Приложение 2.3.1 к ОПОП-П по специальности 22.02.08 Металлургическое производство (по видам производства) (Направленность Металлургия черных металлов)

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Многопрофильный колледж

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ ЛАБОРАТОРНЫХ И ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
ОУП.03 МАТЕМАТИКА

для обучающихся специальности
специальности 22.02.08 Металлургическое производство (по видам производства)

(Направленность: Металлургия чёрных металлов)

Магнитогорск, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки обучающихся составляют практические занятия.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования с учетом получаемой специальности.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование профессиональных практических умений (умений выполнять определенные действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности) или учебных практических умений (умений решать задачи по математике), необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено проведение практических занятий.

ПРб1 владение методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение формулировать определения, аксиомы и теоремы, применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

ПРб2 умение оперировать понятиями: степень числа, логарифм числа; умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений со степенями и логарифмами, преобразования дробно-рациональных выражений;

ПРб3 умение оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы;

ПРб4 умение оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения;

ПРб5 умение оперировать понятиями: рациональная функция, показательная функция, степенная функция, логарифмическая функция, тригонометрические функции, обратные функции; умение строить графики изученных функций, использовать графики при изучении процессов и зависимостей, при решении задач из других учебных предметов и задач из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами;

ПРб6 умение решать текстовые задачи разных типов (в том числе на проценты, доли и части, на движение, работу, стоимость товаров и услуг, налоги, задачи из области управления личными и семейными финансами); составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов;

ПРб7 умение оперировать понятиями: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия, стандартное отклонение числового набора; умение извлекать, интерпретировать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, отражающую свойства реальных процессов и явлений; представлять информацию с помощью таблиц и диаграмм; исследовать статистические данные, в том числе с применением графических методов и электронных средств;

ПРб8 умение оперировать понятиями: случайный опыт и случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей, комбинаторные факты и формулы при решении задач; оценивать вероятности реальных событий; знакомство со случайными величинами; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях;

ПРб9 умение оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, двугранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов окружающего мира;

ПРб10 умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, куб, параллелепипед, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, сечения фигуры вращения, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, площадь сферы, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; умение распознавать симметрию в пространстве; умение распознавать правильные многогранники;

ПРб11 умение оперировать понятиями: движение в пространстве, подобные фигуры в пространстве; использовать отношение площадей поверхностей и объемов подобных фигур при решении задач;

ПРб12 умение вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы;

ПРб13 умение оперировать понятиями: прямоугольная система координат, координаты точки, вектор, координаты вектора, скалярное произведение, угол между векторами, сумма векторов, произведение вектора на число; находить с помощью изученных формул координаты середины отрезка, расстояние между двумя точками;

ПРб14 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки;

Пру1 умение оперировать понятиями: определение, аксиома, теорема, следствие, свойство, признак, доказательство, равносильные формулировки; умение формулировать обратное и противоположное утверждение, приводить примеры и контрпримеры, использовать метод математической индукции; проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений;

Пру2 умение оперировать понятиями: множество, подмножество, операции над множествами; умение использовать теоретико-множественный аппарат для описания реальных процессов и явлений и при решении задач, в том числе из других учебных предметов;

Пру3 умение оперировать понятиями: граф, связный граф, дерево, цикл, граф на плоскости; умение задавать и описывать графы различными способами; использовать графы при решении задач;

Пру4 умение свободно оперировать понятиями: сочетание, перестановка, число сочетаний, число перестановок; бином Ньютона; умение применять комбинаторные факты и рассуждения для решения задач;

Пру5 умение оперировать понятиями: натуральное число, целое число, остаток по модулю, рациональное число, иррациональное число, множества натуральных, целых, рациональных, действительных чисел; умение использовать признаки делимости, наименьший общий делитель и наименьшее общее кратное, алгоритм Евклида при решении задач; знакомство с различными позиционными системами счисления;

Пру6 умение свободно оперировать понятиями: степень с целым показателем, корень натуральной степени, степень с рациональным показателем, степень с действительным (вещественным) показателем, логарифм числа, синус, косинус и тангенс произвольного числа;

Пру7 умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и системы; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни;

Пру8 умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций; умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем;

Пру9 умение свободно оперировать понятиями: последовательность, арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия; умение задавать последовательности, в том числе с помощью рекуррентных формул;

Пру10 умение оперировать понятиями: непрерывность функции, асимптоты графика функции, первая и вторая производная функции, геометрический и физический смысл производной, первообразная, определенный интеграл; умение находить асимптоты графика функции; умение вычислять производные суммы, произведения, частного и композиции функций, находить уравнение касательной к графику функции; умение использовать производную для исследования функций, для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических и физических задачах, для определения скорости и ускорения; находить площади и объемы фигур с помощью интеграла; приводить примеры математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений;

Пру11 умение оперировать понятиями: комплексное число, сопряженные комплексные числа, модуль и аргумент комплексного числа, форма записи комплексных чисел (геометрическая, тригонометрическая и алгебраическая); уметь производить арифметические действия с комплексными числами; приводить примеры использования комплексных чисел;

Пру12 умение свободно оперировать понятиями: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия, стандартное отклонение для описания числовых данных; умение исследовать статистические данные, в том числе с применением графических методов и электронных средств; графически исследовать совместные наблюдения с помощью диаграмм рассеивания и линейной регрессии;

Пру13 умение находить вероятности событий с использованием графических методов; применять для решения задач формулы сложения и умножения вероятностей, формулу полной вероятности, формулу Бернулли, комбинаторные факты и формулы; оценивать вероятности реальных событий; умение оперировать понятиями: случайная величина, распределение вероятностей, математическое ожидание, дисперсия и стандартное отклонение случайной величины, функции распределения и плотности равномерного, показательного и нормального распределений; умение использовать свойства изученных распределений для решения задач; знакомство с понятиями: закон больших чисел, методы выборочных исследований; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях;

Пру14 умение свободно оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, отрезок, луч, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов в окружающем мире; умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, правильный многогранник, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, развертка поверхности, сечения конуса и цилиндра, параллельные оси или основанию, сечение шара, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения, в том числе с помощью электронных средств; умение применять свойства геометрических фигур, самостоятельно формулировать определения изучаемых фигур, выдвигать гипотезы о свойствах и признаках геометрических фигур, обосновывать или опровергать их; умение проводить классификацию фигур по различным признакам, выполнять необходимые дополнительные построения;

Пру15 умение свободно оперировать понятиями: площадь фигуры, объем фигуры, величина угла, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями, площадь сферы, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение находить отношение объемов подобных фигур;

Пру16 умение свободно оперировать понятиями: движение, параллельный перенос, симметрия на плоскости и в пространстве, поворот, преобразование подобия, подобные фигуры; умение распознавать равные и подобные фигуры, в том числе в природе, искусстве, архитектуре; умение использовать геометрические отношения, находить геометрические величины (длина, угол, площадь, объем) при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни;

Пру17 умение свободно оперировать понятиями: прямоугольная система координат, вектор, координаты точки, координаты вектора, сумма векторов, произведение вектора на число, разложение вектора по базису, скалярное произведение, векторное произведение, угол между векторами; умение использовать векторный и координатный метод для решения геометрических задач и задач других учебных предметов; оперировать понятиями: матрица 2x2 и 3x3, определитель матрицы, геометрический смысл определителя;

Пру18 умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; строить математические модели с помощью геометрических понятий и величин, решать связанные с ними практические задачи; составлять вероятностную модель и интерпретировать полученный результат; решать прикладные задачи средствами математического анализа, в том числе социально-экономического и физического характера;

Пру19 умение выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; умение распознавать проявление законов математики в искусстве, умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.

МР8 способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

МР10 формирование научного типа мышления, владение научной терминологией, ключевыми понятиями и методами;

МР12 выявлять причинно-следственные связи и актуализировать задачу, выдвигать гипотезу ее решения, находить аргументы для доказательства своих утверждений, задавать параметры и критерии решения;

МР13 анализировать полученные в ходе решения задачи результаты, критически оценивать их достоверность, прогнозировать изменение в новых условиях;

МР16 осуществлять целенаправленный поиск переноса средств и способов действия в профессиональную среду;

МР17 уметь переносить знания в познавательную и практическую области жизнедеятельности;

МР18 уметь интегрировать знания из разных предметных областей;

ЛР23 готовность к труду, осознание ценности мастерства, трудолюбие;

ЛР26 готовность и способность к образованию и самообразованию на протяжении всей жизни.

Содержание практических ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению ***профессиональными компетенциями:***

ПК 2.1 Выполнять расчеты параметров технологического процесса, работы оборудования, характеристик исходного сырья и продукции при производстве черных металлов.

А также формированию *общих компетенций*:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК 05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК 06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

ОК 07 Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

ОК 08 Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности

ОК 09 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Выполнение обучающихся практических и/или лабораторных работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;

- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;

- формирование и развитие умений: наблюдать, сравнивать, сопоставлять, анализировать, делать выводы и обобщения, самостоятельно вести исследования, пользоваться различными приемами измерений, оформлять результаты в виде таблиц, схем, графиков;

- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;

- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся в рамках соответствующей темы, после освоения дидактических единиц, которые обеспечивают наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1 Развитие понятия о числе

Практическое занятие № 1
«Арифметические действия над действительными и комплексными числами. Приближенные вычисления»

Цель работы: Научиться выполнять действия с действительными и комплексными числами, выполнять приближенные вычисления.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ПК 2.1 Выполнять расчеты параметров технологического процесса, работы оборудования, характеристик исходного сырья и продукции при производстве черных металлов.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание

1. Решите задачи:

а) Бригаде доменщиков была установлена норма – выплавка чугуна по 2,5 т в день. В первый день бригада выплавила 2 т чугуна, а во второй день – 3 т. Найдите процент выполнения нормы в первый и второй день.

б) В цехе работают 20 рабочих, из них 8 сталеваров. Какой процент от всего числа рабочих цеха составляют сталевары?

в) Рабочий день сталевара уменьшился с 8 часов до 7 часов. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы при тех же расценках заработная плата возросла на 5%?

2. Вычислите:

а) $\left(\frac{5}{8}+\frac{7}{12}\right)\cdot\left(3\,\frac{23}{58}-2\,\frac{9}{58}\right)$;

б) $\frac{12\frac{4}{5}\cdot 3\frac{3}{4}-4\frac{4}{11}\cdot 4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3}\cdot 2\frac{4}{7}}$;

в) $4\,\frac{2}{3}+1\,\frac{1}{3}\cdot 3-5\,\frac{1}{6}$;

г) $\frac{12{,}8:0{,}64+3{,}05:0{,}05}{8\frac{2}{3}:1\frac{4}{9}-1}$;

д) $15\,\frac{6}{7}-12\,\frac{6}{7}\cdot\left(0{,}1+\frac{1}{15}\right)$;

е) $\left(1{,}8^2-2{,}3\cdot 1\,\frac{4}{5}\right):2\,\frac{4}{7}$;

ж) $\frac{0{,}15-0{,}15\cdot 3\frac{1}{2}}{-\frac{3}{8}+0{,}25}$;

з) $\left(1\,\frac{1}{5}\cdot 0{,}7-1{,}2^2\right):1\,\frac{1}{2}$.

3. Даны комплексные числа:

$z_1 = 3 + 2i$,

$z_2 = 4 - i$,

$z_3 = 5 + 2i$,

$z_4 = 6 - 3i$.

Выполните действия:

а) $z_1 \cdot z_2 + z_3 \cdot z_4$; б) $z_1 \cdot z_4 + z_2 \cdot z_3$

в) $z_1 \cdot z_3 - z_2 \cdot z_4$;

г) $\frac{z_1}{z_2}$; д) $\frac{z_2}{z_3}$;

е) $\frac{z_3}{z_4}$; ж) $\frac{z_4}{z_1}$;

з) $|z_1|, |z_2|, |z_3|, |z_4|$.

Порядок выполнения работы:

Внимательно ознакомьтесь с условием задания.

Пользуясь своими школьными знаниями (в случае затруднения воспользуйтесь справочными материалами), выполните задание

Задание №1

1) $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2+1}{5}=\frac{3}{5}$;

2) $\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=\frac{3+4}{7}=\frac{7}{7}=1$;

3) $3\frac{1}{5}+4\frac{1}{5}=(3+4)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)=7+\frac{2}{5}=7\frac{2}{5}$;

4) $3\frac{2}{7}-1\frac{1}{7}=(3-1)+\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{7}\right)=2+\frac{1}{7}=2\frac{1}{7}$;

5) $\frac{7}{12}:\frac{3}{4}=\frac{7}{12}\cdot\frac{4}{3}=\frac{7\cdot4}{12\cdot3}=\frac{7\cdot1}{3\cdot3}=\frac{7}{9}$;

6) $2\frac{1}{5}:3\frac{2}{3}=\frac{11}{5}:\frac{3}{11}=\frac{11\cdot3}{5\cdot11}=\frac{1\cdot3}{5\cdot1}=\frac{3}{5}$;

7) $3\frac{2}{5}+14\frac{1}{3}=(3+14)+\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)=17+\frac{6+5}{15}=17\frac{11}{15}$;

Задание №2

Пример. Найти $(8+i):(2-3i)$.

Решение. Перепишем это отношение в виде дроби: $\frac{8+i}{2-3i}$

Умножив, её числитель и знаменатель на $2+3i$ и выполнив все преобразования, получим:

$$\frac{(8+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{13+26i}{13}=1+2i$$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка **"отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка **"хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка **"удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка **"неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.1 Развитие понятия о числе

Практическое занятие № 2
«Решение прикладных задач на проценты»

Цель работы: Научиться решать текстовые задачи на нахождение процентов от числа.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ПК 2.1 Выполнять расчеты параметров технологического процесса, работы оборудования, характеристик исходного сырья и продукции при производстве черных металлов.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание

1. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы сталевар получил за выполненную работу 16530 рублей. Сколько рублей составляет стоимость выполненной работы?
2. Комиссия за межбанковский перевод составляет 1,5% от суммы перевода, но не менее 100 рублей. Какова будет комиссия за межбанковский перевод суммы 50 000 рублей?
3. 25% участников конкурса профмастерства прошли в полуфинал, из них 10% оказались в финале. Сколько было участников конкурса, если финалистами оказались 8 человек?

Порядок выполнения работы:

Внимательно ознакомьтесь с условием задания.

Пользуясь полученными знаниями (в случае затруднения воспользуйтесь справочными материалами), выполните задание.

Один процент — это одна сотая доля числа. Математическими знаками один процент записывается так: 1%.

Определение одного процента можно записать равенством: 1 % = 0,01 * а 5%=0,05, 23%=0,23, 130%=1,3 и т.д.

Как найти 1% от числа? Раз 1% это одна сотая часть, надо число разделить на 100. Деление на 100 можно заменить умножением на 0,01. Поэтому, чтобы найти 1% от данного числа, нужно умножить его на 0,01. А если нужно найти 5% от числа, то умножаем данное число на 0,05 и т.д.

Задача: Предприятие закупает заготовки металлопроката по оптовой цене 110 рублей за штуку и продает с наценкой 30%. Какое наибольшее число таких заготовок можно купить на 1200 рублей?

Решение

1) Определяем наценку предприятия:

30% = 0,3;

110 · 0,3 = 33 руб. наценка

2) Определяем розничную цену:

110 + 33 = 143 руб. розничная цена

3) Определяем количество заготовок

1200 : 143 = 8 (ост. 56)

Ответ: 8

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка **"отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка **"хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка **"удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка **"неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.1 Развитие понятия о числе

Практическое занятие № 3
«Решение рациональных уравнений и систем уравнений»

Цель работы: формирование умений решать линейные, квадратные, биквадратные, дробно-рациональные уравнения.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

Задание

1. Решить уравнения:

а) $(x-2)-5=4-(5x-1)$;

б) $(2x+7)(3x-1)-(5x-1)(x+3)=(x+1)^2$;

в) $\frac{x-1}{2}=\frac{4+2x}{3}$;

г) $-\frac{1}{3}x^2+12=0$;

д) $10x^2+5x=0$;

е) $2x^2+3x-5=0$;

ж) $3x^2+7x-6=0$;

з) $x^2+8x+15=0$;

и) $x^4-2x^2-8=0$;

к) $\frac{16-x^2}{x-4}=0$;

л) $\frac{x}{2x-3}=\frac{4}{x}$;

м) $\frac{x^2-2x}{x-1}-\frac{2x-1}{1-x}=3$;

а) Решите системы уравнений

б) $\begin{cases} 3x-y=3, \\ 3x-2y=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x+3y=3, \\ 5x+6y=9; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2-y=-2, \\ 2x+y=2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} xy-x+y=7, \\ xy+x-y=13; \end{cases}$

Порядок выполнения работы:

При решении уравнений используются следующие правила преобразования уравнений в равносильные:

а) какой- либо член уравнения можно перенести из одной его части в другую с противоположным знаком;

б) обе части уравнения можно умножить или разделить на одно то же число, отличное от 0.

Краткие теоретические сведения:

Решение уравнений I–II степени с одной переменной

$ax+b=0, (x=\frac{-b}{a}, a\neq 0)$ – линейное уравнение I степени с одной переменной

$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ – уравнение II степени с одной переменной.

1. Определить вид уравнения и способ его решения.

2. Если уравнение дробно-рациональное, то найти общий знаменатель всех дробей, которые входят в уравнение.

3. Умножить обе части уравнения на общий знаменатель.

4. Решить полученное целое уравнение.

5. Произвести проверку корней, и исключить те из них, которые обращают в нуль общий знаменатель.

Решим уравнения:

а) $(3x+1)^2+(4x-1)^2=(5x-2)^2$

Раскроем скобки, применяя формулы сокращенного умножения $(a+b)^2$и $(a-b)^2$

$9x^2+6x+1+16x^2-8x+1=25x^2-20x+4$

$9x^2+6x+1+16x^2-8x+1-25x^2+20x-4=0$

Приведем подобные члены, получим

$18x-2=0$

$x=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$

Ответ: $x=\frac{1}{9}$– корень уравнения.

б) $\frac{x}{x-2}-\frac{7}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$

Разложим x^2-4 на множители и перенесем все члены уравнения в левую часть. Приведем дроби к общему знаменателю:

$\frac{x}{x-2}-\frac{7}{x+2}-\frac{8}{(x-2)(x+2)}=0$

$\frac{x(x-2)-7(x-2)-8}{(x-2)(x+2)}=0$

$\frac{x^2+2x-7x+14-8}{(x+2)(x-2)}=0$

$\frac{x^2-5x+6}{(x+2)(x-2)}=0$

Дробь равна нулю, когда её числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю, т.е.

