)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\ln(e^{x^2} + 1)}.$$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 1. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=466080>):

с. 192-195, п. 7.2. Правила вычисления производных. Производные элементарных функций.

с. 201-203, п. 7.6. Правило Лопиталя.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Найти производную 4-го порядка от функции $y = \sin 2x$.

Решение. Последовательно дифференцируя функцию, получим: $y' = 2\cos 2x$; $y'' = -4\sin 2x$; $y''' = -8\cos 2x$; $y^{(4)} = 16\sin 2x$.

Пример 2. Применить правило Лопиталя. Найти пределы: а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x}+x}{\ln(2+x)}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{\sin 5x}$;

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x - 3^x}{x^2}$.

Решение. а) Так как в данном случае имеется неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, можно применить правило Лопиталя (28):

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x}+x}{\ln(2+x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{2+x}+x)'}{(\ln(2+x))'} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{2+x}}+1}{\frac{1}{2+x}} = \frac{3}{2}.$$

б) В данном случае имеется неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, можно применить правило Лопиталя

$$(28): \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{3x}-1)'}{(\sin 5x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{3x}}{5\cos 5x} = \frac{3}{5}.$$

в) Имеет место неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Применяя правило Лопиталя (28), получаем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x - 3^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4^x - 3^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x \ln 4 - 3^x \ln 3}{2x}. \text{ Как видим, неопределенность вида } \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

остается. Применим правило Лопиталя еще раз:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x \ln 4 - 3^x \ln 3}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x \ln^2 4 - 3^x \ln^2 3}{2} = \infty.$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 6.1. Дифференциальное исчисление

Практическое занятие № 26

Исследование функций и построение графиков

Цель: формирование умений исследования функции и построения графиков.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять методы дифференциального исчисления.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

- Исследовать функции и построить их график: а) $y = \frac{2x}{1-x^2}$; б) $y = x \ln x$.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 1. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=466080>):

с. 203-210, п. 7.7. Монотонность и экстремумы функции.

с. 210-212, п. 7.8. Выпуклость и точки перегиба функции.

с. 212-215, п. 7.9. Построение графиков функций.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Исследовать функцию $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ и построить ее график.

Решение. 1). Область определения: $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Точки $x = -1$ и $x = 1$ – точки разрыва функции.

2). Функция четная, т.к. $f(-x) = f(x)$, и ее график симметричен относительно оси ординат.

$$3). \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty.$$

Прямые $x = 1$ и (в силу симметрии графика) $x = -1$ – вертикальные асимптоты.

4). Поведение функции в бесконечности. Вычислим $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -1$. Прямая $y = -1$ – горизонтальная асимптота.

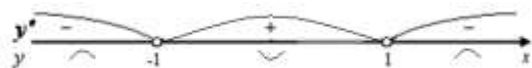
$$5). \text{Найдем } y' = \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}; y' = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } y' \text{ не существует при } x = 1 \text{ и } x = -1.$$



Функция убывает на интервалах $(-\infty, -1)$ и $(-1, 0)$ и возрастает на интервалах $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$. Точка $x = 0$ – точка минимума и $f_{\min} = f(0) = 1$ – минимум функции.

$$6). \text{Найдем } y'' = \frac{4(1-x^2)^2 - 4x \cdot 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}.$$

Очевидно, что $y'' \neq 0$ при любых значениях x и y'' не существует при $x = 1$ и $x = -1$.

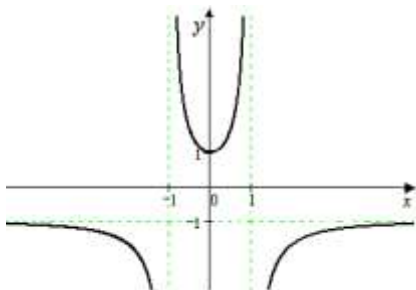


Функция выпукла вниз на интервале $(-1,1)$ и выпукла вверх на интервалах $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$. Так как $y'' \neq 0$, то точек перегиба нет.

7). Точки пересечения с осями координат.

$x = 0$: $f(0) = 1$, т.е. точка пересечения с осью ординат $(0,1)$.