$(x+2)(x-2)\neq 0 => x\neq 2, x\neq -2$

$x^2-5x+6=0$

$D=25-24=1$

$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$

$x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$

Но так как $x \neq 2,$ то $x_2 = 2$ – посторонний корень, следовательно решением уравнения будет $x_1 = 3$

Ответ: $x = 3$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка **"отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка **"хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка **"удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка **"неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.1 Развитие понятия о числе

Практическое занятие № 4
«Решение задач на составление уравнений с профессиональным содержанием»

Цель работы: формирование умений решать текстовые задачи, составляя уравнения и системы уравнений.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ПК 2.1 Выполнять расчеты параметров технологического процесса, работы оборудования, характеристик исходного сырья и продукции при производстве черных металлов.

Задание

Решите задачи:

1. Готовую продукцию металлопроката весом 135 т разрезали на две части так, что одна из них легче другой в два раза. Найдите вес каждой части.
2. Имеется два металлопроката разных сортов. Масса первого металлопроката равна 65кг. Другой, длина которого на 3м больше длины первого и масса каждого метра которого на 2кг больше массы каждого метра первого металлопроката, имеет массу 120 кг. Вычислите длину каждого металлопроката.
3. На складе имеются заготовки металлопродукции 60 кг и 100 кг. Когда реализовали 50% заготовок 60 кг и 20% заготовок 100 кг, что составило в общей сложности 390 заготовок, то заготовок 60 кг осталось в 3 раза больше, чем 100 кг. Сколько изначально было на складе заготовок 60 кг и 100 кг?
4. Двум сталеварам была поручена работа. Второй приступил к работе на час позже первого. Через 3 часа после того, как первый приступил к работе, им осталось выполнить $\frac{9}{20}$ всей работы. По окончании работы оказалось, что каждый выполнил половину всей работы. За сколько часов каждый, работая отдельно, может выполнить всю работу?

Порядок выполнения работы:

Внимательно ознакомьтесь с условием задания.

Пользуясь полученными знаниями (в случае затруднения воспользуйтесь справочными материалами), выполните задание.

Под алгебраическим методом решения задач понимается такой метод решения, когда неизвестные величины находятся в результате решения уравнения или системы уравнений, составленных по условию задачи.

При решении задач алгебраическим методом основная мыслительная деятельность сосредотачивается на первом этапе решения задачи: на разборе условия задачи и составлении уравнений или неравенств по условию задачи.

Вторым этапом является решение составленного уравнения или системы уравнений, неравенства или системы неравенств.

Третьим важным этапом решения задач является проверка решения задачи, которая проводится по условию задачи.

Задача:

Первый металлург за час выплавляет на 10 т чугуна больше, чем второй, и выполняет заказ, состоящий из 60 т, на 3 часа быстрее, чем второй металлург, выполняющий такой же заказ. Сколько выплавит чугуна в час второй металлург?

Решение:

Пусть x тонн в час выплавляет второй металлург, тогда первый (x+10) тонн.

	Производительность	Время	Работа
1 металлург	$(x+10)$ т в час	$\frac{60}{x+10}$ ч	60 т
2 металлург	x т в час	$\frac{60}{x}$ ч	60 т

Так как первый выплавляет на 3 часа меньше, чем второй, то составим уравнение:

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} = 3$$

Получим $x=-20$ и $x=10$ (-20 – не подходит по смыслу задачи)

10 тонн в час делает второй металлург.

Ответ: 10 тонн.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка **"отлично"** ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка **"хорошо"** ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка **"удовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка **"неудовлетворительно"** ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.1 Развитие понятия о числе

Практическое занятие № 5
«Решение рациональных неравенств»

Цель работы: Повторить и закрепить знания и умения учащихся при решении рациональных неравенств.

Выполнение работы способствует формированию:
ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;
ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

Задание

Решить неравенства:

1) $3x-(2x-7)\leq 3(1+x)$;
2) $x+\frac{x-3}{6}>3$;
3) $\frac{x+4}{5}-\frac{x-1}{4}\geq 1$;
4) $\frac{x-1}{2}+\frac{x+1}{3}\geq 7$;
5) $x^2+x-6\leq 0$;
6) $x^2+3x+2>0$;
7) $x^2<0{,}25$;
8) $4-x^2<0$;
9) $x^2-8x>0$;
10) $x^2+24x\leq 0$;
11) $x^2-6x+9<0$;
12) $25x^2-10x+1\geq 0$;
13) $x(x-1)(x-4)>0$;
14) $(x+2)(x-5)(x+9)\leq 0$;
15) $x(x-2)(x-5)^2\geq 0$;
16) $x^2(x+1)(x-6)^2>0$;
17) $(x+6)(x-2)^3(x+3)^4\geq 0$;
18) $x^2(x+7)(x-5)^8(x+8)^3\leq 0$;
19) $\frac{x+3}{x-2}\leq 0$;
20) $\frac{(x+4)(x+7)}{x}\geq 0$;
21) $\frac{(x-2)(x+4)^2}{7x-x^2}<0$;
22) $\frac{(x^2+x)(x-3)}{(x-1)^2}\leq 0$;

Порядок выполнения работы:

При решении неравенств используются следующие правила преобразования неравенств в равносильные:

а) какой- либо член неравенства можно перенести из одной его

части в другую с противоположным знаком, оставив при этом без изменения знак неравенства;

б) обе части неравенства можно умножить или разделить на одно то же положительное число, оставив при этом без изменения знак неравенства;

в) обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный

При решении систем неравенств нужно решить каждое из них и выбрать общее решение.

Решим неравенства.
1. $5x-\frac{7x-1}{2}+\frac{2x-5}{5}>\frac{7}{10}$
Перенесем все члены в левую часть и приведем к общему знаменателю. общий знаменатель 10; так как знаменатель не содержит переменной, то в дальнейшем его можно не писать

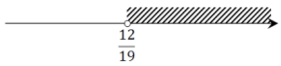
(опустить).

$50x - 5(7x - 1) + 2(2x - 5) - 7 > 0$

$50x - 35x + 5 + 4x - 10 - 7 > 0$

$19x - 12 > 0$

$x > \frac{12}{19}$



Ответ: $x \in \left(\frac{12}{19};\ \infty\right)$

2. $5x - 2 - 3x^2 > 0$ - квадратное неравенство умножим на (–1)

$3x^2 - 5x + 2 < 0$

Найдем корни уравнения:

$3x^2 - 5x + 2 = 0$

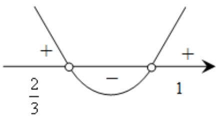
$D = 25 - 24 = 1$

$x_1 = \frac{5+1}{6} = 1$

$x_2 = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3}$

Графиком функции $3x^2 - 5x + 2 = 0$ является парабола (рис.2), ветви которой направлены вверх, а точки пересечения параболы и оси OX это $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{2}{3}$

Изобразим геометрически:



Так как мы решаем неравенство $3x^2 - 5x + 2 < 0$, то решением неравенства будет промежуток (интервал) $x \in \left(\frac{2}{3}; 1\right)$

Ответ: $x \in \left(\frac{2}{3}; 1\right)$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "**отлично**" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "**хорошо**" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "**удовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "**неудовлетворительно**" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.2 Функции и графики

Практическое занятие №6
«Исследование функций. Свойства линейной, квадратичной, кусочно-линейной и дробно-линейной функций»

Цель работы: научиться определять четность нечетность функции, проводить исследование функции на монотонность, экстремумы, нули функции и промежутки знакопостоянства.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

Задание

1) Найдите значения функций в точках

а) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1,$ $x_1 = 0,$ $x_2 = 2,$ $x_3 = -1;$

б) $f(x) = \frac{x+1}{x-3},$ $x_1 = -1,$ $x_2 = 0,$ $x_3 = 6.$

2) Для функции $\mathrm{f(x)} = \frac{2x^2+3x-4}{3x+3}$ найдите:

а) $f(x-2);$

б) $f(-x^3);$

в) $f\left(\frac{1}{x}\right).$

3) Найдите область определения функций:

а) $y = \frac{6}{x^2-16};$ б) $y = \frac{7}{25-x^2};$

в) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2};$ г) $y = \sqrt{x^2 + 4x - 12};$

д) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}};$ е) $y = \sqrt{\frac{3}{49-x^2}}.$

4) Исследуйте функции на чётность:

а) $y = x^2 + 2x^4 + 1;$ б) $y = 2x^7 - 4x^3 + x;$

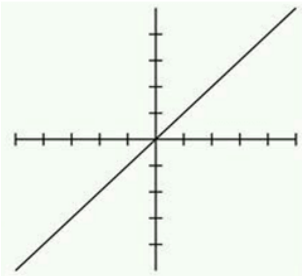
в) $y = 5 - 3x^3;$ г) $y = 2^x + 2^{-x};$

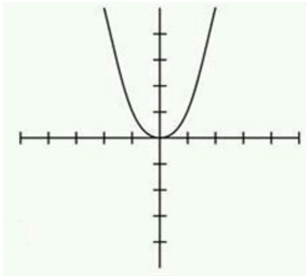
д) $y = 2^x - 2^{-x};$ е) $y = \frac{-3x^2+1}{1-x^4};$

ж) $y = \frac{x}{x^2+1};$ з) $y = 3x^5 - 2x^3 + 4x + 3.$

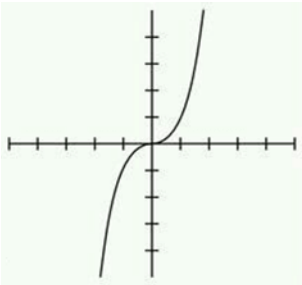
5) ***Исследуйте функции, заданные графически, на четность:***

а) **б)**

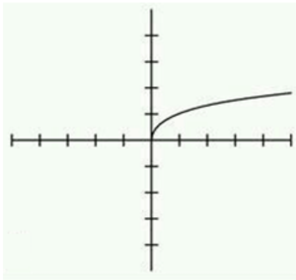




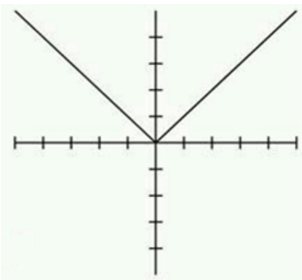
в)



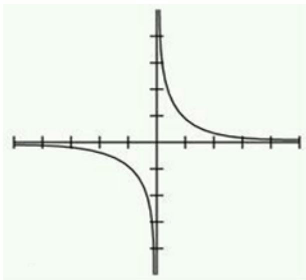
г)



д)



е)



Порядок выполнения работы:

1) Найдите область определения функции.

Для нахождения промежутков знакопостоянства найдите точки пересечения с осью абсцисс, решив уравнение y=0. Найденные корни расставьте на оси Ох в порядке возрастания и найдите знак функции на каждом из полученных интервалов. Запишите результат.

2) Найдите область определения функции. Убедитесь, что она симметрична.

1.Замените аргумент функции x на "-x". Подставьте этот аргумент в функциональное выражение.

2.Упростите выражение.

3.Таким образом, вы получили одну и ту же функцию, записанную для аргументов "x" и "-x". Посмотрите на две эти записи.

Если $y(-x) = y(x)$, то это четная функция.

Если $y(-x) =- y(x)$, то это нечетная функция.

Если же про функцию нельзя сказать, что $y(-x)=y(x)$ или $y(-x)=-y(x)$, то по свойству четности это функция общего вида. То есть, она не является ни четной, ни нечетной.

4.Запишите сделанные вами выводы.

3) Найдите область определения функции и нули функции, если они есть. Исследуйте функцию на монотонность на полученных интервалах.

Функция $F(x)$ называется возрастающей на отрезке $[a,b]$, если для любых двух точек x_1 и x_2 из $[a,b]$ справедливо неравенство $F(x_1)<F(x_2)$, когда $x_1< x_2$.

Функция F(x) называется убывающей на отрезке [a,b] , если для любых двух точек x_1 и x_2 из [a,b] справедливо неравенство $F(x_1)>F(x_2)$, когда $x_1< x_2$.

Исследовать функцию $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$.

Решение

Область определения функции $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{-x}=\frac{x^2-1}{-x}=-\frac{x^2-1}{x}=-f(x)$$

$f(-x)=-f(x)$ => функция $f(x)$ является нечетной.

Форма представления результата: выполненное задание**.**

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.2 Функции и графики

Практическое занятие №7
«Построение и чтение графиков функции»

Цель работы: повторение изученного материала; применение теоретических знаний к решению практических задач.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ПК 2.1 Выполнять расчеты параметров технологического процесса, работы оборудования, характеристик исходного сырья и продукции при производстве черных металлов.

Задание

1. Температура печи в зависимости от времени меняется по закону:

   $I(t)=t^2-8t+17.$

   Постройте график изменения температуры. В какой момент времени температура была минимальной? В какой промежуток времени температура возрастала?

2. Применяя геометрические преобразования, постройте графики функций:

а) $y = (x - 5)^2 + 1$;
б) $y = |(x + 1)^3 + 1|$;
в) $y = \frac{1}{x-2} + 3$;
г) $y = \frac{1}{|x|+2} - 3$.

Порядок выполнения работы

Для построения графиков воспользуйтесь геометрическими преобразованиями: симметричное отображение графиков относительно осей координат, параллельный перенос графиков, сжатие и растяжение.

Построить график функции $y = (x + 3)^2 + 4$.
За основу возьмём график $y = x^2$ (рис. 1).
Затем строим график $y = (x + 3)^2$ путём параллельного переноса графика влево(рис.2).
Строим график $y = (x + 3)^2 + 4$ параллельным переносом графика вверх (рис.3).

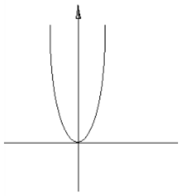


Рис. 1

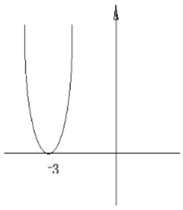


Рис. 2

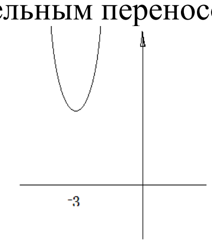


Рис. 3

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3 Корни, степени и логарифмы

Практическое занятие №8
«Решение иррациональных уравнений»

Цель работы: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении различных видов иррациональных уравнений.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;
ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;
ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

Задание

Решите уравнения:
1) $\sqrt[3]{x-1}=4$;
2) $\sqrt{3x+7}+4=0$;
3) $7-\sqrt{x+2}=4$;
4) $\sqrt{16x^2+16x+29}=5$;
5) $\sqrt[3]{\frac{x+2}{5x+22}}=-1$;
6) $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$;
7) $\sqrt{5+\sqrt[3]{x+3}}=3$;
8) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$.

Порядок выполнения работы

1) При возведении уравнения в четную степень получается уравнение, являющееся следствием исходного. Поэтому возможно появление посторонних решений уравнения, но не возможна потеря корней. Причина приобретения корней состоит в том, что при возведении в четную степень чисел, равных по абсолютной величине, но разных по знаку, получается один и тот же результат.

Так как могут появиться посторонние корни, то необходимо делать проверку, подставляя найденные значения неизвестной только в первоначальное уравнение, а не в какие-то промежуточные.

2) При решении иррациональных уравнений полезно перед возведением обеих частей уравнения в некоторую степень "уединить радикал".

Решить уравнение $\sqrt{5x-8}=4$.

Чтобы избавиться от корня, возведём обе части уравнения в квадрат:

$\left(\sqrt{5x-8}\right)^2=4^2$

$5x-8=16$

$5x=16+8$

$5x=24$

$x=\frac{24}{5}$

$x=4{,}8$.

Форма представления результата: выполненные задания.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3 Корни, степени и логарифмы

Практическое занятие №9
«Преобразования выражений, содержащих степени и радикалы»

Цель работы: обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся при решении конкретных заданий по теме

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ПК 2.1 Выполнять расчеты параметров технологического процесса, работы оборудования, характеристик исходного сырья и продукции при производстве черных металлов.

Задание

1. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{24 \cdot 9}$; б) $\sqrt[4]{48 \cdot 27}$;

в) $\sqrt[4]{54 \cdot 24}$; г) $\sqrt[3]{75 \cdot 45}$;

д) $\sqrt[5]{160 \cdot 625}$; е) $\sqrt[5]{48 \cdot 162}$;

2. Представьте выраdение в виде степени и найдите его значение при данном значении переменной:

а) $\frac{a^5 \cdot a^{-8}}{a^{-2}}$ при $a = 6$; б) $\frac{p^{-9}}{p^{-2} \cdot p^{-5}}$ при $p = \frac{1}{2}$;

в) $\frac{b^{-9}}{(b^2)^{-3}}$ при $b = \frac{1}{2}$; г) $(t^{-3})^2 \cdot \frac{1}{t^{-5}}$ при $t = 0{,}1$.

3. Известно, что диаметр стержня-подвески из арматурной стали $d_{тр} = 3$см. Определите требуемую площадь сечения стержня $A_{тр}$ (см^2), если диаметр задается по формуле $d_{тр} = \sqrt{\frac{4 \cdot A_{тр}}{\pi}}$. Значение π возьмите равное 3.
4. Период полураспада вещества равен 140 суток. Сколько вещества останется через 10 лет, если его начальная масса равна 8г?

Порядок выполнения работы

Вынесите знак минус из произведения. Воспользуйтесь свойством степени с отрицательным показателем. Употребите свойство воспроизведения во вторую степень. Для окончательного упрощения этого примера воспользуйтесь правилом умножения дробей. В последнем шаге воспользуйтесь делением степеней с одинаковым показателем.

В этом случае надо применит свойство степеней с отрицательным показателем. Чтобы разгрузить полученную дробь, надо преобразовать эту дробь в деление. Привести дробь к общему знаменателю и произвести сложение дробей с общим знаменателем. Последним шагом сделать сокращение.

Определите порядок действия. Выражение в первой скобке приведите к общему знаменателю, в числителе сделайте группировку и вынесите общий множитель за скобку. Выполните деление, сократите на общий множитель. Последнее действие – сложение дробей с одинаковыми знаменателями. Приведите подобные слагаемые.

1) Упростить выражение: $\frac{((x^6)^{-3}(x^2)^4)y^6}{x^2y^3} - \frac{x^7y^5z^7}{x^{10}y^{10}z^{17}}$

Вначале надо провести раскрытие скобок, для этого воспользуемся свойством степеней.

$= \frac{x^{((-3)6)}x^{(4\cdot 2)}y^{6-3}}{x^2} - x^{7-10}y^{5-10}z^{7-17}$ $= x^{-12}y^3 - x^{-3}y^{-5}z^{-10} =$

Воспользуемся свойством степеней с отрицательным показателем.

$= \frac{y^3}{x^{12}} - \frac{1}{x^3y^5z^{10}}$.

Ответ: $\frac{y^3}{x^{12}} - \frac{1}{x^3y^5z^{10}}$

2) Упростить выражение

$\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$.

Решение. Введем обозначение $a = \sqrt{x}$, тогда $x = (\sqrt{x})^2 = a^2$, $x\sqrt{x} = a^2a = a^3$.

Формула из условия задачи после замены будет выглядеть так: $\frac{a+1}{a^3+a^2+a} : \frac{1}{a^4-a}$.

Заметим, что $a^4-a=a(a^3-1^3)=a(a-1)(a^2+a+1)$.

Тогда $\frac{a+1}{a^3+a^2+a} : \frac{1}{a^4-a} = \frac{a+1}{a(a^2+a+1)} \cdot \frac{a(a-1)(a^2+a+1)}{1} = (a+1)(a-1) = a^2-1.$

Вернемся к замене: $a^2-1=x-1$.

Ответ: x-1.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3 Корни, степени и логарифмы

Практическое занятие №10
«Решение показательных уравнений»

Цель работы: обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся по методам решения показательных уравнений. Рассмотреть применение показательных функций

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

Задание

1. Решить уравнения:

а) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 1$;

б) $0{,}5^x = 0{,}125$;

в) $4^x = \frac{1}{16}$;

г) $7^x = \frac{1}{343}$;

д) $10^x = \sqrt[4]{1000}$;

е) $0{,}3^x = \sqrt[4]{0{,}0081}$;

ж) $5^x = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$;

з) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25\sqrt{5}$;

и) $2^{x+1} = 4$;

к) $0{,}4^{4-5x} = 0{,}16\sqrt{0{,}4}$;

л) $5^{3x-1} = 0{,}2$;

м) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} = 8\sqrt{2}$;

н) $3^{-1-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+3}$;

о) $\left(\frac{1}{6}\right)^{4x-7} = 6^{x-3}$;

п) $3^x - 3^{x+3} = -78$;

р) $2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{3x+7} - 7 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{3x+8} = 49$;

с) $5^{2x-1} - 5^{2x-3} = 4{,}8$;

т) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{5x} = \frac{4}{9}$;

2. Давление воздуха изменяется в зависимости от высоты по закону $p(h) = 2^{\frac{h}{4}}$. На какой высоте давление воздуха равно 128Па?

3. Сила трения железного троса, намотанного на железный барабан, дает возможность уравновесить меньшей силой F_0 Большую силу F, которую вычисляют по формуле $F = F_0 \cdot 3^n$, где n - число витков троса на барабане. Требуется установить сколько раз трос намотан на барабан, если силой 8 Н удерживается груз 24 Н.

Порядок выполнения работы:

Обе части уравнения приводим к одному основанию: $a^{f(x)} = a^{\Phi(x)}$, где $(a \succ 0, a \neq 1)$ Затем используем следующее свойство: ($a^{f(x)} = a^{\Phi(x)}$) $\Leftrightarrow (f(x) = \Phi(x))$.

Решите уравнение: $0{,}1^{x^2-0{,}5} \cdot \sqrt{0{,}1} = 0{,}001 \cdot$

Решение: Преобразуем уравнение к виду: $a^{f(x)} = a^{\Phi(x)}$.

$0{,}1^{x^2-0{,}5} \cdot 0{,}1^{0{,}5} = 0{,}1^3 \Leftrightarrow 0{,}1^{x^2-0{,}5+0{,}5} = 0{,}1^3 \Leftrightarrow 0{,}1^{x^2} = 0{,}1^3.$

Затем решаем уравнение: $x^2 = 3 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}.$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных

Тема 1.3 Корни, степени и логарифмы

Практическая работа №11
«Решение показательных неравенств»

Цель: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся по методам решения показательных неравенств.

Выполнение работы способствует формированию:
ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам ;
ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;
ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

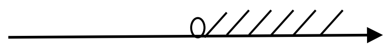
Задание:
1.Решите простейшие показательные неравенства:
1) $\left(\frac{1}{6}\right)^x < 216$; 2) $27^x > \frac{1}{3}$; 3) $2^{3x} \le \frac{1}{2}$.
.
2. Решите показательные неравенства:

1) $5^{x^2-2x-1} < 25$;
2) $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$

Порядок выполнения работы:
1. Запишите показательное уравнение.
2. Обе части неравенства приведите к одному основанию: $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$.
3. При решении показательных неравенств необходимо учесть свойство монотонности функции, т.е. при $a > 1$ $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) > \varphi(x)$
при $0 < a < 1$ $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) < \varphi(x)$.
4. Решите получившееся алгебраическое неравенство.
5. Запишите ответ.

Записать задание в тетрадь и решить.

1. $\left(\frac{1}{6}\right)^x < 216$
Решение:
$\left(\frac{1}{6}\right)^x < \left(\frac{1}{6}\right)^{-3}$,
$x > -3$
Ответ: $x \in (-3; +\infty)$


-3

2. $5^{x^2-2x-1} < 25$
Решение:

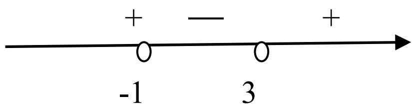
$5^{x^2-2x-1} < 5^2$

$x^2 - 2x - 1 < 2$

$x^2 - 2x - 3 < 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x_1 = -1;\ x_2 = 3$



Ответ: $x \in (-1; 3)$

3. $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$

Решение: $3^x \cdot 3^2 + 3^x \cdot \frac{1}{3} < 28$

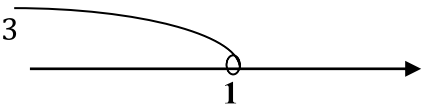
$3^x = y;$

$9y + \frac{1}{3}y < 28;$

$9\frac{1}{3}y < 28;$

$y < 28 : 9\frac{1}{3};\quad y < 3.$

Вернемся к старой переменной: $3^x < 3$



$x < 1$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" выставляется, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" выставляется, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3 Корни, степени и логарифмы

Практическое занятие №12.
Решение показательных уравнений и неравенств.

Цель: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся по методам решения показательных уравнений и неравенств. Формировать навыки решения.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
1. Решите показательное уравнение:
а) $2 * 4^x - 5 * 2^x + 2 = 0$;
б) $2^{2x+1} - 5 * 2^x - 88 = 0$;
в) $\left(\frac{1}{36}\right)^x - 5 * \left(\frac{1}{6}\right)^x - 6 = 0$

2. Решите показательное неравенство:

а)$9^{\mathrm{x}} - 3^{\mathrm{x}} - 6 > 0$;

б) $3^x + 9^{x-1} - 810 \leq 0$

Порядок выполнения работы:

1. Запишите уравнение (неравенство). Определите, каким методом нужно воспользоваться для решения. Основными методами решения показательных уравнений и неравенств являются: метод приведения обеих частей к степени с одинаковым основанием; метод введения новой переменной; метод вынесения общего множителя за скобки.
2. Примените выбранный метод. При решении показательных уравнений необходимо помнить, что решение любого показательного уравнения сводится к решению простейших показательных уравнений.
3. При решении показательных неравенств необходимо учитывать свойство монотонности функции, т.е. при $a > 1$ $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) > \varphi(x)$
при $0 < a < 1$ $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) < \varphi(x)$.
4. Запишите ответ.

1. Решите показательное уравнение:
а) $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$;
Решение:
$2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$.
Введем новую переменную:$2^x = y$.
Получим уравнение: $2y^2 - 5y + 2 = 0$.
Решаем полученное квадратное уравнение:
$D = b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9 = 3^2$
$y_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$; $y_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2$.
Вернемся к старой переменной, при этом получим простейшие показательные уравнения:
$2^x = \frac{1}{2}$; или $2^x = 2$
$2^x = 2^{-1}$; $2^x = 2^1$;
$x = -1$; $x = 1$.
Ответ: -1;1

б) $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x - 88 = 0$;
Решение: $2^{2x} \cdot 2 - 5 \cdot 2^x - 88 = 0$;

Введем новую переменную: $2^x = y$.
Получим уравнение: $2y^2 - 5y - 88 = 0$.
Решаем полученное квадратное уравнение:
$D = b^2 - 4ac = 25 + 704 = 729 = 27^2$
$y_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{5-27}{4} = -\frac{22}{4} = -5{,}5$; $y_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{5+27}{4} = \frac{32}{4} = 8$.

Вернемся к старой переменной, при этом получим простейшие показательные уравнения:
$2^x = -5{,}5$; или $2^x = 8$
Нет решений, т к $2^x > 0$; $2^x = 2^3$;
$x = 3$.

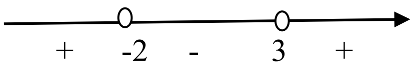
Ответ: 3

2. Решите показательное неравенство:

$9^{\mathrm{x}} - 3^{\mathrm{x}} - 6 > 0$

Решение: $3^{2x} - 3^x - 6 > 0$;

Введем новую переменную: $3^x = y$.
Получим квадратное неравенство: $y^2 - y - 6 > 0$.
Решаем полученное квадратное неравенство методом интервалов:
$y^2 - y - 6 = 0$;
$D = b^2 - 4ac = 1 + 24 = 25 = 5^2$;
$y_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{1-5}{2} = -2$; $y_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$.



Решением относительно переменной y являются интервалы: $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$. Запишем эти интервалы в виде неравенств:

$\left[\begin{array}{l} y < -2; \\ y > 3 \end{array}\right.$; Вернемся к старой переменной $\left[\begin{array}{l} 3^x < -2; \\ 3^x > 3 \end{array}\right.$.

Неравенство $3^x < -2$ не имеет решения.

$3^x < 3^1$;

$x > 1$.

Ответ: $(1; +\infty)$.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" выставляется, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" выставляется, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3 Корни, степени и логарифмы

Практическая работа №13

«Нахождение значений логарифма по произвольному основанию. Переход от одного основания к другому. Вычисление и сравнение логарифмов. Логарифмирование и потенцирование выражений»

Цель: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся по теме. Формировать навыки нахождения значений логарифмических выражений, применяя определение и свойства логарифмов, логарифмировать и потенцировать выражения.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам ;

ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ПК 2.1 Выполнять расчеты параметров технологического процесса, работы оборудования, характеристик исходного сырья и продукции при производстве черных металлов.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Вычислите: а) $\log_{0,25} 0{,}64 + \log_{0,5} 10$;

   б) $2\log_4 6 + \log_4 0{,}2 + \frac{1}{2}\log_4 25 - \frac{1}{2}\log_4 81$.

2. Найдите значение выражения: $27^{1-\log_3 6} - 4^{-\log_4 0{,}125}$
3. Прологарифмируйте выражение по произвольному основанию: $\frac{a^2\sqrt[4]{d}}{b^3c^5}$.

Порядок выполнения работы:

1) Используйте соответствующие свойства логарифмов и определение логарифма.
2) Используйте основное логарифмическое тождество и свойства логарифмов.

а) Вычислите: $\log_{0,25} 0{,}64 + \log_{0,5} 10$

Решение: $\log_{0,25} 0{,}64 + \log_{0,5} 10 = =$

Используем формулу перехода к новому основанию $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$, получим

$$= \frac{\log_{0,5} 0{,}64}{\log_{0,5} 0{,}25} + \log_{0,5} 10 = \frac{1}{2}\log_{0,5} 0{,}64 + \log_{0,5} 10 =$$

далее используем свойства логарифма степени и логарифма произведения

$= \log_{0,5}\sqrt{0{,}64} + \log_{0,5} 10 = \log_{0,5}(0{,}8\cdot 10) = \log_{0,5} 8 = -3$. Ответ: -3.

б) $2\log_4 6+\log_4 0{,}2+\frac{1}{2}\log_4 25-\frac{1}{2}\log_4 81$

Решение: $2\log_4 6+\log_4 0{,}2+\frac{1}{2}\log_4 25-\frac{1}{2}\log_4 81=\log_4 6^2+\log_4 0{,}2+\log_4\sqrt{25}-\log_4\sqrt{81}=\log_4 36+\log_4 0{,}2+\log_4 5-\log_4 9=\log_4\frac{36\cdot 0{,}2\cdot 5}{9}=\log_4 4=1$

1) Найдите значение выражения: $27^{1-\log_3 6}-4^{-\log_4 0{,}125}$

Решение: $27^{1-\log_3 6}-4^{-\log_4 0{,}125}=$

Используем свойства степеней и основное логарифмическое тождество

$$(3^3)^{1-\log_3 6}-4^{\log_4 0{,}125^{-1}}=3^{3-3\log_3 6}-4^{\log_4\frac{1000}{125}}=\frac{3^3}{3^{\log_3 216}}-8=\frac{27}{216}-8=\frac{1}{8}-8=-7\frac{7}{8}.$$

Ответ: $-7\frac{7}{8}$.

3) Прологарифмируйте выражение по произвольному основанию:

$$\frac{a^2\sqrt[4]{d}}{b^3c^5}.$$

Прологарифмировать выражение – это значит выполнить следующий алгоритм:

1. Взять данное выражение в скобки и перед ними поставить знак логарифма по заданному основанию
2. Используя свойства логарифмов, необходимо убрать внутри логарифма такие действия, как возведение в степень, возведение в корень, умножение и деление

Прологарифмируем по основанию 10:

$lg\frac{a^2\sqrt[4]{d}}{b^3c^5}=lga^2+lg\sqrt[4]{d}-lgb^3-lgc^5=2lga+\frac{1}{4}lgd-3lgb-5lgc;$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" выставляется, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" выставляется, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3 Корни, степени и логарифмы

Практическая работа №14
«Построение графиков логарифмических функций»

Цель: Обобщить и систематизировать знания учащихся, формировать навыки построения графиков логарифмических функций с помощью преобразований и исследования их свойств. Рассмотреть применение логарифмов.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам ;

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

В одной системе координат построить график элементарной и данной функций:

1. $y = log_2(x-2)$;
2. $y = 2 - log_{\frac{1}{2}}x$;
3. $y = log_3(x-2)+1$

Порядок выполнения работы:

1. Определите, с помощью каких геометрических преобразований можно построить график заданной функции:

- График функции $y = f(x) + B$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ в положительном направлении вдоль оси Оу на расстояние В, если $B > 0$ и в отрицательном направлении вдоль оси Оу, если $B < 0$;
- График функции $y = f(x+b)$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ в положительном направлении вдоль оси Ох на расстояние b, если $b < 0$ и в отрицательном направлении вдоль оси Ох, если $b > 0$.
- График функции $y = -f(x)$ получается симметричным отображением графика *y=f(x)* относительно оси *Ox*.
- График функции $y = Af(x)$, получается растяжением графика $y = f(x)$ вдоль оси *Oy* от оси *Ox* в *A* раз при $A > 1$ или сжатием вдоль оси *Oy* к оси *Ox* в $1/A$ раз при $A < 1$.
- График функции $y = f(ax)$, получается сжатием графика $y = f(x)$ вдоль оси *Ox* к оси *Oy* в *a* раз при $a > 1$ или растяжением вдоль оси *Ox* к оси *Oy* в $1/a$ раз при $a < 1$.

2. Постройте исходный график.
3. Произведите нужные преобразования и постройте необходимый график.

4. Для обогрева металлургического цеха, температура в котором равна $T_п$ = 20°С, через радиатор отопления, пропускают горячую воду температурой $T_в$ = 100°С. Расход проходящей через трубу воды $m = 0{,}2$ кг/с. Проходя по трубе расстояние х (м), вода охлаждается до температуры Т °С, при чем

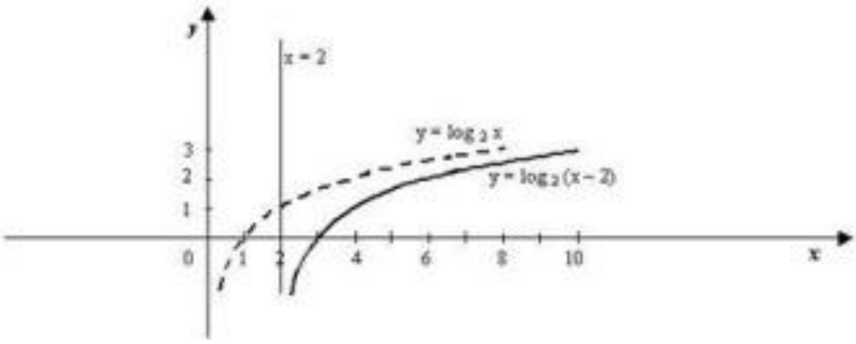
$$x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_в - T_п}{T - T_п}$$

где c = 4200Дж/кг*С — теплоемкость воды
γ = 42 Вт/м $^{*\,0}$С— коэффициент теплообмена
a = 1,4 — постоянная.

До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы 28 м?

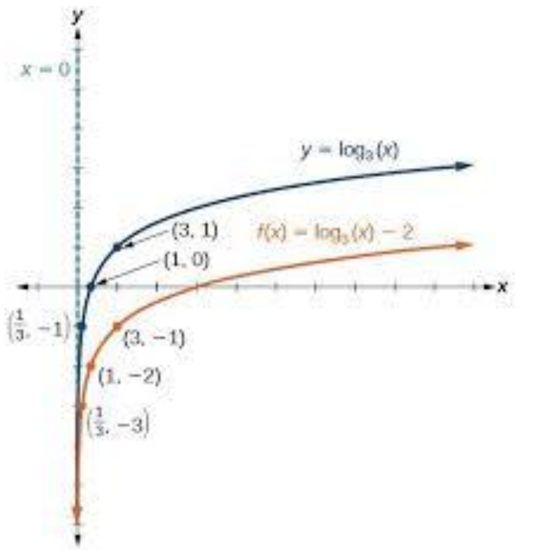
1. $y = log_2(x-2)$.

Построим сначала график функции $y = \log_2 x$.
График функции $y = log_2(x-2)$ получим параллельным переносом вдоль оси Ox вправо на 2.



2. $y = log_3 x - 2$

Построим сначала график функции $y = \log_3 x$.
График функции $y = log_3 x - 2$ получим параллельным переносом вдоль оси Oy вниз на 2.



3. Логарифмические функции распространены чрезвычайно широко как в математике, так и в естественных науках. Приведём несколько примеров использования логарифмов в разнообразных науках.

В статистике и теории вероятностей логарифм входит в ряд практически важных вероятностных распределений. Например, логарифмическое распределение используется в генетике и физике. Логнормальное распределение часто встречается в ситуациях, когда исследуемая величина есть произведение нескольких независимых положительных случайных переменных.

Закон Бенфорда («закон первой цифры») описывает вероятность появления определённой первой значащей цифры при измерении реальных величин.

Для оценки неизвестного параметра широко применяются метод максимального правдоподобия и связанная с ним логарифмическая функция правдоподобия.

Флуктуации при случайном блуждании описывает закон Хинчина-Колмогорова. Логарифм используется в определениях таких величин, как показатель константы автопротолиза (самоионизации молекулы) и водородный показатель (кислотности раствора).

Логарифмическая спираль пересекает свои радиус-векторы под постоянным углом. На основании этого ее называют равноугольной. Это свойство находит свое применение в технике. Дело в том, что в технике часто применяются вращающиеся ножи. Сила, с которой они давят на разрезаемый материал, зависит от угла резания, т.е. угла между лезвием ножа и направлением скорости вращения. Для постоянного давления нужно, чтобы угол резания сохранял постоянное значение, а это будет в том случае, если лезвия ножей очерчены по дуге логарифмической спирали. Величина угла резания зависит от обрабатываемого материала.