$y = 0$: уравнение $f(x) = 0$ решений не имеет, следовательно, график функции не пересекает ось абсцисс.



Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 6.1. Дифференциальное исчисление

Практическое занятие № 27

Вычисление частных производных функций нескольких переменных

Цель: формирование умений нахождения частных производных первого порядка.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять методы дифференциального исчисления.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Найдите все частные производные первого порядка: $z = x^2y^3 + 3xy - y^2$.
2. Найдите $\partial z / \partial x$, $\partial z / \partial y$ для: а) $z = \sin(xy) + \cos(x/y)$; б) $z = x^y$; в) $z = e^{(x^2+y^2)}$.
3. Найдите частные производные второго порядка $\partial^2 z / \partial x^2$, $\partial^2 z / \partial y^2$, $\partial^2 z / \partial x \partial y$ для $z = x^3y + 2x^2y^3$.
4. Вычислите градиент функции $f(x,y) = x^2 + 2xy - y^2$ в точке $(1; 2)$.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=476023>):

с. 145-150, п. 9.2. Частные производные. Дифференциал. Производная по направлению и градиент.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Найти частные производные $z = x^3 + 2x^2y - 3y^4$.

Решение.

$\partial z / \partial x$ ($y = \text{const}$): $\partial z / \partial x = 3x^2 + 4xy$.

$\partial z/\partial y$ ($x = \text{const}$): $\partial z/\partial y = 2x^2 - 12y^3$.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 6.2. Интегральное исчисление

Практическое занятие № 28

Интегрирование заменой переменной в неопределённом интеграле

Цель: формирование умений вычислять неопределённые интегралы заменой переменной.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять методы интегрального исчисления.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Вычислите методом замены переменной: а) $\int \sin(3x)dx$; б) $\int e^{(2x)} dx$; в) $\int (2x+1)^5 dx$.
2. Вычислите: а) $\int x \cdot e^{(x^2)} dx$; б) $\int \cos(x)/(1+\sin^2(x)) dx$; в) $\int \ln(x)/x dx$.
3. Вычислите: а) $\int dx/\sqrt{1-4x^2}$; б) $\int x\sqrt{(x^2+1)} dx$; в) $\int \lg(x) dx$.
4. Проверьте результат интегрирования дифференцированием: $\int (3x^2+1)dx$.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 1. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=466080>):

с. 215-219, п. 8.1. Первообразная и неопределенный интеграл.

с. 219-229, п. 8.2. Методы вычисления неопределенного интеграла.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Вычислить $\int 2x \cdot (x^2+1)^5 dx$.

Решение. Пусть $u = x^2+1$, тогда $du = 2x dx$.

$$\int 2x \cdot (x^2+1)^5 dx = \int u^5 du = u^6/6 + C = (x^2+1)^6/6 + C.$$

Пример 2. Вычислить $\int e^{(3x)} dx$.

Решение. $u = 3x$, $du = 3dx$, $dx = du/3$. $\int e^u \cdot du/3 = e^u/3 + C = e^{(3x)}/3 + C$.

3. Выполните все задания.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 6.2. Интегральное исчисление

Практическое занятие № 29

Интегрирование по частям в неопределённом интеграле

Цель: формирование умений вычислять неопределённые интегралы методом интегрирования по частям

Выполнив работу, вы будете уметь: Уд 7. Применять методы дифференциального и интегрального исчисления.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. – Вычислите по частям: а) $\int x \cdot e^x dx$; б) $\int x \cdot \sin(x) dx$; в) $\int x \cdot \cos(2x) dx$.
2. – Вычислите: а) $\int \ln(x) dx$; б) $\int x \cdot \ln(x) dx$; в) $\int \arctan(x) dx$.
3. – Вычислите: а) $\int x^2 \cdot e^x dx$ (дважды по частям); б) $\int e^x \cdot \sin(x) dx$.
4. – Проверьте правильность формулы $\int x \cdot \cos(x) dx = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + C$ дифференцированием.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 1. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=466080>):

с. 215-219, п. 8.1. Первообразная и неопределенный интеграл.

с. 219-229, п. 8.2. Методы вычисления неопределенного интеграла.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Вычислить $\int x \cdot e^x dx$.