В гидротехнике по логарифмической спирали изгибают трубу, проводящую поток воды к лопастям турбины. Благодаря такой форме трубы потери энергии на изменение направления течения в трубе оказываются минимальными и напор воды используется с максимальной производительностью.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" выставляется, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" выставляется, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3 Корни, степени и логарифмы

Практическая работа №15
«Решение логарифмических уравнений»

Цель: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся по методам решения логарифмических уравнений. Формировать навыки решения уравнений.

Выполнение работы способствует формированию:
ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам ;
ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;
ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание: Решите логарифмические уравнения:

1) $\log_4(2x-6)=3$;
2) $\log_x(2x^2-3x-4)=2$;
3) $\log_7(2x^2-7x+6)-\log_7(x-2)=\log_7 x$;
4) $\log_5 x+\log_5(x-4)=14$;
5) $\lg\sqrt{x-7}+\lg\sqrt{3x-8}=1$.

Порядок выполнения работы:

Перед началом решения уравнения нужно найти область допустимых значений. Используя свойства логарифмов обе части уравнения приводим к одному основанию $\log_a f(x)=\log_a g(x)$. Потенцируем обе части уравнения, получаем f(x) = g(x). Решаем полученное уравнение. Т.к. потенцирование уравнения может привести к появлению посторонних корней, то делаем проверку. Записываем ответ.

Записать задание в тетрадь и решить.

1) $\log_4(2x-6)=3$

Решение: $\log_4(2x-6)=3$ ОДЗ: $2x-6>0$

$2x-6=3^4$;

$2x-6=81$;

$2x=87$;

$x=43{,}5$

Проверим, принадлежит ли найденный корень ОДЗ:

$$2\cdot 43{,}5-6=81>0$$

Ответ: 43,5

2) $\log_x(2x^2-3x-4)=2$ ОДЗ: $2x^2-3x-4>0$

$x^2=2x^2-3x-4$ $x>0; x\neq 1$

$x^2-2x^2+3x+4=0$

$-x^2+3x+4=0$

$x^2-3x-4=0$

$x_1=-1;\ x_2=4$

Проверим, принадлежат ли найденные корни ОДЗ:

$x_1=-1$ $2(-1)^2-3(-1)-4>0$

$2+3-4=1>0$

$x_2=4$ $2\cdot 4^2-3\cdot 4-4>0$

$$32-12-4=16>0$$

Ответ: $x_1=-1;\ x_2=4$

3) $\log_5 x + \log_5(x-4) = 1$ ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ x - 4 > 0 \end{cases}$

Используем свойства и определение логарифма:

$\log_5 x(x-4) = 1;$

$x^2 - 4x = 5^1;$

$x^2 - 4x - 5 = 0;$

$x_1 = -1; x_2 = 5.$

Проверим, принадлежат ли найденные корни ОДЗ:

$-1 < 0$, значит $x_1 = -1$- посторонний корень.

$5 > 0; \quad 5 - 1 = 4 > 0.$

Ответ: 5

4) $\log_7(2x^2 - 7x + 6) - \log_7(x-2) = \log_7 x$ ОДЗ: $\begin{cases} x > 0; \\ 2x^2 - 7x + 6 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$

$\log_7(2x^2 - 7x + 6) = \log_7(x-2) + \log_7 x;$

$\log_7(2x^2 - 7x + 6) = \log_7(x-2)x;$

$2x^2 - 7x + 6 = x^2 - 2x;$

$2x^2 - 7x + 6 - x^2 + 2x = 0;$

$x^2 - 5x + 6 = 0;$

$x_1 = 2;\ x_2 = 3.$

Проверим, принадлежат ли найденные корни ОДЗ:

$x_1 = 2; \begin{cases} 2 > 0; \\ 2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 6 = 0 \\ 2 - 2 = 0 \end{cases}$

$x_2 = 3 \begin{cases} 3 > 0; \\ 2 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 + 6 > 0; \\ 3 - 2 > 0 \end{cases}$

Ответ: 3.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" выставляется, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" выставляется, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.3 Корни, степени и логарифмы

Практическая работа №16
Решение логарифмических неравенств

Цель: Обобщить, закрепить и систематизировать знания учащихся по методам решения логарифмических неравенств. Формировать навыки решения неравенств.

Выполнение работы способствует формированию:
ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам ;
ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;
ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание: Решите логарифмические неравенства:

1. $\log_2(5x+3) \le 3$;
2. $\log_{0,5}(3x+4) \ge \log_{0,5}(x^2+6)$;
3. $log_2(x^2-9x+4) \ge 4$

Порядок выполнения работы: Работаем по алгоритму**:** используя определение логарифма обе части неравенства приводим к одному основанию, т. е. получаем неравенство вида log $_a$ f(x) $\prec$ log $_a$ g(x).

При решении логарифмических неравенств нужно учитывать свойство монотонности логарифмической функции, т.е.

при $a > 1$ $\log_a f(x) > \log_a g(x) \iff f(x) > g(x)$

при $0 < a < 1$ $\log_a f(x) > \log_a g(x) \iff f(x) < g(x)$.

При этом нужно обязательно учитывать и область допустимых значений.

Решение логарифмического неравенства сводится к решению систем неравенств:

при $a > 1$ $\log_a f(x) > \log_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

при $0 < a < 1$ $\log_a f(x) > \log_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Записать задание в тетрадь и решить.

1) $\log_2(5x+3) \le 3.$

Составим систему: $\begin{cases} 5x+3>0; \\ 5x+3 \le 2^3 \end{cases}$

Решим составленную систему: $\begin{cases} 5x+3>0; \\ 5x+3 \le 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x>-3; \\ 5x \le 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-0{,}6; \\ x \le 1 \end{cases}$ Ответ: $(-0{,}6; 1]$

2) $\log_{0,5}(3x+4) \ge \log_{0,5}(x^2+6)$

Составим систему неравенств, учитывая, что оба логарифмируемые выражения должны быть положительными и основание меньше 1.

$$\begin{cases} 3x+4>0 \\ x^2+6>0 \\ 3x+4 \le x^2+6. \end{cases}$$

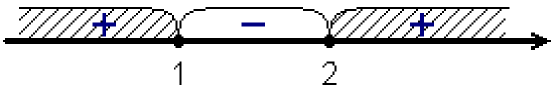
Решим составленную систему:

$$\begin{cases} 3x+4>0 \\ x^2+6>0 \\ 3x+4 \le x^2+6. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x>-4 \\ x^2>-6 \\ -x^2+3x+4-6 \le 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-\frac{4}{3} \\ x \in (-\infty; +\infty) \\ x^2-3x+2 \ge 0 \end{cases}.$$

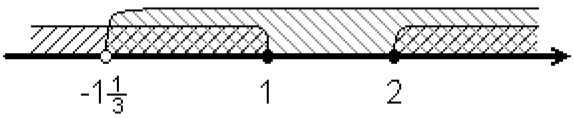
Квадратное неравенство решим методом интервалов:

$$x^2-3x+2 \ge 0$$

$x^2-3x+2=0 \Rightarrow x_1=1;\ x_2=2$



Найдём решение системы:



Ответ: $\left(-1\frac{1}{3}; 1\right] \cup [2; +\infty)$

3) $log_{\frac{1}{2}}(x^2+7x+10) \ge -2$

Составим систему неравенств, учитывая, что логарифмируемое выражение должно быть положительным и основание меньше 1.

$$\begin{cases} x^2+7x+10>0 \\ x^2+7x+10 \le \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \end{cases};$$

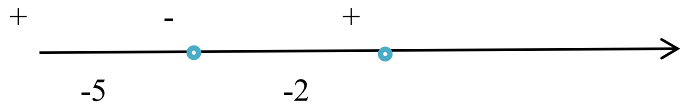
$$\begin{cases} x^2+7x+10>0. \\ x^2+7x+10 \le 4' \end{cases}$$

Решаем квадратные неравенства:

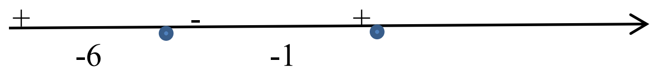
$x^2+7x+10>0$

$x^2 + 7x + 10 = 0$

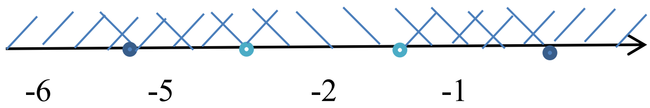
$x_1 = -5;\ x_2 = -2$



$x^2 + 7x + 10 \leq 4$
$x^2 + 7x + 6 = 0$
$x_1 = -6;\ x_2 = -1$



Найдём решение системы:



Ответ: $[-6; -5) \cup (-2; -1]$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:
Оценка "отлично" выставляется, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.
Оценка "хорошо" выставляется, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.
Оценка "удовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.
Оценка "неудовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.1 Основные понятия тригонометрии. Преобразование тригонометрических выражений

Практическая работа №17

«Радианный метод измерения углов вращения и связь с градусной мерой. Нахождение значений тригонометрических функций»

Цель: Формировать навыки перехода от радианной меры углов к градусной и обратно, нахождения значений тригонометрических функций.

Выполнение работы способствует формированию:
ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам ;
ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Выразите в радианах величину угла, заданного в градусах
   а) $150°$ б) $450°$ в) $40°$

2. Выразите в градусах величину угла, заданного в радианах

а) $\frac{\pi}{10}$ б) 4π в) $\frac{4\pi}{9}$

3. Используя определения тригонометрических функций, найдите знаки этих функций для углов:

а) $-210°$ б) $\frac{2\pi}{3}$

4. Зубчатое колесо имеет 72 зубца. На сколько градусов повернется колесо при повороте его: а) против часовой стрелки на 21 зубец; б) по часовой стрелке на 144 зубца?

5. Шкив электромотора делает 6000 оборотов в минуту. Вычислите угловую скорость вращения в градусах в секунду и в радианах в секунду.

Порядок выполнения работы:

1. Радианная и градусная меры связаны зависимостью $180° = \pi$ радиан. Поэтому $1° = \frac{\pi}{180°}$, значит $\propto° = \frac{\pi}{180}\alpha$ радиан.
2. Чтобы выразить угол в градусной мере воспользуйтесь соотношением $1\text{рад} = \frac{180°}{\pi}$.
3. Начертите единичную окружность, отложите заданный угол, помня, что положительным считается угол, откладываемый против часовой стрелки, а отрицательным – по часовой стрелке.

1. Выразите в радианах величину угла, заданного в градусах

а) $120°$ б) $225°$ в) $10°$

а) $120° = \frac{\pi}{180°} \cdot 120° = \frac{2\pi}{3}$; б) $225° = \frac{\pi}{180°} \cdot 225° = \frac{3\pi}{4}$; в) $10° = \frac{\pi}{180°} \cdot 10° = \frac{\pi}{18}$.

2. Выразите в градусах величину угла, заданного в радианах

а) $\frac{3\pi}{5}$ б) $\frac{2\pi}{9}$ в) $\frac{5\pi}{6}$

а) $\frac{3\pi}{5} = \frac{180°}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{5} = 108°$ б) $\frac{2\pi}{9} = \frac{180°}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{9} = 40°$ в) $\frac{5\pi}{6} = \frac{180°}{\pi}\frac{5\pi}{6} = 150°$

3. Используя определения тригонометрических функций, найдите знаки этих функций для углов:

а) $-120°$ б) $\frac{3\pi}{5}$

Построим единичную окружность и отложим данные углы. Угол $-120°$ откладываем по часовой стрелке. Точка, соответствующая углу $-120°$ лежит в III четверти, значит,

$\cos(-120°) < 0,\ \sin(-120°) < 0,$

$$\text{tg}\,(-120°) > 0, \quad ctg(-120°) > 0.$$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" выставляется, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" выставляется, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.1 Основные понятия тригонометрии. Преобразование тригонометрических выражений

Практическое занятие №18
Преобразования тригонометрических выражений. Основные тригонометрические тождества.

Цель: Формировать навыки преобразования тригонометрических выражений, используя основные тригонометрические тождества.

Выполнение работы способствует формированию:
ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;
ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.
Задание:
1. Найдите значения тригонометрических функций, если известно:
1) $cos \propto = 0{,}8,\ \frac{3\pi}{2} < \propto < 2\pi$
2) $sin \propto = 0{,}6, \frac{\pi}{2} < \propto < \pi$
3) $tg \propto = -\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2} < \propto < \pi$.
2. Колебание напряжения задается формулой: $U(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_0)$.Найдите значение напряжения, если известно, что $U_m = 100\ B,\ \varphi_0 = 0,\ sin\omega t = 0{,}6;$
$0 < \omega t < \frac{\pi}{2}$.

Порядок выполнения работы:
1. Запишите условие.
2. Запишите формулы основных тригонометрических тождеств, содержащие данную функцию и ту, которую необходимо найти.
3. Выразите неизвестную функцию. Если необходимо извлечь квадратный корень, то определите знак искомой функции, используя заданную четверть.
4. Вычислите значения всех неизвестных функций.

1. Дано: $cos \propto = 0{,}8,\ \frac{3\pi}{2} < \propto < 2\pi$
Найти: $sin \propto,\ tg \propto, ctg \propto$
Решение:
1)Запишем основное тригонометрическое тождество
$$cos^2 \propto + sin^2 \propto = 1$$
Выразим из него искомую функцию $sin \propto = \pm\sqrt{1 - cos^2 \propto}$
Так как синус в IV четверти имеет отрицательное значение, то
$sin \propto = -\sqrt{1 - 0{,}64} = -\sqrt{0{,}36} = -0{,}6$.
2) Запишем основное тригонометрическое тождество

$$tg \propto = \frac{sin \propto}{cos \propto}$$

Подставим известные значения и найдем неизвестную функцию

$$tg \propto = \frac{-0,6}{0,8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4} = -0,75$$

3) Запишем основное тригонометрическое тождество

$$tg \propto \cdot ctg\alpha = 1$$

Выразим из него искомую функцию $ctg \propto = \frac{1}{tg\propto}$

$$ctg \propto = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$$

3. Дано: $sin \propto = 0,6, \frac{\pi}{2} < \propto < \pi$

Найти: $cos \propto,\ tg \propto, ctg \propto$

Решение:

1)Запишем основное тригонометрическое тождество

$$cos^2 \propto + sin^2 \propto = 1$$

Выразим из него искомую функцию $cos \propto = \pm\sqrt{1 - sin^2 \propto}$

Так как косинус во II четверти отрицателен, то $cos \propto = -\sqrt{1 - 0,36} = -0,8$.

2) Запишем основное тригонометрическое тождество

$$tg \propto = \frac{sin \propto}{cos \propto}$$

Подставим известные значения и найдем неизвестную функцию

$$tg \propto = \frac{0,6}{-0,8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4} = -0,75$$

3) Запишем основное тригонометрическое тождество

$$tg \propto \cdot ctg\alpha = 1$$

Выразим из него искомую функцию $ctg \propto = \frac{1}{tg\propto}$

$$ctg \propto = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$$

4. Дано: $tg \propto = -\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2} < \propto < \pi$

Найти: $cos \propto,\ sin \propto, ctg \propto$

Решение:

1) Запишем основное тригонометрическое тождество

$$tg \propto \cdot ctg\alpha = 1$$

Выразим из него искомую функцию $ctg \propto = \frac{1}{tg\propto}$

$$ctg \propto = -1\frac{1}{3}$$

2) Запишем основное тригонометрическое тождество

$$1 + tg^2 \propto = \frac{1}{cos^2 \propto}$$

Выразим из него искомую функцию $cos \propto = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\propto}}$

Так как косинус во II четверти отрицателен, то $cos \propto = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = -\frac{4}{5} = -0,8$.

3) Запишем основное тригонометрическое тождество

$$cos^2 \propto + sin^2 \propto = 1$$

Выразим из него искомую функцию $sin \propto = \pm\sqrt{1 - cos^2 \propto}$

Так как синус во II четверти положительный, то $sin \propto = \sqrt{1 - 0{,}64} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$.

2. Колебание напряжения задается формулой: $U(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_0)$. Найдите значение напряжения, если известно, что $U_m = 100\ B,\ \varphi_0 = 0,\ sin\omega t = 0{,}6;$

$0 < \omega t < \frac{\pi}{2}$.

Решение:

Колебание напряжения задается формулой: $U(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_0)$. Чтобы вычислить значение напряжения, нужно найти $\cos(\omega t + \varphi_0)$.

По условию $sin\omega t = 0{,}6$. Запишем основное тригонометрическое тождество $cos^2\omega t + sin^2\omega t = 1$.

Выразим из него искомую функцию $cos\omega t = \pm\sqrt{1 - sin^2\omega t}$.

По условию $0 < \omega t < \frac{\pi}{2}$. Так как косинус в первой четверти положителен, то $cos\omega t = \sqrt{1 - 0{,}36} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$.

Подставим полученные значения в формулу $U = 100 \cdot 0{,}8 = 80$ В.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" выставляется, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" выставляется, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.1 Основные понятия тригонометрии. Преобразование тригонометрических выражений

Практическое занятие № 19
Преобразования тригонометрических выражений. Формулы сложения, удвоения. Формулы приведения

Цель работы: Формировать навыки преобразования тригонометрических выражений, используя формулы сложения, удвоения и приведения.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1.Вычислите $\frac{cos12°\cdot cos48°-sin12°\cdot sin48°}{cos54°\cdot sin36°+cos36°\cdot sin54°}$

2. Упростите выражение а) $\frac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}-\frac{tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{ctg(\pi-\alpha)}+tg(\pi-\alpha)$; б) $\frac{\cos 2t}{\cos t-\sin t}-\sin t$

3. Дано $cos \propto = -\frac{3}{5}$; $cos\beta = -\frac{24}{25}$; $\pi < \propto < \frac{3\pi}{2}$; $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

Найдите $\sin(\propto - \beta)$.

4. Докажите тождество: $\frac{\sin(\propto-\beta)cos\beta+\cos(\alpha-\beta)sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)cos\beta-\sin(\alpha-\beta)sin\beta} = tg\alpha$

Порядок выполнения работы

1) Запишите задание и определите, какими формулами тригонометрии нужно воспользоваться.

2) Примените эти формулы.

3) Упростите получившееся выражение. Вычислите, если это необходимо, значение выражения.

Ход решения:

1.Вычислите $\frac{cos71°\cdot cos26°+sin71°\cdot sin26°}{sin20°\cdot cos25°+cos20°\cdot sin25°}$

Решение:

$$\frac{cos71°\cdot cos26°+sin71°\cdot sin26°}{sin20°\cdot cos25°+cos20°\cdot sin25°}$$

Для решения нам необходимо использовать формулы сложения:

$$\cos(\alpha\pm\beta) = cos\alpha\cdot cos\beta \mp sin\alpha\cdot sin\beta$$

$$\sin(\alpha\pm\beta) = sin\alpha\cdot cos\beta \pm cos\alpha\cdot sin\beta$$

$$\frac{cos71°\cdot cos26°+sin71°\cdot sin26°}{sin20°\cdot cos25°+cos20°\cdot sin25°} = \frac{\cos(71°-26°)}{\sin(20°+25°)} = \frac{cos45°}{sin45°} = tg45° = 1$$

2. Упростите выражение: $\frac{sin(180°+\alpha)\cdot \mathrm{tg}(\propto-180°)\cdot cos(360°-\alpha)}{\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cdot ctg(\pi+\alpha)\cdot cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}$.

При решении этого задания нужно применить формулы приведения. Для этого вспомним мнемоническое правило: 1) Название функции не меняется, если к аргументу α прибавляется –πn или πn.

Название функции меняется, если к аргументу α прибавляется $-\frac{\pi}{2}n$ или $\frac{\pi}{2}n$, n-нечетное число.

2) Ставится знак исходной функции, считая , что α- острый угол.

Решение:

$$\frac{sin(180°+\alpha)\cdot \mathrm{tg}(\propto-180°)\cdot cos(360°-\alpha)}{\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cdot ctg(\pi+\alpha)\cdot cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)} = \frac{-sin\alpha\cdot tg\alpha\cdot cos\alpha}{tg\alpha\cdot ctg\alpha\cdot(-sin\alpha)} = \frac{cos\alpha}{ctg\alpha} = \frac{cos\alpha}{\frac{cos\alpha}{sin\alpha}} = \frac{cos\alpha\cdot sin\alpha}{cos\alpha} = sin\alpha$$

3. Дано $sin \propto = \frac{8}{17}$; $cos\beta = \frac{4}{5}$; $\frac{\pi}{2} < \propto < \pi$; $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Найдите $\sin(\propto + \beta)$.

Решение: Для решения нам нужно использовать формулу сложения

$$\sin(\alpha+\beta) = sin\alpha\cdot cos\beta + cos\alpha\cdot sin\beta$$

Но нам неизвестны значения $cos \propto$ и $sin\beta$.

Найдем сначала эти значения, используя основное тригонометрическое тождество:

$cos^2 \propto + sin^2 \propto = 1$

Выразим из него искомую функцию $cos \propto = \pm\sqrt{1 - sin^2 \propto}$

$$sin\beta = \pm\sqrt{1 - cos^2\beta}$$

Так как косинус во II четверти отрицателен, то $cos \propto = -\sqrt{1 - \frac{64}{289}} = -\sqrt{\frac{289}{289} - \frac{64}{289}} = -\frac{15}{17}$.

Так как синус в I четверти положительный, то $sin\beta = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25} - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

Подставим найденные значения в формулу и вычислим значение $\sin(\propto + \beta)$.

$$\sin(\propto + \beta) = \frac{8}{17} \cdot \frac{4}{5} + \left(-\frac{15}{17}\right) \cdot \frac{3}{5} = \frac{32}{85} - \frac{45}{85} = -\frac{13}{85}$$

4. Докажите тождество: $\frac{\sin(\propto - \beta)cos\beta + \cos(\alpha - \beta)sin\beta}{\cos(\alpha - \beta)cos\beta - \sin(\alpha - \beta)sin\beta} = tg\alpha$

Доказательство:

Выпишем отдельно левую часть тождества и преобразуем ее, используя формулы сложения:

$$\frac{\sin(\propto - \beta)cos\beta + \cos(\alpha - \beta)sin\beta}{\cos(\alpha - \beta)cos\beta - \sin(\alpha - \beta)sin\beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta + \beta)}{\cos(\alpha - \beta + \beta)} = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = tg\alpha$$

$\mathrm{tg} \propto = \mathrm{tg} \propto$

Тождество доказано.

Возможен и другой способ доказательства:

$$\frac{\sin(\propto - \beta)cos\beta + \cos(\alpha - \beta)sin\beta}{\cos(\alpha - \beta)cos\beta - \sin(\alpha - \beta)sin\beta} = \frac{(sin\alpha \cdot cos\beta - cos\alpha \cdot sin\beta)cos\beta + (cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta)sin\beta}{(cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta)cos\beta - (sin\alpha \cdot cos\beta - cos\alpha \cdot sin\beta)sin\beta} =$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые

$$= \frac{sin\alpha \cdot cos^2\beta - cos\alpha \cdot sin\beta \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot cos\beta \cdot sin\beta + sin\alpha \cdot sin^2\beta}{cos\alpha \cdot cos^2\beta + sin\alpha \cdot sin\beta \cdot cos\beta - sin\alpha \cdot cos\beta \cdot sin\beta + cos\alpha \cdot sin^2\beta} = \frac{sin\alpha \cdot cos^2\beta + sin\alpha \cdot sin^2\beta}{cos\alpha \cdot cos^2\beta + cos\alpha \cdot sin^2\beta}$$

$$= \frac{sin\alpha(cos^2\beta + sin^2\beta)}{cos\alpha(cos^2\beta + sin^2\beta)} = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = tg\alpha$$

$$\mathrm{tg} \propto = \mathrm{tg} \propto$$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" выставляется, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" выставляется, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.1 Основные понятия тригонометрии. Преобразование тригонометрических выражений

Практическое занятие № 20
Преобразования тригонометрических выражений. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение. Преобразование произведения тригонометрических функций с сумму

Цель работы: Формировать навыки преобразования тригонометрических выражений, используя формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение, преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

Выполнение работы способствует формированию:
ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам
ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
1. Найдите значение выражения: $\frac{sin78°-sin42°}{cos78°-cos42°}$
2. Упростите выражение$\frac{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha-\cos 7\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}$.
3. Докажите тождество: $\frac{sin2\alpha+sin6\alpha}{cos2\alpha+cos6\alpha}=tg4\alpha$

Порядок выполнения работы
4) Запишите задание и определите, какими формулами тригонометрии нужно воспользоваться.
5) Примените эти формулы.
6) Упростите получившееся выражение. Вычислите, если это необходимо, значение выражения.

1. Найдите значение выражения: $\frac{sin68°-sin22°}{cos68°-cos22°}$

Для решения нам нужно воспользоваться формулами преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение:

$$cos\alpha+cos\beta=2cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$cos\alpha-cos\beta=-2sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$sin\alpha+sin\beta=2sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$sin\alpha-sin\beta=2cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Решение:

$$\frac{sin68°-sin22°}{cos68°-cos22°}=\frac{2cos\frac{68°+22°}{2}\cdot sin\frac{68°-22°}{2}}{-2sin\frac{68°+22°}{2}\cdot sin\frac{68°-22°}{2}}=\frac{2cos45°\cdot sin23°}{-2sin45°\cdot sin23°}=-\frac{cos45°}{sin45°}=-ctg45°=-1$$

2. Упростите выражение $\frac{\sin 3\alpha+\sin\alpha}{\cos 3\alpha-\cos\alpha}$

Для решения нам нужно воспользоваться формулами преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение:

$$cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$cos\alpha - cos\beta = -2sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$sin\alpha + sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$sin\alpha - sin\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Решение:

$$\frac{\sin 3\alpha+\sin\alpha}{\cos 3\alpha-\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{3\alpha+\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha-\alpha}{2}}{-2\sin\frac{3\alpha+\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha-\alpha}{2}}=\frac{2\sin 2\alpha\cos\alpha}{-2\sin 2\alpha\sin\alpha}=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-ctg\alpha$$

3. Докажите тождество: $\frac{sin\alpha+sin3\alpha+sin5\alpha}{cos\alpha+cos3\alpha+cos5\alpha}=tg3\alpha$

Для решения нам нужно воспользоваться формулами преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение.

Решение:

$$\frac{sin\alpha+sin3\alpha+sin5\alpha}{cos\alpha+cos3\alpha+cos5\alpha}=tg3\alpha$$

Выпишем отдельно левую часть тождества и преобразуем ее, используя формулы:

$$\frac{sin\alpha+sin3\alpha+sin5\alpha}{cos\alpha+cos3\alpha+cos5\alpha}=\frac{(sin\alpha+sin5\alpha)+sin3\alpha}{(cos\alpha+cos5\alpha)+cos3\alpha}=\frac{2sin\frac{\alpha+5\alpha}{2}\cdot cos\frac{\alpha-5\alpha}{2}+sin3\alpha}{2cos\frac{\alpha+5\alpha}{2}\cdot cos\frac{\alpha-5\alpha}{2}+cos3\alpha}=\frac{sin3\alpha\cdot\cos(-2\alpha)+sin3\alpha}{cos3\alpha\cdot\cos(-2\alpha)+cos3\alpha}=$$

Воспользуемся четностью косинуса $\cos(-\alpha)=cos\alpha$

$$=\frac{sin3\alpha\cdot\cos 2\alpha+sin3\alpha}{cos3\alpha\cdot\cos 2\alpha+cos3\alpha}=\frac{sin3\alpha\cdot(cos2\alpha+1)}{cos3\alpha\cdot(cos2\alpha+1)}=\frac{sin3\alpha}{cos3\alpha}=tg3\alpha$$

$$\text{tg}3\alpha=\text{tg}3\alpha$$

Тождество доказано.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" выставляется, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" выставляется, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.1 Основные понятия тригонометрии.
Преобразование тригонометрических выражений

Практическое занятие № 21
Построение графиков тригонометрических функций с использованием геометрических преобразований

Цель работы: Научиться строить графики тригонометрических функций

Выполнение работы способствует формированию:
ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам
ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
Построить график функции $y = 3sin\,(x - \frac{\pi}{6})$. Записать свойства этой функции.

Порядок выполнения работы:
При построении графика нужно воспользоваться преобразованиями графиков.

1. ***y = f(x) + b*** – график функции получается из графика функции y = f(x) путем параллельного переноса этого графика на величину вдоль от ОУ. При этом, если b>0, то график функции f(x) + b располагается выше графика функции f(x), если b<0, то ниже этого графика.

2. ***y = f (x + b)*** – график функции получается из графика функции y = f(x) с помощью параллельного переноса этого графика на величину b вдоль оси ОХ, при этом, если b>0, то сдвиг влево, а если b<0, то сдвиг вправо.

3. ***y = - f(x)*** – график симметричен графику y = f(x) относительно оси ОХ

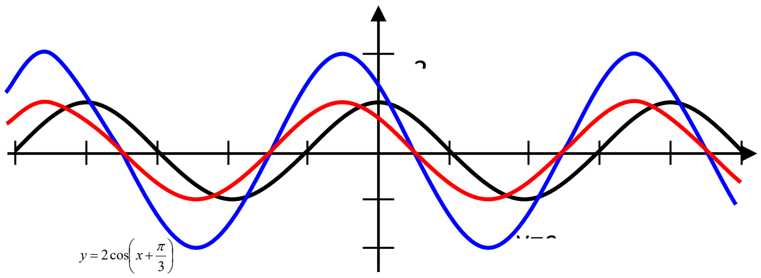
4. ***y = a f(x)*** – график функции получается из графика функции y = f(x) с помощью растяжения или сжатия графика по оси ОУ пропорционально коэффициенту *a*, причем,
если *a* > 1, то все ординаты графика af(x) увеличиваются в *a* раз, если a < 1, то уменьшаются в *a* раз.

5. ***y = f(a x)*** – график функции получается из графика функции y = f(x) с помощью растяжения или сжатия вдоль оси ОХ пропорционально коэффициенту *a*, причем, если, *a* > 1, то график сжимается в *a* раз, если 0 < a <1, то растягивается в 1/*a* раз.

6. ***y =*** $|f(x)|$ - для построения этого графика нужно построить график функции y = f(x) и отобразить относительно оси ОХ те части графика, которые расположены ниже этой оси.

После построения графика проведите исследование функции по общей схеме.

Построить график функции $y = 2cos\,(x + \frac{\pi}{3})$. Записать свойства этой функции.
Сначала построим график функции $y = cosx$
Перенесем график функции $y = \cos x$ на $\frac{\pi}{3}$ влево. Получим график функции $y = cos\,(x + \frac{\pi}{3})$.
Растянем график получившейся функции в 2 раза вдоль оси Оу.



Исследуем функцию по общей схеме:

1. D(y) = R;
2. E(y) = [-2; 2]
3. y = 0, при x= π/6 + πn, n Є Z;
4. Функция общего вида.
5. Функция немонотонная, при x Є (2π/3 + 2πn; 5π/3 + 2πn) – функция возрастает; при x Є (-π/3 + 2πn;2 π/3 + 2πn) – функция убывает;
6. (-π/3 + 2πn; 2) – max; (2π/3 + 2πn; -2) – min;
7. T=2π.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.2 Тригонометрические уравнения и неравенства

Практическое занятие № 22
«Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства»

Цель работы: Научиться решать простейшие тригонометрические уравнения.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Решите тригонометрические уравнения:

1) $cos3x = 0$
2) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$
3) $3tg\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$
4) $ctg\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

5) $sin4x \cdot cos3x + cos4x \cdot sin3x = \frac{1}{2}$

Порядок выполнения работы:

1. Записать уравнение и определить, к какому виду оно относится и какой формулой необходимо воспользоваться.
2. Решить уравнение.
3. Записать ответ.

Решите тригонометрические уравнения:

1) $sin2x = 0$

Это уравнение относится к частным случаям, поэтому корни находятся по формуле

$$x = \pi n, \quad n \in Z$$

$xxxxxxxxxxxx$

$2x = \pi n, n\epsilon Z;$

$$x = \frac{\pi}{2}n, n\epsilon Z$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}n, n\epsilon Z$

2) $\cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

Это уравнение относится к частным случаям, поэтому корни находятся по формуле

$$x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$xxxxxxxxxxxx$

$5x + \frac{\pi}{3} = \pi + 2\pi n,\ \ n\epsilon Z$

$5x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ \ n\epsilon Z$

$5x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n\epsilon Z$

$x = \frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi}{5}n,\ \ n\epsilon Z$

$$\text{Ответ:}\quad x = \frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi}{5}n,\ \ n\epsilon Z$$

3) $2\cos 3x = -1$

Разделим обе части уравнения на 2. Получим уравнение: $\cos 3x = -\frac{1}{2}$.

Это уравнение не является частным случаем, $a = -\frac{1}{2}, |a| < 1$. Поэтому оно имеет решение, которое находится по формуле: $x = \pm arccosa + 2\pi n,\ n\epsilon Z$

$3x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,\ n\epsilon Z$

$3x = \pm(\pi - \arccos\frac{1}{2}) + 2\pi n,\ n\epsilon Z$

$3x = \pm(\pi - \frac{\pi}{3}) + 2\pi n,\ n\epsilon Z$

$3x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n\epsilon Z$

$x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}n,\ n\epsilon Z$

Ответ: $x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}n,\ n\epsilon Z$

4) $tg\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Уравнение имеет решение, которое находится по формуле: $x = arctga + \pi n,\ n\epsilon Z$

$$6x - \frac{\pi}{4} = arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi n, \qquad n\epsilon Z$$

Функция $y = arctgx$ нечетная, поэтому $arctg(-x) = -arctgx$.

$6x - \frac{\pi}{4} = -arctg\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n,\ n\epsilon Z$

$6x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n\epsilon Z$

$6x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n\epsilon Z$
$6x = \frac{\pi}{12} + \pi n,\ n\epsilon Z$
$x = \frac{\pi}{72} + \frac{\pi}{6} n,\ n\epsilon Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{72} + \frac{\pi}{6} n, \qquad n\epsilon Z$

5)$cos6x \cdot cos3x + sin6x \cdot sin3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Видим, что левую часть можно свернуть по формулам сложения:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta \mp sin\alpha \cdot sin\beta$$

$$\cos(6x - 3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Теперь уравнение является простейшим и его корни находятся по формуле: $x = \pm arccosa + 2\pi n,\ n\epsilon Z$.

$$3x = \pm arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n,\ n\epsilon Z$$

$$3x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n\epsilon Z$$

$x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} n,\ \ n\epsilon Z$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} n, \qquad n\epsilon Z$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.2 Тригонометрические уравнения и неравенства

Практическое занятие № 23
«Тригонометрические уравнения и методы их решения»

Цель работы: Научиться решать однородные тригонометрические уравнения.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Решите тригонометрические уравнения:

1) $sin^2x - 5sinx \cdot cosx + 4cos^2x = 0$
2) $7sin^2x - 4sin2x + cos^2x = 0$
3) $6sin^2x - 3sinx \cdot cosx - cos^2x = 1$
4) $5cos^2x + 3sinx \cdot cosx + 2sin^2x = 2$

Порядок выполнения работы:

1.Установите, является ли уравнение однородным.

Однородными тригонометрическими уравнениями *называются уравнения вида:*

$$asinx + bcosx = 0$$

$$asin^2x + bcos^2x + csinx \cdot cosx = 0$$

2. Если уравнение является однородным уравнением первого порядка, то разделите обе части уравнения на $cosx \neq 0$ или $sinx \neq 0$.

3. Если уравнение является однородным уравнением второго порядка, то разделите обе части уравнения на $cos^2x \neq 0$ или $sin^2x \neq 0$.

4. Введите новую переменную и решите уравнение относительно этой переменной.

5. Вернитесь к старой переменной и решите получившиеся простейшие тригонометрические уравнения.

6. Запишите ответ.

Решите тригонометрические уравнения:

1) $2sin^2x - 5sinx \cdot cosx + 3cos^2x = 0$

Решение:

Уравнение является однородным тригонометрическим уравнением второго порядка. Чтобы его решить, разделим обе части на $cos^2x \neq 0$.

$$\frac{2sin^2x}{cos^2x} - \frac{5sinx \cdot cosx}{cos^2x} + 3 = 0$$

Знаем, что $\frac{sinx}{cosx} = tgx$. $\quad 2tg^2x - 5tgx + 3 = 0$

Введем новую переменную. Пусть $tgx = t$, тогда наше уравнение примет вид: $2t^2 - 5t + 3 = 0$

Учитываем ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n\epsilon Z$.

$2t^2 - 5t + 3 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1,\ \sqrt{D} = 1$

$t_1 = \frac{5-1}{4} = 1$

$t_2 = \frac{5+1}{4} = 1{,}5$

Вернемся к старой переменной:

$tgx = 1$ или $tgx = 1{,}5$

1) $tgx = 1 \qquad x = arctg1 + \pi n,\ n\epsilon Z \qquad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z$

2) $tgx = 1{,}5 \qquad x = arctg1{,}5 + \pi n,\ n\epsilon Z$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \pi n, x = arctg1{,}5 + \pi n, \qquad n\epsilon Z$$

2) $4sin^2x - 3sin2x + 2cos^2x = 0$

Сначала преобразуем аргумент , используя формулы двойного аргумента: $sin2x = 2sinx \cdot cosx$.

$4sin^2x - 6sinx \cdot cosx + 2cos^2x = 0$

Уравнение является однородным тригонометрическим уравнением второго порядка. Чтобы его решить, разделим обе части на $sin^2x \neq 0$.

$$\frac{4sin^2x}{sin^2x} - \frac{6sinx \cdot cosx}{sin^2x} + \frac{2cos^2x}{sin^2x} = 0$$

Знаем, что $\frac{cosx}{sinx} = ctgx$ $\qquad 4 - 6ctgx + 2ctg^2x = 0$

Введем новую переменную. Пусть $ctgx = t$, тогда наше уравнение примет вид: $2t^2 - 6t + 4 = 0$

Учитываем ОДЗ: $x \neq \pi n,\ n\epsilon Z$.