Решение. $u = x, dv = e^x dx \Rightarrow du = dx, v = e^x$.

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

Пример 2. Вычислить $\int \ln(x) dx$.

Решение. $u = \ln(x), dv = dx \Rightarrow du = dx/x, v = x$.

$$\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot (1/x) dx = x \cdot \ln(x) - x + C.$$

3. Выполните все задания.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 6.2. Интегральное исчисление

Практическое занятие № 30

Интегрирование заменой переменной в определённом интеграле

Цель: формирование умений вычислять определённые интегралы заменой переменной.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять методы интегрального исчисления.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Вычислите $\int_0^1 2x \cdot (x^2+1)^3 dx$ заменой $u = x^2+1$.
2. Вычислите $\int_0^{\pi/2} \sin(x) \cdot \cos^2(x) dx$.
3. Вычислите $\int_1^4 dx/(1+\sqrt{x})$ заменой $t = \sqrt{x}$.
4. Вычислите $\int_0^1 x \cdot e^{(x^2)} dx$.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 1. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=466080>):

с. 229-235, п. 9.1. Определение и свойства определенного интеграла.

с. 238-239, п. 9.3. Методы вычисления определенного интеграла.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример. Вычислить $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}(x) \cdot \sec^2(x) dx$.

Решение. $u = \operatorname{tg}(x)$, $du = \sec^2(x)dx$. При $x=0$: $u=0$; при $x=\pi/4$: $u=1$.

$$\int_0^1 u du = [u^2/2]_0^1 = 1/2.$$

3. Выполните все задания.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 6.2. Интегральное исчисление

Практическое занятие № 31

Интегрирование по частям в определённом интеграле

Цель: формирование умений вычислять определённые интегралы методом интегрирования по частям

Выполнив работу, вы будете уметь: Уд 7. Применять методы дифференциального и интегрального исчисления.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Вычислите $\int_0^1 x \cdot e^x dx$.
2. Вычислите $\int_1^e \ln(x) dx$.
3. Вычислите $\int_0^{\pi/2} x \cdot \sin(x) dx$.
4. Вычислите $\int_1^2 x^2 \cdot \ln(x) dx$.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 1. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=466080>):

с. 229-235, п. 9.1. Определение и свойства определенного интеграла.

с. 238-239, п. 9.3. Методы вычисления определенного интеграла.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример. Вычислить $\int_0^{\pi} x \cdot \cos(x) dx$.

Решение. $u = x, dv = \cos(x)dx \Rightarrow du = dx, v = \sin(x)$.

$$\int_0^{\pi} x \cdot \cos(x) dx = [x \cdot \sin(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin(x) dx = 0 - [-\cos(x)]_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 1 + 1 = 2. \text{ Ответ: } 2.$$

Подробнее: $[x \cdot \sin(x)]_0^{\pi} = \pi \cdot \sin(\pi) - 0 = 0$. $[\cos(x)]_0^{\pi} = \cos(\pi) - \cos(0) = -1 - 1 = -2$. Итого: $0 - (-2) = 0 + 2 = 2$.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 6.2. Интегральное исчисление

Практическое занятие № 32

Приложения определённых интегралов в вычислении геометрических и физических величин

Цель: формирование умений решать задачи на применение определённых интегралов.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять методы интегрального исчисления.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = 2x$.
2. Вычислите объём тела вращения фигуры, ограниченной $y = \sqrt{x}$, $x=4$, $y=0$, вокруг оси OX.
3. Тело движется со скоростью $v(t) = 3t^2 - 2t$. Найдите путь за время от $t=0$ до $t=2$.
4. Найдите длину дуги кривой $y = (2/3)x^{3/2}$ на отрезке $[0; 3]$.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 1. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=466080>):

с. 239-245, п. 9.4. Приложения определенного интеграла.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Найти площадь между $y = x^2$ и $y = x$.

Решение. Пересечение: $x^2 = x \Rightarrow x=0, x=1$. При $0 \leq x \leq 1$: $x \geq x^2$.

$$S = \int_0^1 (x - x^2) dx = [x^2/2 - x^3/3]_0^1 = 1/2 - 1/3 = 1/6.$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 6.2. Интегральное исчисление

Практическое занятие № 33

Вычисление двойных интегралов и исследование их основных свойств

Цель: формирование умений вычисления двойных интегралов в декартовых координатах

Выполнив работу, вы будете уметь: Уд 7. Применять методы дифференциального и интегрального исчисления.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Вычислите двойной интеграл $\iint_D xy \, dA$, где $D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$.
2. Вычислите $\iint_D (x + y) \, dA$, где D ограничена $y = x^2$ и $y = x$.
3. Измените порядок интегрирования и вычислите: $\int_0^1 \int_{-x^1}^1 e^{(y^2)} \, dy \, dx$.
4. Найдите объём тела под поверхностью $z = x^2 + y^2$ над квадратом $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=476023>):

с. 154-156, п. 9.5. Понятие двойного интеграла.

с. 156-158, п. 9.6. Приложения двойного интеграла.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример. Вычислить $\iint_D (3x + 2y) \, dA$, $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.

Решение.

$$\int_0^1 \left[\int_0^2 (3x + 2y) \, dy \right] dx = \int_0^1 [3xy + y^2]_0^2 dx = \int_0^1 (6x + 4) dx = [3x^2 + 4x]_0^1 = 3 + 4 = 7.$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 7.1. Теория вероятностей

Практическое занятие № 34

Операции над событиями: теоремы сложения и умножения вероятностей

Цель: формирование умений применять теоремы сложения и умножения для вычисления вероятности сложных событий.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять стандартные методы и модели к решению вероятностных задач.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Два стрелка стреляют по мишени. $P(A) = 0,8$; $P(B) = 0,7$. Найдите вероятность попадания хотя бы одного стрелка.
2. Из урны извлекают 2 шара подряд без возврата (6 белых, 4 чёрных). Найдите $P(\text{оба белых})$.
3. Игральная кость бросается дважды. Найдите $P(\text{сумма} = 7)$.
4. События A и B несовместны; $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,35$. Найдите $P(A \cup B)$ и $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=476023>):

с. 212-229, п. 11.3. Случайные события.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,5$; $P(A \cap B) = 0,3$. Найти $P(A \cup B)$, $P(\bar{A})$, $P(A|B)$.

Решение. $P(A \cup B) = 0,6 + 0,5 - 0,3 = 0,8$. $P(\bar{A}) = 1 - 0,6 = 0,4$. $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = 0,3/0,5 = 0,6$.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 7.1. Теория вероятностей

Практическое занятие № 35

Условная вероятность и формула полной вероятности

Цель: формирование умений применять формулу полной вероятности для решения задач с гипотезами.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять стандартные методы и модели к решению вероятностных задач.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Два завода производят лампочки: завод 1 — 60%, завод 2 — 40%. Брак: 5% и 8% соответственно. Найдите $P(\text{бракованная лампочка})$.
2. Продолжение задачи 1. Найдите $P(\text{с завода 1} | \text{лампочка бракованная})$ по формуле Байеса.
3. В коробке 10 деталей: 7 стандартных, 3 нестандартных. Два раза берут деталь без замены. Найдите $P(\text{вторая нестандартная})$.

4. Студент готовился к экзамену с вероятностью 0,8. $P(\text{сдаст} \mid \text{готовился}) = 0,9$; $P(\text{сдаст} \mid \text{не готовился}) = 0,3$. Найдите $P(\text{сдаст})$.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=476023>):

с. 212-229, п. 11.3. Случайные события.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Три цеха выпускают изделия: 50%, 30%, 20%. Брак: 2%, 4%, 3%. Найти $P(\text{бракованное изделие})$.