$2t^2 - 6t + 4 = 0$

$D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 4,\ \sqrt{D} = 2$

$t_1 = \frac{6-2}{4} = 1$

$t_2 = \frac{6+2}{4} = 2$

Вернемся к старой переменной:

$ctgx = 1$ или $ctgx = 2$

1) $ctgx = 1$ $\qquad x = arcctg1 + \pi n,\ n\epsilon Z$ $\qquad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z$

2) $ctgx = 2$ $\qquad x = arctg2 + \pi n,\ n\epsilon Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\qquad x = arctg2 + \pi n,\qquad n\epsilon Z$

3) $2sin^2x + 5sinx \cdot cosx + cos^2x = 4$

Решение:

Уравнение пока не является однородным, т.к. в правой части его вместо нуля стоит 4. Перенесем 4 в правую часть и применим основное тригонометрическое тождество:

$2sin^2x + 5sinx \cdot cosx + cos^2x - 4(cos^2x + sin^2x) = 0$

$2sin^2x + 5sinx \cdot cosx + cos^2x - 4cos^2x - 4sin^2x = 0$

$-2sin^2x + 5sinx \cdot cosx - 3cos^2x = 0$

Уравнение теперь является однородным тригонометрическим уравнением второго порядка. Чтобы его решить, разделим обе части на $cos^2x \neq 0$.

$\frac{-2sin^2x}{cos^2x} + \frac{5sinx \cdot cosx}{cos^2x} - 3 = 0$

$-2tg^2x + 5tgx - 3 = 0$

$2tg^2x - 5tgx + 3 = 0$

Введем новую переменную. Пусть $tgx = t$, тогда наше уравнение примет вид: $2t^2 - 5t + 3 = 0$

Учитываем ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n\epsilon Z$.

$2t^2 - 5t + 3 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1,\ \sqrt{D} = 1$

$t_1 = \frac{5-1}{4} = 1$

$t_2 = \frac{5+1}{4} = 1{,}5$

Вернемся к старой переменной:

$tgx = 1$ или $tgx = 1{,}5$

1) $tgx = 1$ $\qquad x = arctg1 + \pi n,\ n\epsilon Z$ $\qquad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z$

2) $tgx = 1{,}5$ $\qquad x = arctg1{,}5 + \pi n,\ n\epsilon Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, x = arctg1{,}5 + \pi n,\qquad n\epsilon Z$

4) $5cos^2x + \sqrt{3}sinx \cdot cosx + 6sin^2x = 5$

Уравнение пока не является однородным, т.к. в правой части его вместо нуля стоит 5. Перенесем 5 в правую часть и применим основное тригонометрическое тождество:

$5cos^2x + \sqrt{3}sinx \cdot cosx + 6sin^2x - 5cos^2x - 5sin^2x = 0$

$\sqrt{3}sinx \cdot cosx + sin^2x = 0$

Вынесем общий множитель за скобки: $sinx(\sqrt{3}cosx + sinx) = 0$

$sinx = 0$ или $\sqrt{3}cosx + sinx = 0$

1) $sinx = 0, \quad x = \pi n, n\epsilon Z$

2) $\sqrt{3}cosx + sinx = 0$

Уравнение является однородным тригонометрическим уравнением первого порядка. Чтобы его решить, разделим обе части на $cosx \neq 0$.

$$\frac{\sqrt{3}cosx}{cosx} + \frac{sinx}{cosx} = 0$$

$$\sqrt{3} + tgx = 0$$

$$tgx = -\sqrt{3}$$

$$x = arctg(-\sqrt{3}) + \pi n, n\epsilon Z$$

$$x = -arctg\sqrt{3} + \pi n, n\epsilon Z$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \qquad n\epsilon Z$$

Ответ: $x = \pi n, \qquad x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \qquad n\epsilon Z$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1. Производная функции и ее применение

Практическое занятие № 24

«Числовая последовательность, способы ее задания, вычисление членов последовательности. Предел последовательности. Нахождение пределов функции»

Цель работы:

1. Научиться вычислять пределы функции.

2.Научиться избавляться от неопределенностей $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

3.Научиться решать задачи, связанные с числовой последовательностью.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание.

1) Решить задачи на числовую последовательность.

2) Вычислить пределы функций

Задание 1	Задание 2
1. Найти восьмой член последовательности; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{n}{n+1}$; 2. Найти номер числа 3 в последовательности: $a_n = \frac{2n+1}{n^2}$ 3. Вычислить: $\lim\limits_{x\to -2}(3x^2 - 8x + 5)$ 4. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}+1}{1-\sqrt{2x}}$ 5. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$	6. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-12}$ 7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+1}$ 8. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{6x^2+5x-4}{x^2-2x}$ 9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x}+1}{1-\sqrt{2x}}$ 10. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

Порядок выполнения работы:

Внимательно ознакомьтесь с условием задания.

Пользуясь своими школьными знаниями (в случае затруднения воспользуйтесь справочными материалами), выполните задание

Задание №1

1. Девятый член последовательности $c_n = \left(\frac{2n-1}{\sqrt{n^3+3}}\right)$ равен?

$c_9 = \left(\frac{2\cdot 9-1}{\sqrt{9^3+3}}\right) = \frac{17}{\sqrt{732}} = \frac{17}{2\sqrt{183}}$; => $c_9 = \frac{17}{2\sqrt{183}}$

2. Номер числа 6, являющегося членом последовательности $a_n = n^2 - 5n$ равен?

$6 = n^2 - 5n$

$n^2 - 5n - 6 = 0$

$n_1 = 6$

$n_2 = -1$ –посторонний корень т.к. номер не может быть отрицательным числом.

Ответ: n=6.

Задание №2

Найдите пределы предварительно избавившись от неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$

1. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{x^2-81}{x^2-9x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 9}\frac{(x-9)(x+9)}{x(x-9)} = \lim\limits_{x\to 9}\frac{x+9}{x} = \lim\limits_{x\to 9}\frac{18}{9} = \lim\limits_{x\to 3}2 = 2;$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+5)(x-1)}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}(x+5) = \lim\limits_{x\to 1}(1+5) = \lim\limits_{x\to 1}(6) = 6$

$x^2 + 4x - 5 = 0$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 + x_2 = -5 \end{cases}$ => $\begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{a+x})^2-(\sqrt{a-x})^2}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a+x-a+x}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}=$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{a+0}+\sqrt{a-0}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{2\sqrt{a}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}};$

Вычислить пределы имеющие неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}+\frac{3x}{x^3}+\frac{4}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+0+0+0}{4+0+0+0}=\lim\limits_{x\to\infty}=\frac{1}{4}=\frac{1}{4};$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+x}{x^2+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{4}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+0+0}{0+0}=\left(\frac{2}{0}\right).=+\infty$

(0 в знаменателе принимаем за бесконечно малую величину.)

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1. Производная функции и ее применение

Практическое занятие № 25
«Нахождение производных по определению. Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций»

Цель работы: Отработать определение производной функции. Применять формулы и правила дифференцирования. Научиться находить производную в заданной точке.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Найдите $y' = (0)$, если $y = x^2 - x$
2. Найдите $y' = (3)$, если $y = -\frac{3}{x}$
3. Найти производные функций используя правила вычисления и таблицу производных элементарных функций.
4. Вычислить производную функции в точке.

Задание 1	Задание 2
1) $y = 7x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2;$ 2) $y = 5\sqrt{x} - \frac{2\sqrt{x}}{x^3} + \frac{x^4}{\sqrt{x}};$ 3) $y = 3\mathrm{ctg}x + 5\ln x - 3^x;$ 4) $y = (9 + x^2)(2x - 1);$ 5) $y = \frac{x^3}{3x+5};$	6) $f(t) = 0{,}5t + 0{,}6t^2 + 0{,}8t + 8;\quad f'(1) - ?$ 7) $f(x) = \mathrm{ctg}x - \mathrm{tg}x;\quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) - ?$ 8) $f(x) = 2 \cdot 5^x + 3 \cdot e^x;\quad f'(0) - ?$ 9) $f(x) = \cos x \cdot (1 + \sin x);\quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) - ?$ 10) $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1};\quad f'(1) - ?$

Порядок выполнения работы:

Вычисление производной функции $y = f(x)$ производится по общему правилу дифференцирования:

1) Придавая аргументу x приращение Δx и подставляя в выражение функции вместо аргумента x наращенное значение $x + \Delta x$, находим наращенное значение функции: $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

2) Вычитая из наращенного значение функции её первоначальное значение находим приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

3) Делим приращение функции Δy на приращение аргумента Δx_1 т.е. составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

4) Находим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Этот предел и есть производная от функции $y = f(x)$

1. Найти: $y'(x)$, если $y = 2x^2 - 3x$

Находим производную по общему правилу:

1) $y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) = 2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x$

2) $y + \Delta y - y = \cancel{2x^2} + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - \cancel{3x} - 3\Delta x - \cancel{2x^2} + \cancel{3x} = 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3\Delta x$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4x\Delta x+2(\Delta x)^2-3\Delta x}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}(4x+2\Delta x-3)}{\cancel{\Delta x}} = 4x + 2\Delta x - 3$

4) $\lim\limits_{\Delta x \to 0}(4x + 2\Delta x - 3) = 4x - 3$

Найдём значение производной при $x = 3$.

$$y'(3) = 4 \cdot 3 - 3 = 0$$

2. Найти $y'(4)$, если $y = \sqrt{x}$

1) $y + \Delta y = y\sqrt{x + \Delta x}$

2) $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$

4) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x}+\Delta x-\cancel{x}}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Найдем значение производной в точке $x = 4$, $y'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

3. Найти производные функций используя правила вычисления и таблицу производных элементарных функций

Таблица производных основных элементарных функций.

$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\ln x)' \dfrac{1}{x}$	$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$c' = 0, c - const;$	$x' = 1;$	$(CU)' = C \cdot U'$	
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(u \cdot v)' = u'v + uv'$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v + uv'}{v^2}$	

1. $y = 6x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 4$

$y' = (6x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 4)' = 24x^3 - 24x^2 + 4x;$

2. $y = (5x-4)*(x+2)$

$$y' = ((5x-4)(x+2))' = \left| \begin{array}{l} u = 5x-4; \quad u' = 5 \\ v = x+2; \quad v' = 1 \\ (u*v)' = u'v + uv' \end{array} \right| =$$

$= 5(x+2) + 1(5x-4) = 5x + 10 + 5x - 4 = 10x + 6$

3. $y = \dfrac{x+1}{x}$

$$y' = \left(\frac{x+1}{2x}\right)' = \left| \begin{array}{l} u = x+1; \;\; u' = 5 \\ v = 2x; \;\; v' = 2 \\ \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} \end{array} \right| = \frac{1 \cdot 2x - 2(x+1)}{(2x)^2} = \frac{2x - 2x - 2}{4x^2} =$$

$= \dfrac{-2}{4x^2} = -\dfrac{1}{2x^2};$

4. Вычислить производную функции в точке.

$y = 3x^5 - 8x^4 + 9x^2 - 4$

$y'(-1) = 3 \cdot (-1)^5 - 8 \cdot (-1)^4 + 9(-1)^2 - 4 = -3 - 8 + 9 - 4 = -6.$

1. $y = 5 \sin x \cos x$

$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5((sinx)' \cdot cosx + sinx(cosx)') = 5(cos^2x - sin^2x) = 5(cos2x) = 5(cos2\frac{\pi}{2}) = \quad = 5cos\pi = 5 \cdot (-1) = -5$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1. Производная функции и ее применение

Практическое занятие № 26
«Вычисление производных сложных функций»

Цель работы: Научиться вычислять производные сложных функций

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание.

Задание 1: Найти производные функций используя правила вычисления и таблицу производных сложных функций.

Задание 2: Вычислить производную функции в точке.

Задание№1	Задание№2
$1) y = (mx^k + 4)^p$	$2) y = m * \cos(px^k - m)$; y′(1)=?
$3) y = (e^{px^m} + kx)$	$4) y = ktg(mx^p)$; y′(-1)=?
$5) y = 12^{px^m - mx}$	$6) y = ctg(px^k - mx)$; y′(2)=?
$7) y = \ln(x^k + px^m)$	$8) y = \sqrt{mp^x + kx}$; y′(-2)=?
$9) y = \log_7(mx + k)$	$10) y = (e^{px+k}) * \sqrt{x^p + mx}$; y′(3)=?
$11) y = p * \sin(kx + m)$	$12) y = \dfrac{\ln(px^n)}{k * \cos mx}$; y′(-3)=?

Где p – число букв в имени; м – число букв в фамилии; к – число букв отчества.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектом лекций и справочными материалами, выполните задание.

Задание № 1

Найти производные функций используя правила вычисления и таблицу производных сложных функций

«Правила вычисления и таблицу производных сложных функций»

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$	$(\sin u)' = \cos uu'$
$(e^u)' = e^u u'$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(a^u)' = a^u \ln au'$	$(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}u' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$(\ln u)' = \dfrac{1}{u}u' = \dfrac{u'}{u}$	$(ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}u' = -\dfrac{u'}{\ln^2 u}$
$(\log_a u)' = \dfrac{1}{u\ln a}u' = \dfrac{u'}{u\ln a}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}u' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

1. $y = (3x^2 - 4x)^5;$

$y' = ((3x^2-4x)^5) = 5(3x^2-4x)^4 \cdot (3x^2-4x)' =$
$= 5(3x^2-4x)^4 \cdot (6x-4) = (30x-20)(3x^2-4x)^4.$

2. $y = \sin(3x - x^2)$

$y'(\sin(3x-x^2))' = \cos(3x-x^2)\cdot(3x-x^2)' = (3-2x)\cdot\cos(3x-x^2).$

3. $y = 6\ln 5x$

$$y' = (10\ln 2x)' = 10(\ln 2x)' = 10\cdot\frac{1}{2x}\cdot(2x)' = \frac{10\cdot 2}{2x} = \frac{10}{x}.$$

Задание № 2

Вычислить производную функции в точке.

1. $y' = (\sqrt{x^2+6})'$; $y'(3) = ?$

$$y' = (\sqrt{x^2=6})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+6}}\cdot(x^2+6)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+6}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+6}}.$$

$y'(3) = \frac{3}{\sqrt{3^2+6}} = \frac{3}{\sqrt{9+6}} = \frac{3}{\sqrt{15}}.$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1. Производная функции и ее применение

Практическое занятие № 27
«Геометрические приложения производной»

Цель работы: Научиться составлять уравнение касательной к данной кривой в точке касания; находить угловой коэффициент касательной, проведенный к кривой.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y = -x^2 + x$ в точке $x_0 = -2$
2. Найдите угол наклонена к оси касательной, проведенной к кривой $y = x^3$ в точке $x_0 = -2$
3. Составьте уравнение касательной к кривой $y = \sin 3x$ в точке $\left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$.

Порядок выполнения работы:

1. Значение производной функции $y = f(x)$ при $x = x_0$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в её точке с абсциссой x_0, т.е. $k' = y'(x_0) = f'(x_0) = \mathrm{tg} \propto$ где $\propto$-угол между касательной к кривой в точке $M_0(x_0; y_0)$ и положительным направлением оси 0_x.
2. Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке имеет вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.
3. Направление кривой в каждой точке определяется направление касательной к ней в этой точке, поэтому для нахождения угла наклонной кривой в данной точке надо вычислить угол между касательной, проведенной в этой точке, и осью.

1. Найти угол наклона к оси O_x касательной проведенной к кривой $y = \sin x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$

-найдем производную функцию $y = \sin x$ $y' = \cos x$

-найдем значение производной в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$ $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

-тангенс угла наклона касательной в данной точке равен $k = tg \propto$, откуда $\propto = arc\,\mathrm{tg}\frac{1}{2} \approx 26{,}6°$

2. Под какими углами парабола $y = x^2 + x$ пересекает ось O_x ?

-Найдем точки пересечения параболы с осью O_x, решив систему

$$\begin{cases} y = x^2 + x \\ y = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} (-1; 0) \\ (0; 0) \end{cases}$$

-Парабола пересекает ось O_x в точках $\mathrm{A}(1; 0); O(0; 0)$. Найдём угловые коэффициенты касательных к параболе в этих точках

$$y' = (x^2 + x) = 2x + 1; k(-1) = 2(-1) + 1 = -1, k(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

- вычислили углы $\propto_1$ и $\propto_2$, образуемые касательными в точках пересечения параболы с осью O_x: $tg \propto_1 = -1, \propto_1 = 135°; tg \propto_2 = 1, \propto_2 = 45°$

3. Составьте уравнение касательной к кривой $y = 3x^2 - x$ в точке $x_0 = -1$

-найдём производную кривой в точке x_0

$$y' = (3x^2 - x)' = 6x - 1;\ y'(-1) = 6(-1) - 1 = -7$$

-найдем координату точки касания:

$$y(-1) = 3(-1) - (-1) = 4; M(-1; 4)$$

-поставим в формулу уравнения касательной:

$$y - 4 = -7(x + 1)$$

$$y - 4 = -7x - 7$$

$$7x + y + 3 = 0 - \textit{уравнение касательной}$$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1. Производная функции и ее применение

Практическое занятие №28
Исследование функций с помощью производной и построение графиков

Цель работы: Формировать навыки исследования функций с помощью производной и построения графиков.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:

1. Напряжение на конденсаторе меняется от времени по закону $U(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 10$. Найдите момент времени, при котором напряжение достигнет максимального значения.
2. Функция задает технологический процесс. Найдите экстремумы функции: $f(x) = x^4 - 4x^3$.
3. Функция задает технологический процесс. Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы: $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x$
4. Найдите промежутки выпуклости функции: $f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 + 100$

5. Функция задает технологический процесс. Исследуйте функцию по общей схеме и постройте ее график:

1. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.

2. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.

Порядок выполнения работы:

1) Запишите функцию.
2) Определите, каким алгоритмом нужно воспользоваться для выполнения задания.
3) Примените соответствующий алгоритм.
4) Запишите ответ.

5) Если необходимо провести полное исследование функции, то проведите его, используя общую схему исследования:

1. Найти область определения функции $D(y)$.

2. Найти (если это не вызывает затруднений) точки пересечения графика с осями координат (при $x = 0$ и при $y = 0$).

3. Исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность.

4. Найти интервалы монотонности, точки экстремумов и значения функции в этих точках.

5. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика функции.

6. Найти асимптоты графика функции.

7. Найти дополнительные точки и построить график по результатам исследования.

8. Найти область значений.

1. Исследовать функцию $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ и построить график.

-функция определенна на всей числовой прямой: $D(x): x \in (-\infty; \infty)$

-данная функция не является ни четной, ни нечетной: $y(-x) = (-x)^3 - 6(-x)^2 + 9(-x) - 3 = -x^3 - 6x^2 - 9x - 3 = -(x^3 + 6x^2 + 9x + 3) \neq -y(x)$

-найдём точку пересечения графика с осью 0_y, пологая $x = 0$, получим $y = -3$ точки пересечения графика с осью 0_x в данном случае найти затруднительно.