Решение. $P(B) = P(H_1) \cdot P(B|H_1) + P(H_2) \cdot P(B|H_2) + P(H_3) \cdot P(B|H_3)$
 $= 0,5 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,04 + 0,2 \cdot 0,03 = 0,01 + 0,012 + 0,006 = 0,028$.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 7.1. Теория вероятностей

Практическое занятие № 36

Дискретные случайные величины: закон распределения и числовые характеристики

Цель: формирование умений строить закон распределения ДСВ и вычислять числовые характеристики.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять стандартные методы и модели к решению вероятностных и статистических задач.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Монету бросают 3 раза. ДСВ X = число орлов. Составьте закон распределения, найдите $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.
2. Дан закон распределения: $X = \{0, 1, 2, 3\}$, $P = \{0,1; 0,4; 0,3; 0,2\}$. Найдите $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Постройте многоугольник распределения.
3. В лотерее 100 билетов: 1 выигрыш 500 руб., 5 выигрышей по 100 руб. Найдите $M(X)$ — ожидаемый выигрыш.
4. Дан закон распределения ДСВ X . Найдите неизвестную вероятность, если $M(X) = 1,4$.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=476023>):

с. 229-266, п. 11.4. Случайные величины.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. $X: 1, 2, 3; P: 0,2; 0,5; 0,3$. Найдите $M(X)$, $D(X)$.

Решение. $M(X) = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,3 = 0,2 + 1,0 + 0,9 = 2,1$.

$$M(X^2) = 1^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,5 + 3^2 \cdot 0,3 = 0,2 + 2,0 + 2,7 = 4,9.$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 4,9 - 4,41 = 0,49. \sigma = \sqrt{0,49} = 0,7.$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 7.1. Теория вероятностей

Практическое занятие № 37

Непрерывные случайные величины: плотность распределения и числовые характеристики

Цель: формирование умений работать с функцией плотности вероятности и вычислять характеристики.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять стандартные методы и модели к решению вероятностных и статистических задач.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. НСВ задана плотностью $f(x) = C \cdot x$ при $0 \leq x \leq 2$, иначе 0. Найдите C , $P(0,5 < X < 1,5)$, $M(X)$.
2. НСВ $X \sim$ равномерному распределению на $[-1; 3]$. Найдите $f(x)$, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$.
3. НСВ имеет плотность $f(x) = e^{-x}$ при $x > 0$, иначе 0. Найдите $P(X > 1)$, $M(X)$, $D(X)$.
4. Для плотности $f(x) = (1/2) \cdot e^{-|x|}$ вычислите $P(-1 < X < 2)$.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=476023>):

с. 229-266, п. 11.4. Случайные величины.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. $f(x) = 2x$ при $0 \leq x \leq 1$, 0 иначе. Найти $P(0 < X < 0,5)$, $M(X)$.

Решение. $P(0 < X < 0,5) = \int_0^{0,5} 2x \, dx = [x^2]_0^{0,5} = 0,25$.

$$M(X) = \int_0^1 x \cdot 2x \, dx = 2 \int_0^1 x^2 \, dx = 2 \cdot [x^3/3]_0^1 = 2/3.$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 7.1. Теория вероятностей

Практическое занятие № 38

Основные законы распределения случайных величин

Цель: изучение свойств наиболее часто встречающихся в статистике законов распределения.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять стандартные методы и модели к решению вероятностных и статистических задач.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Прибор из 5 элементов. Вероятность отказа каждого $p = 0,2$. Найдите $P(\text{откажут ровно } 2 \text{ элемента})$, $P(\text{откажут не более } 1)$ по формуле Бернулли.
2. Среднее число запросов к серверу в минуту — 4. Найдите $P(3 \text{ запроса})$ и $P(\text{не более } 2 \text{ запросов})$ по закону Пуассона.
3. Рост студентов нормально распределён: $M = 170$ см, $\sigma = 8$ см. Найдите $P(165 < X < 180)$, $P(X > 185)$.
4. Генеральная совокупность: $M(X) = 50$, $D(X) = 16$. Оценить $P(|X-50| < 8)$ по неравенству Чебышёва.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=476023>):

с. 229-266, п. 11.4. Случайные величины.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Формула Бернулли: $n=4$, $p=0,3$, $k=2$.

Решение. $P(X=2) = C(4,2) \cdot (0,3)^2 \cdot (0,7)^2 = 6 \cdot 0,09 \cdot 0,49 = 0,2646$.

Пример 2. Пуассон: $\lambda=3$, $P(X=2)$.

Решение. $P(X=2) = (3^2/2!) \cdot e^{-3} = (9/2) \cdot e^{-3} \approx 4,5 \cdot 0,0498 \approx 0,224$.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 7.2. Математическая статистика

Практическое занятие № 39

Построение вариационного ряда и расчёт числовых характеристик

Цель: формирование умений вычислять числовые характеристики, описывающие центр распределения и разброс данных.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять стандартные методы и модели к решению вероятностных и статистических задач. Применять современные пакеты прикладных программ многомерного статистического анализа.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Дана выборка: 5, 7, 3, 8, 5, 6, 7, 5, 9, 4, 6, 7, 8, 5, 6. Постройте вариационный ряд, найдите: $\bar{x}$, M_o , M_e , D , σ .
2. Для данных в таблице (вариационный ряд с частотами) постройте гистограмму и полигон частот. Найдите все числовые характеристики.
3. Дана интервальная таблица частот (5 интервалов). Найдите: среднюю выборочную, дисперсию, СКО.
4. Сравните два набора данных по значениям σ и коэффициенту вариации $CV = (\sigma/\bar{x}) \cdot 100\%$.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=476023>):

с. 278-297, п. 11.6. Элементы математической статистики.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. Выборка: 2, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 8, 9. Найдите $\bar{x}$, M_o , M_e .

Решение. $n=9$. $\bar{x} = (2+3+3+5+6+6+6+8+9)/9 = 48/9 \approx 5,33$.

$M_o = 6$ (встречается 3 раза). $M_e = x_5 = 6$ (5-й элемент в упорядоченном ряду).

$D = (1/9)[(2-5,33)^2 + 2(3-5,33)^2 + (5-5,33)^2 + 3(6-5,33)^2 + (8-5,33)^2 + (9-5,33)^2] \approx 4,22$. $\sigma \approx 2,05$.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 7.2. Математическая статистика

Практическое занятие № 40

Сравнительный анализ методов отбора и типов выборки в статистическом исследовании

Цель: изучение различных способов формирования выборочной совокупности.

Выполнив работу, вы будете уметь: применять стандартные методы и модели к решению вероятностных и статистических задач. Применять современные пакеты прикладных программ многомерного статистического анализа.

Материальное обеспечение: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задание:

1. Генеральная совокупность — студенты колледжа (500 чел.). Опишите порядок формирования: а) случайной бесповторной выборки объема 50; б) систематической выборки; в) стратифицированной выборки (3 отделения).

2. По данным выборки объёма $n=36$ ($\bar{x}=72$, $\sigma=12$) найдите: точечную оценку $M(X)$; доверительный интервал для μ с надёжностью $\gamma=0,95$ ($t=1,96$).
3. Дана генеральная совокупность с $\sigma=15$. Каков минимальный объём выборки, чтобы погрешность оценки среднего не превышала $\delta=3$ с надёжностью 95%?
4. Постройте интервальный вариационный ряд для данных ($n=30$ значений), рассчитайте все основные характеристики. Оцените, как метод отбора влияет на репрезентативность.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомьтесь с краткими теоретическими сведениями в учебнике Бардушкин В.В. Математика. Элементы высшей математики. Том 2. (Режим доступа: <https://znanium.ru/read?id=476023>):

с. 278-297, п. 11.6. Элементы математической статистики.

2. Ознакомьтесь с примерами решения.

Пример 1. $n=100$, $\bar{x}=45$, $\sigma=10$. Найти доверительный интервал для μ ($\gamma=0,95$).

Решение. Погрешность: $\delta = t \cdot \sigma / \sqrt{n} = 1,96 \cdot 10 / \sqrt{100} = 1,96$.

Доверительный интервал: $(45-1,96; 45+1,96) = (43,04; 46,96)$.

Пример 2. Минимальный объём выборки: $\sigma=20$, $\delta=5$, $\gamma=0,95$.

Решение. $n = (t \cdot \sigma / \delta)^2 = (1,96 \cdot 20 / 5)^2 = (7,84)^2 \approx 62$.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

«Отлично» – умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

«Хорошо» – некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89% всех заданий.

«Удовлетворительно» – необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79% всех заданий.

«Неудовлетворительно» – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.