-найдём производную: $y' = (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = 3x^2 - 12x + 9$

-найдём критические точки, для этого $y' = 0$,т.е $3x^2 - 12x + 9 = 0$

$$x^2 - 4x + 3 = 0; x_1 = 1; x_2 = 3$$

-исследуем функцию на монотонность

+ - +

1 3

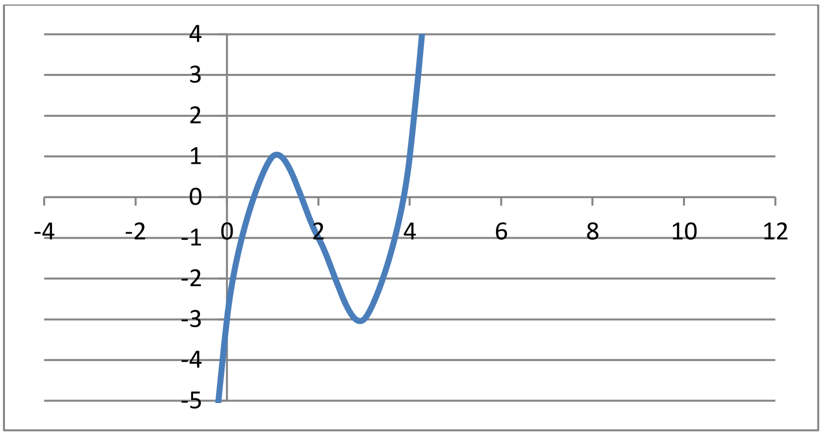
$(-\infty; 1)$ и $(3; \infty)$ график функции возрастает, $(1; 3)$-убывает

-исследуем функцию на экстремум:

$$y(1) = 1 - 6 + 9 - 3 = 1; A(1; 1) \text{точка max}$$

$$y(3) = 27 - 54 + 27 - 3 = -3, B(3: -3) \text{точка min}$$

-используя полученные данные строим искомый график.



2. Исследовать функцию и построить ее график.
$y = \frac{x^2}{2x-2}$.

1. Область определения функции $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

2. При подстановке значения $x = 0$ получим $y(0) = 0$.

Такую же точку получим, если приравняем функцию к нулю. Точка $x = 0$ - единственная точка пересечения с осями координат.

3. Проверяем функцию на четность

$y(-x) = \frac{(-x)^2}{-2x-2} = -\frac{x^2}{2x+2}$.

$y(-x) \neq y(x); y(-x) \neq -y(x)$.

Итак, функция ни четная, ни нечетная, непериодическая.

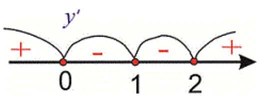
4.Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную функции

$$y' = \frac{2x(2x-2) - x^2 \cdot 2}{(2x-2)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2}{(2x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(2x-2)^2}$$

Приравнивая ее к нулю, получим критические точки $x = 0; x = 2$. Они разбивают область определения на следующие интервалы монотонности $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения.

Графически интервалы монотонности будут иметь вид



Исследуемая функция возрастает на интервалах $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ и убывает $(0; 1) \cup (1; 2)$.

5.Точка $x = 0$ точка локального максимума, $x = 2$ – локального минимума. Найдем значение функции $y_{max} = 0$; $y_{min} = 2$.

6.. Для отыскания интервалов выпуклости найдем вторую производную

$$y'' = \frac{(4x-4)(2x-2)^2 - (2x^2-4x)\cdot 2(2x-2)\cdot 2}{(2x-2)^4} = \frac{8}{(2x-2)^3} = \frac{8}{8(x-1)^3} = \frac{1}{(x-1)^3}$$

Таких интервалов нет, поскольку вторая производная не принимает нулевых значений в области определения.

7. Прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$.

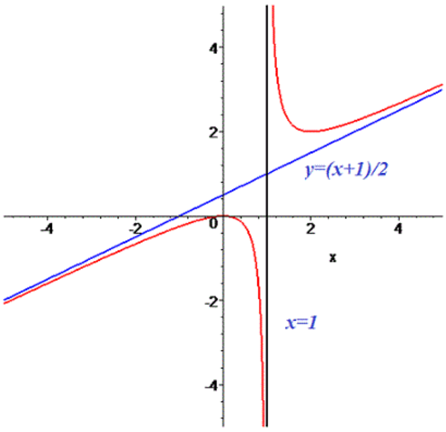
$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(2x-2)x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2-2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x-2} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - x(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+x}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

Конечный вид прямой следующий

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

8.На основе проведенного анализа выполняем построение графика функции. Для этого сначала строим вертикальные и наклонные асимптоты, затем находим значение функции в нескольких точках и по них проводим построение.



Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" выставляется, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" выставляется, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" выставляется, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1. Производная функции и ее применение

Практическое занятие № 29
Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции.

Цель работы: Научиться находить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 03Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК 06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

ОК 07 Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

ОК 08 Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности

ОК 09 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке:
а)$[-1; 1]$;
б) $[0; 3]$.

Порядок выполнения работы:

1. Находим критические точки функции.
2. Проверяем, какие из найденных критических точек лежат внутри заданного отрезка.
3. Находим значения функции на концах отрезка и в тех критических точках, которые попадают в этот отрезок.
4. Из всех полученных значений функции выбираем наименьшее и наибольшее.

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4$ на промежутке: а)$[-2; -0{,}5]$;б) $[1; 3]$.

Решение.

Находим критические точки функции.

$f'(x) = (-2x^3 - 3x^2 + 4)' = -x^2 - 6x = -6x(x+1)$;

$f'(x) = 0$; $-6x(x+1) = 0$; $x = 0$ и $x = -1$. получили две критические точки: $x = 0$ и $x = -1$.

а) В промежутке $[-2; -0{,}5]$ лежит одна из критических точек: x= -1.

Так как $f(-2) = 8, f(-1) = 3, f(-0,5) = 3,5,$ то наименьшее значение функция $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4$ достигает в точке $x = -1$ и равно 3, а наибольшее - в точке $x = -2$ и равно 8.. Кратко это можно записать так: $\min_{[-2;-0,5]} f(x) = f(-1) = 3. \max_{[-2;-0,5]} f(x) = f(-2) = 8.$

б) Отрезку $[1; 3]$ не принадлежит ни одна из критических точек, поэтому найдём значения функции на концах отрезка: $f(1) = -2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = -1. [1; 3]; f(3) = -2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 = -77.$. Кратко это можно записать так: $\min_{[\ \ 1;3]} f(x) = f(3) = -7; . \max_{[1;3]} f(x) = f(1) = -1.$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1. Производная функции и ее применение

Практическое занятие № 30
«Решение прикладных задач с помощью производной»

Цель работы: Научиться применять производную функции при решении прикладных задач.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК 06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

ОК 07 Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

ОК 08 Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности

ОК 09 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

ПК 2.1 Выполнять расчеты параметров технологического процесса, работы оборудования, характеристик исходного сырья и продукции при производстве черных металлов.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:

2. Чтобы уменьшить трение жидкости о стены и дно канала, нужно смачиваемую ею площадь сделать как можно малой. Требуется найти размеры открытого прямоугольного канала с площадью сечения 4,5 м ^{2}, при которых смачиваемая площадь будет наименьшей.

3. Имеется проволока длиной *a* метров. Требуется оградить этой проволокой прямоугольный участок цеха, одна сторона которого примыкает к стене, так, чтобы площадь огороженного участка была наибольшей.

Для отыскания наименьшего и наибольшего значения функции, дифференцируемой внутри отрезка и непрерывной на его концах, следует найти все критические точки функции, лежащие внутри отрезка, вычислить значения функции в этих точках и на концах отрезка, а затем из всех полученных таким образом чисел выбрать наименьшее и наибольшее.

Порядок выполнения работы:

5. Находим критические точки функции.
6. Проверяем, какие из найденных критических точек лежат внутри заданного отрезка.
7. Находим значения функции на концах отрезка и в тех критических точках, которые попадают в этот отрезок.
8. Из всех полученных значений функции выбираем наименьшее и наибольшее.

1. Требуется изготовить деталь в виде прямоугольного параллелепипеда, в нижнем основании которого лежит квадрат (верхняя часть открыта), а объем равен 108 см^3. При каких размерах детали на ее изготовление пойдет наименьшее количество материала?

Решение: 1. Пусть сторона основания равна x см, а высота – h см.

2. Объем параллелепипеда $V=x*x*h=x^2 h$ или по условию $x^2 h=108$.

Выразим из этой формулы высоту параллелепипеда: $h=108/x^2$. (1)

3. С другой стороны, чтобы узнать какое количество материала пойдет на изготовление детали необходимо найти площадь S полной поверхности параллелепипеда без учета верхнего основания. Площадь поверхности параллелепипеда находится по формуле

$S_{полн}=2(x*x+x*h+x*h)=2(x^2 +2xh)$. Площадь основания равна $S_{осн} =x^2$, ее надо вычесть из полученной формулы $S=S_{полн}*S_{осн}=2(x^2 +2xh) - x^2 = x^2 +4xh$.

4. Подставим вместо h выражение (1). Получим формулу площади как функцию от x:

$S(x) =x^2 +4*x*108/x^2 =x^2 +432/x$.

5. Найдем производную $S'(x)=(x^2 +432/x)'=2x-432/x^2$.

6. Чтобы найти экстремум, необходимо приравнять производную к нулю:

$S'(x)=0= 2x-432/x^2 =0$;

далее находим $2x^3 =432$;

$x^3 =216$;

$x=6$.

7. Получили x=6 – точку минимума, следовательно, $S(6)=108$ см^2 наименьшее значение.

9. Следовательно, сторона основания x равна 6 см, а высота $h=108/x^2 =108/36=3$ см.

Ответ: стороны бака 3 и 6 см.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.1. Производная функции и ее применение

Практическое занятие № 31
«Нахождение оптимального результата с помощью производной в практических задачах»

Цель работы: Научиться применять производную функции при решении задач.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК 06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

ОК 07 Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

ОК 08 Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности

ОК 09 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

ПК 2.1 Выполнять расчеты параметров технологического процесса, работы оборудования, характеристик исходного сырья и продукции при производстве черных металлов.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:

1. Имеется квадратный лист жести, сторона которого а=60 см. Вырезая по всем его углам равные квадраты и загибая оставшуюся часть, нужно изготовить производственный ящик без крышки. Каковы должны быть размеры вырезаемых квадратов, чтобы производственный ящик имел наибольший объем?

2. Проектируется канал системы слива с прямоугольным сечением 4,5 . Каковы должны быть размеры сечения, чтобы для облицовки стенок и дна пошло наименьшее количество материала?

Для отыскания наименьшего и наибольшего значения функции, дифференцируемой внутри отрезка и непрерывной на его концах, следует найти все критические точки функции, лежащие внутри отрезка, вычислить значения функции в этих точках и на концах отрезка, а затем из всех полученных таким образом чисел выбрать наименьшее и наибольшее.

Порядок выполнения работы:

1. Находим критические точки функции.
2. Проверяем, какие из найденных критических точек лежат внутри заданного отрезка.
3. Находим значения функции на концах отрезка и в тех критических точках, которые попадают в этот отрезок.
4. Из всех полученных значений функции выбираем наименьшее и наибольшее.

Задача 1. Прочность балки прямоугольного сечения пропорциональна произведению её ширины на квадрат высоты. Какое сечение должна иметь балка, из цилиндрической заготовки радиуса R, чтобы её прочность была наибольшей? (рисунок 1)

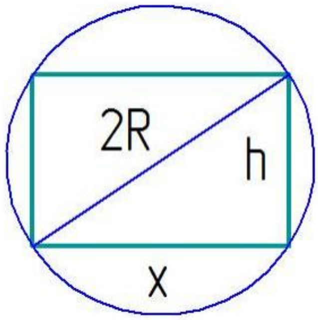


Рисунок 1 – сечение балки из цилиндрической заготовки

Решение. Составление математической модели. Оптимизируемая величина - прочность балки, поскольку в задаче требуется выяснить, когда прочность балки будет наибольшей. Обозначим оптимизируемую величину буквой y. Прочность зависит от ширины и высоты прямоугольника, служащего осевым сечением балки. Ширину балки обозначим буквой x. Поскольку осевое сечение представляет собой прямоугольник, вписанный в окружность радиуса R, то $0 \le x \le 2R$

Высота h прямоугольника связана с его шириной соотношением $x^2 + h^2 = 4R^2$ (по теореме Пифагора), значит, $h^2 = 4R^2 - x^2$.

Прочность балки y пропорциональна произведению xh^2, т. е. $y = kxh^2$ (где коэффициент k – некоторое положительное число).

Значит $y = kx(4RR^2 - x^2)$, где $x \in [0; 2R]$.

Работа с составленной моделью.

Для функции $y = kx(4RR^2 - x^2)$, где $x \in [0; 2R\}$ надо найти $y_{наиб}$.

Имеем:

Имеем: $y = 4kR^2x - kx^3$

$y' = 4kR^2 - 3kx^2$

Приравниваем производную нулю, получим

$4kR^2 - 3kx^2 = 0$

$x_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}}; \quad x_2 = -\frac{2R}{\sqrt{3}}.$

Заданному отрезку принадлежит лишь точка x= $x_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Вычислим значение функции в точке на концах отрезка в точках 0 и 2R.

Имеем

f(0)=0 f(2R)=0 $f(\frac{2R}{\sqrt{3}}) > 0$ значит $y_{наиб}$ =f $(\frac{2R}{\sqrt{3}})$.

В задаче спрашивается, какое сечение должна иметь балка наибольшей прочности.

Выяснили, что ширина прямоугольника, являющая осевым сечением наиболее прочной балки, равна $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Найдем высоту:

$$h^2 = 4R^2 - x^2$$

$$h^2=4R^2 - \frac{4R^2}{3} = \frac{8R^2}{3}.$$

$$h = \frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \qquad \frac{h}{x} = \sqrt{2}$$

Ответ: Сечением балки должен служить прямоугольник, у которого отношение высоты к ширине равно $\sqrt{2}$.

Замечание: Квалифицированные мастера приходят к такому же результату, опираясь на свой опыт, но они принимают указанное отношение равным 1,4 (приближённое значение иррационального числа как раз равно 1,4).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.2 Интеграл и его применение

Практическое занятие № 32
«Интеграл и первообразная. Нахождение неопределенных интегралов при помощи свойств интегралов»

Цель: научиться находить неопределённые интегралы непосредственным интегрированием при помощи свойств интегрирования.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

В соответствии с технологической картой проекта найти следующие интегралы:

1. $\int\left(\frac{3}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+5\right)dx$
2. $\int 3(2x^2-1)^2\,dx$
3. $\int x^3(1+5x^2)dx$
4. $\int(\frac{3}{x^4}+\frac{8}{x^5})dx$
5. $\int\left(5\sqrt{x^6}-7\sqrt[4]{x^3}\right)dx$

Краткие теоретические сведения:

Свойства неопределенного интеграла

1) $\int mf(x)dx = m\int f(x)dx$, m-const

2) $\int (f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Таблица основных интегралов

1) $\int dx = x + C$;

2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$;

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

4) $\int e^x dx = e^x + C$;

5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

7) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

11) $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

Порядок выполнения работы:

Совокупность всех первообразных для функции называется неопределенным интегралом.

Основные свойства неопределённого интеграла

1) $\int\left(f(x)+g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

2) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании таблицы интегралов. Могут представиться следующие случаи:

1) Данный интеграл находиться непосредственно по соответствующему табличному интегралу.

2) Данный интеграл после применения свойств 1и 2 приводится к одному или нескольким табличным интегралам;

3) Данный интеграл после элементарных тождественных преобразований, над подынтегральной функцией и применяя свойства 1и 2 приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

В соответствии с технологической картой проекта найти следующие интегралы:

1. $\int 6x^2dx$ –используем свойство 2 и формулу 2.

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ Получим:

$\int 6x^2dx = 6\int x^2dx = 6\frac{x^{2+1}}{2+1} + c = 6\frac{x^3}{3} + c = 2x^3 + c$

2. $\int 4(x^2 - x + 3)dx$ Используя свойства 1 и 2 и, формулы 1 и 2 получим: $4\int x^2dx - 4\int xdx + 12\int dx = 4\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 12x + c = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 12x + c$

- постоянная интегрирования С равна алгебраической сумме трех постоянных интегрирования .

3. $\int 2(3x-1)^2dx = 2\int(3x-1)^2dx = 2\int(9x^2 - 6x - 1)dx = 2\cdot 9\frac{x^3}{3} - 2\cdot 6\frac{x^2}{2} + 2x + c = 6x^3 - 6x^2 + 2x + c$

4. $\int \frac{x^3+3x^2+4x}{x}dx$ –разделим почленно на х, получим:

$$\int (x^2 + 3x + 4)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x + c$$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ –используем формулу 2 $\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.2 Интеграл и его применение

Практическое занятие № 33
«Интегрирование методом замены переменной»

Цель работы: Научиться вычислять интегралы способом подстановки.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

В соответствии с технологической картой проекта найти интегралы:

1. $\int(12ч - 5)^7dx$

2. $\int \frac{dx}{6x+5}$
3. $\int x\sqrt{x^2-7}\,dx$
4. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$
5. $\int tgxdx$
6. $\int \frac{dx}{1+16x^2}$

Порядок выполнение работы:

В основе интегрирования методом замены переменной (или способом постановки) лежит свойство инвариантности формул интегрирования, которое заключается в следующем: если $\int f(x)dx = F(x)+c$, то $\int f(u)du = F(u)+c$, где $u(x)$ производная дифференцируемая функция от x.

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видом:

1. $x=\varphi(t)$, где t-новая переменная, а $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируемая функция $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$
2. $t=\mu(x)$,где t-новая переменная, тогда: $\int f(\mu(t))\mu'(x)dx = \int f(t)dt$

1. $\int \frac{x^2dx}{8+x^3}$

-т.к. $d(8+x^3)=3x^2dx$, то

$$\int \frac{x^2dx}{8+x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{d(8+3x^3)}{8+x^3}$$

-полагая $8+x^3=t$, получим: $\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{3}\ln(t)+c=\frac{1}{3}\ln|8+x^3|+c$

2. $\int \frac{\cos xdx}{4+sin^2x} = \int \frac{d(sinx)}{4+sin^2x}$-поэтому, используя подстановку $t=sinx$, приходим к табличному интегралу: $\int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+c=\frac{1}{2}arctg\left(\frac{sinx}{2}\right)+c$

3. $\int \frac{e^xdx}{\sqrt{9-t^2}} = \int \frac{d(e^x)}{\sqrt{9-t^2}}$

-воспользовавшись подстановкой $t=e^x$, приводим к табличному интегралу $\int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = arcsin\frac{1}{3}+c=arcsin\frac{e^x}{3}+c$

Примечание: $dx=\frac{1}{a}d(ax+b)$

$$xdx=\frac{1}{2}d(x^2)$$
$$e^xdx=d(e^x)$$
$$\frac{dx}{x}=d(\ln(x)$$
$$cosxdx=d(sinx)$$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.2 Интеграл и его применение

Практическое занятие № 34
«Теорема Ньютона-Лейбница. Вычисление определенных интегралов различными методами»

Цель работы: научиться вычислять определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
В соответствии с технологической картой проекта найти интегралы.

1. $\int_1^2 2x^2 dx$
2. $\int_{-2}^{4} (8+2x-x^2)dx$
3. $\int_0^{\pi/2} cosxdx$
4. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos x - 3\sin x)dx$
5. $\int_{-2}^{2} \frac{1-x^2}{x^2}dx$

Методом замены переменной:

1. $\int_5^6 \frac{xdx}{x^2-6}$
2. $\int_3^4 (2x-5)^3 dx$
3. $\int_0^1 \sqrt[3]{x+2}dx$
4. $\int_{-1}^{1} (x^3+1)^4 x^2 \, dx$

Порядок выполнения работы:
1) Используя таблицу интегралов найти интеграл
2) Используя формулу Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

найти определенный интеграл

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 2x^2dx$$

Решение:

$$\int_1^2 2x^2dx\overset{(1)}{=}2\int_1^2 x^2dx\overset{(2)}{=}\frac{2}{3}(x^3)\Big|_1^2\overset{(3)}{=}\frac{2}{3}(2^3-1^3)=\frac{2}{3}(8-1)=\frac{2}{3}\cdot 7=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$$

(1) Выносим константу за знак интеграла.

(2) Интегрируем по таблице с помощью самой популярной формулы $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$. Появившуюся константу $\frac{1}{3}$ целесообразно отделить от x^3 и вынести за скобку. Делать это не обязательно, но желательно – зачем лишние вычисления?

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx=F(X)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$. Сначала подставляем в x^3 верхний предел, затем – нижний предел. Проводим дальнейшие вычисления и получаем окончательный ответ.

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-2}^4 (8+2x-x^2)dx$$

Решение:

$$\int_{-2}^4 (8+2x-x^2)dx\overset{(1)}{=}8\int_{-2}^4 dx+2\int_{-2}^4 xdx-\int_{-2}^4 x^2dx\overset{(2)}{=}8(x)\Big|_{-2}^4+2\cdot\frac{1}{2}(x^2)\Big|_{-2}^4-\frac{1}{3}(x^3)\Big|_{-2}^4\overset{(3)}{=}$$

$$=8(4-(-2))+(4^2-(-2)^2)-\frac{1}{3}(4^3-(-2)^3)=8\cdot 6+(16-4)-\frac{1}{3}(64+8)=$$

$$=48+12-24=36$$

(1) Используем свойства линейности определенного интеграла.

(2) Интегрируем по таблице, при этом все константы выносим – они не будут участвовать в подстановке верхнего и нижнего предела.

(3) Для каждого из трёх слагаемых применяем формулу Ньютона-Лейбница: $F(X)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$

Совет: перед тем, как использовать формулу Ньютона-Лейбница, полезно провести проверку: а сама-то первообразная найдена правильно?

Так, применительно к рассматриваемому примеру: перед тем, как в первообразную функцию $8x+x^2-\frac{x^3}{3}$ подставлять верхний и нижний пределы, желательно на черновике проверить, а правильно ли вообще найден неопределенный интеграл? Дифференцируем:

$$\left(8x+x^2-\frac{x^3}{3}\right)'=8(x)'+(x^2)'-\frac{1}{3}(x^3)'=8\cdot 1+2x-\frac{1}{3}\cdot 3x^2=8+2x-x^2$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, неопределенный интеграл найден верно. Теперь можно и формулу Ньютона-Лейбница применить.

Метод замены переменной

Вычислите интегралы.

1.$\int_5^6 \frac{xdx}{x^2-6}$
Введем новую переменную $t = x^2 - 6$
Дифференциал будет равен $dt = 2xdx$
Вычислим границы интегрирования t1=25-6=19, t2=36-6=30
Выполним подстановку $\frac{1}{2}\int_5^6 \frac{2xdx}{x^2-6} = \frac{1}{2}\int_{19}^{30} \frac{dt}{t}$
Вычислим, получившийся интеграл $\frac{1}{2}ln|30|$-$\frac{1}{2}ln|19|$=$\frac{1}{2}ln\frac{30}{19}$

Форма представления результата: выполненное задание/

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.2 Интеграл и его применение

Практическое занятие № 35,36
«Вычисление площадей фигур и объемов тел»

Цель работы: Научиться вычислять площади фигур и объемы тел, используя определенные интегралы

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК 06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

ОК 07 Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

ОК 08 Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности

ОК 09 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

ПК 2.1 Выполнять расчеты параметров технологического процесса, работы оборудования, характеристик исходного сырья и продукции при производстве черных металлов.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Форма заготовки имеет вид фигуры, ограниченной линиями. Найти площадь данной заготовки

$a)\quad y=-x^2+4,\ y=0$

$b)\quad y=x^2,\ y=x^3$

$c)\quad y=e^x,\ y=e^{-x},\ y=4$

2.Вычислить объем детали

$y=x^2,\ y=1,\ вокруг\,оси\,OY$

Порядок выполнения работы:

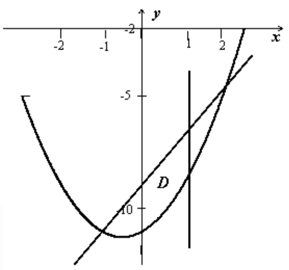
1) построить графики функций
2) найти область, ограниченную этими графиками
3) составит определенный интеграл, для нахождения площади найденной области

Пример 1: Найти площадь области **D (заготовка детали)**, ограниченной кривыми **y** = **x**^{2} + **x** + 11, **y** = 2 **x** - 9, при условии,

x<=1

$$D:\begin{cases} y=x^2+x-11,\\ y=2x-9,\\ x\le 1.\end{cases}$$

При решении таких задач следует обязательно изобразить исследуемый геометрический объект. Для определения нижнего предела интегрирования надо найти точку пересечения кривых; уравнение **x**^{2} + **x** + 11 = 2 **x** - 9 имеет два корня: **x** = -1 и **x** = 2. Подходящий корень - **x** = -1. Область ограничена сверху параболой, снизу - прямой, справа - прямой **x** = 1, крайняя левая точка - **x** = -1, поэтому



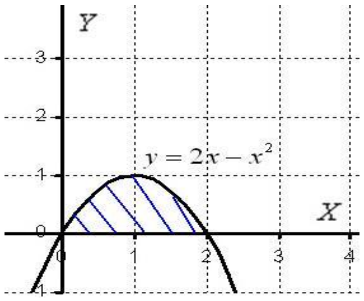
$$S(D)=\int_{-1}^{1}\left[(2x-9)-(x^2+x-11)\right]dx=$$

Если область имеет более сложную структуру, её следует разбить на простые части .

Пример 2

Вычислить объем детали, которая идентична телу, полученному вращением фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2$, $y=0$ вокруг оси OX.

Решение: Как и в задаче на нахождение площади, **решение начинается с чертежа плоской фигуры**. То есть, на плоскости XOY необходимо построить фигуру, ограниченную линиями $y=2x-x^2$



Искомая плоская фигура заштрихована синим цветом, именно она и вращается вокруг оси OX. В результате вращения получается такая немного яйцевидная летающая тарелка, которая симметрична относительно оси OX.

Объем тела вращения можно вычислить по формуле:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Вычислим объем тела вращения, используя данную формулу:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi\int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \pi \cdot \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - 0\right) = \frac{16\pi}{15}$$

Ответ: $V = \frac{16\pi}{15} ед^3. \approx 3{,}35\, ед^3.$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.2 Интеграл и его применение

Практическое занятие № 37, 38
«Физические приложения интегралов»

Цель работы: Научиться применять интегралы к решению физических задач

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК 06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

ОК 07 Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

ОК 08 Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности

ОК 09 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

ПК 2.1 Выполнять расчеты параметров технологического процесса, работы оборудования, характеристик исходного сырья и продукции при производстве черных металлов.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1) Вычислите массу участка стержня $x_1 = 0$ до $x_2 = 3$ (м), если его линейная плотность задается формулой $\rho(x) = x^2 + 1$(кг/м^3).

2) Скорость движения на конвейерной ленте v=v(t). Найдем путь S, пройденный содержимым конвейерной ленты за промежуток времени от $t_1=2$ до $t_2=7$ мин.

3) Тело брошено вертикально вверх со скоростью, которая изменяется по закону $v = 29.4 - 9.8t$ м/с. Найти наибольшую высоту подъема.

Порядок выполнения работы:

1) Записать формулу, используя определенный интеграл $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$

2) Вычислить определенный интеграл

1. Скорость движения на конвейерной ленте $v = (9t^2 - 8t)$ м/с. Найти путь, пройденный содержимым конвейерной ленты за 4-ю секунду.

Решение: согласно условию, $f(t) = 9t^2 - 8t, \quad t_1 = 3, t_2 = 4$. Следовательно, $s = \int_3^4 (9t^2 - 8t)dt = [3t^3 - 4t^2]_3^4 = 83$ (м).

2. Вычислите массу участка стержня $x_1 = 0$ до $x_2 = 1$ (м), если его линейная плотность задается формулой $\rho(x) = x^2 + 1$(кг/м^3).

Решение:

Согласно формуле, имеем:

$$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\, dx$$

$$m = \int_0^1 (x^2+1)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1^3}{3} + 1 - \left(\frac{0^3}{3} + 3\right) = \frac{4}{3}$$

Ответ: 1,33 кг

3. Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью v = (39,2—9,8t) м/с. Найти наибольшую высоту подъема тела.

Решение: тело достигнет наибольшей высоты подъема в такой момент времени t, когда v = 0, т.е. 39,2—9,8t = 0, откуда t= 4 с. По формуле (1) находим h=78.4

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.1. Координаты и векторы

Практическое занятие № 39
«Векторы. Действия с векторами. Декартова система координат в пространстве. Расстояние между точками»

Цель работы: Научиться применять теоретические знания при решении задач.

Выполнение работы способствует формированию:
ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
Решите задачи:
m- количество букв в имени
n- количество букв в фамилии
p- месяц рождения
В соответствии с технологической картой проекта необходимо выполнить следующие задания

1. Даны две точки: $A(m; -n; 0)$ и $B(p; -n;\ 2)$.Разложите вектор $\overrightarrow{AB}$ по векторам базиса и найдите его длину.

2. Даны векторы $\vec{a} = p\,\vec{i} - \vec{j} + m\,\vec{k}$ и $\vec{b} = n\,\vec{i} + p\,\vec{k}$. Найдите координаты вектора $\vec{c} = m\,\vec{a} - n\,\vec{b}$.

3. Вычислите скалярное произведение векторов $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{a}$, если $\vec{a} = \{-m; n; p\}$ и $\vec{b} = \{0; -p; n\}$.

4. При каком значении «x» векторы $\vec{a} = \{m; -n; x\}$ и $\vec{b} = \{-2m; 2n; p\}$ будут коллинеарными?

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.

2. Пользуясь конспектами лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

В соответствии с технологической картой проекта необходимо решить следующие задачи

Задача № 1. Даны точки $A(-3; 1; -1)$ и $B(2; -4; 1)$.

Разложите вектор $\overrightarrow{AB}$ по векторам базиса и найдите его длину.

Решение.

1) $\overrightarrow{AB} = \{2-(-3); -4-1; 1-(-1)\} = \{5; -5; 2\}$ - координаты вектора.

2) Разложим $\overrightarrow{AB}$ по векторам базиса:

$\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$.

3) Длину $|AB|$ найдем по формуле:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{5^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = 3\sqrt{6}.$$

Задача № 2.

Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{2i} + \vec{k}$. Найдите координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$. Решение

$\vec{a} = \{1; -3; 1\}$.

$\vec{b} = \{-2; 0; 1\}$; $2\vec{b} = \{-4; 0; 2\}$.

$\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b} = \{1; -3; 1\} - \{-4; 0; 2\} = \{1-(-4); -3-0; 1-2\} = \{5; -3; -1\}$.

Задача № 3

Вычислите скалярное произведение $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}$, если $\vec{a} = \{1; 0; 3\}$ и $\vec{b} = \{2; -1; 1\}$.

Решение

1) Найдём координаты $2\vec{a}$:

$2\vec{a} = \{2; 0; 6\}$

2). Найдём координаты $2\vec{a} + \vec{b}$:

$2\vec{a} + b = \{2; 0; 6\} + \{2; -1; 1\} = \{4; -1; 7\}$.

3). Найдём скалярное произведение:

$(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = 4 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 7 = 25$.

Ответ: 25

Задача № 4.

4. При каком значении «x» векторы $\vec{a} = \{4; -6; x\}$ и $\vec{b} = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 3\right\}$ будут коллинеарными?

Условие коллинеарности векторов:

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

Получим:

$$\frac{4}{-\frac{1}{2}} = \frac{-6}{\frac{3}{4}} = \frac{x}{3}.$$

$-8 = \frac{x}{3}$; $x = -24$.

Ответ: $x = -24$.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.1. Координаты и векторы

Практическое занятие № 40
«Векторы. Действия с векторами. Декартова система координат в пространстве. Расстояние между точками»

Цель: Научиться выполнять действия с векторами, находить расстояние между точками.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Решите задачи:

m- количество букв в имени

n- количество букв в фамилии

p- месяц рождения

1. Даны две точки: $A(m; -n; 0)$ и $B(p; -n; 2)$.Разложите вектор $\overrightarrow{AB}$ по векторам базиса и найдите его длину.

2. Даны векторы $\vec{a} = p\vec{i} - \vec{j} + m\vec{k}$ и $\vec{b} = n\vec{i} + p\vec{k}$. Найдите координаты вектора $\vec{c} = m\vec{a} - n\vec{b}$.

3. Вычислите скалярное произведение векторов $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{a}$, если $\vec{a} = \{-m; n; p\}$ и $\vec{b} = \{0; -p; n\}$.

4. При каком значении «*x*» векторы $\vec{a} = \{m; -n; x\}$ и $\vec{b} = \{-2m; 2n; p\}$ будут коллинеарными?

5. Тело, на которое действует постоянная сила $\vec{F} = (2n; -3p; 5)$, перемещается по отрезку прямой из точки A (-n; 2; -m) в точку B (1;m;2). Вычислите работу этой силы.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектами лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Задача № 1. Даны точки $A(-3; 1; -1)$ и $B(2; -4; 1)$.

Разложите вектор $\overrightarrow{AB}$ по векторам базиса и найдите его длину.

Решение.

1) $\overrightarrow{AB} = \{2 - (-3); -4 - 1; 1 - (-1)\} = \{5; -5; 2\}$ - координаты вектора.

2) Разложим $\overrightarrow{AB}$ по векторам базиса:

$\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$.

3) Длину $|AB|$ найдем по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = 3\sqrt{6}.$$

Задача № 2.

Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{2i} + \vec{k}$. Найдите координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$. Решение

$\vec{a} = \{1; -3; 1\}$.

$\vec{b} = \{-2; 0; 1\}$; $2\vec{b} = \{-4; 0; 2\}$.

$\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b} = \{1; -3; 1\} - \{-4; 0; 2\} = \{1 - (-4); -3 - 0; 1 - 2\} = \{5; -3; -1\}$.

Задача № 3

Вычислите скалярное произведение $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}$, если $\vec{a} = \{1; 0; 3\}$ и $\vec{b} = \{2; -1; 1\}$.

Решение

1) Найдём координаты $2\vec{a}$:

$2\vec{a} = \{2; 0; 6\}$

2). Найдём координаты $2\vec{a} + \vec{b}$:

$2\vec{a} + b = \{2; 0; 6\} + \{2; -1; 1\} = \{4; -1; 7\}$.

3). Найдём скалярное произведение:

$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=4\cdot 1+0\cdot(-1)+3\cdot 7=25$.

Ответ: 25

Задача № 4.

При каком значении «*x*» векторы $\vec{a}=\{4;-6;x\}$ и $\vec{b}=\left\{-\frac{1}{2};\frac{3}{4};3\right\}$ будут коллинеарными?

Условие коллинеарности векторов:

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$.

Получим:

$$\frac{4}{-\frac{1}{2}}=\frac{-6}{\frac{3}{4}}=\frac{x}{3}.$$

$-8=\frac{x}{3}$; $x=-24$.

Ответ: $x=-24$.

Задача № 5

Тело, на которое действует постоянная сила $\vec{F}=(4;-3;5)$, перемещается по отрезку прямой из точки А (-5; 2; -1) в точку В (1;3;2). Вычислите работу этой силы.

Решение:

Имеем $\overrightarrow{AB}$=(1-(-5))$\vec{i}$+(3-2)$\vec{j}$+(2-(-1))$\vec{k}$=6$\vec{i}$+$\vec{j}$ +3$\vec{k}$

Теперь воспользуемся формулой W= $\vec{F}*\overrightarrow{AB}$=4*6-3*1+5*3=36

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.1. Координаты и векторы

Практическое занятие № 41
«Декартова система координат на плоскости. Уравнения прямой, окружности. Решение задач на расположение прямых на плоскости»

Цель работы: Научиться решать задачи на нахождение уравнений прямых и окружностей, на расположение прямых на плоскости.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
m- количество букв в имени
n- количество букв в фамилии
p- месяц рождения
1. Найти точку пересечения прямых: $mx - py + n = 0$ и $x - y - p = 0$.
2. Найдите острый угол между прямыми:
$mx + ny - p = 0$ и $nx - py - nm = 0$.

3. Составьте уравнение прямой, параллельной прямой $px + y - m = 0$ и проходящей через точку $A(-n; 1)$.

4. Из точки $A(m; -1)$ на прямую $nx + py + 1 = 0$ опущен перпендикуляр. Составьте его уравнение.

Порядок выполнения работы:
1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектами лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи

Задача № 1
Найти точку пересечения прямых:
$2x + 3y - 12 = 0$ и $x - y - 1 = 0$.
Решим систему:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 12 = 0, \\ x - y - 1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2(1 + y) + 3y - 12 = 0, \\ x = 1 + y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + 2y + 3y - 12 = 0, \\ x = 1 + y; \end{cases} \qquad \begin{cases} 5y = 10, \\ x = 1 + y; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2, \\ x = 3. \end{cases}$$

Ответ: точка М $(3; 2)$.

Задача № 2
Определить угол между прямыми, заданными уравнениями:
$2x - 3y + 6 = 0$ и $x + 5y - 2 = 0$.
Решение
Найдем угловые коэффициенты этих прямых:

$$2x - 3y + 6 = 0; \qquad x + 5y - 2 = 0$$

$$-3y = -2x - 6, \qquad 5y = -x + 2,$$

$$y = \frac{2}{3}x + 6, \qquad y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5},$$

$$k_1 = \frac{2}{3}. \qquad k_2 = -\frac{1}{5}.$$

Подставим найденные значения k_1 и k_2 в формулу: $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$.

$$tg\varphi=\frac{-\frac{1}{5}-\frac{2}{3}}{1+(-\frac{1}{5})\cdot\frac{2}{3}}=\frac{-\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}}=-1.$$

$tg\varphi=-1;\quad \varphi=135^0.$

Полученный угол между прямыми - тупой. Смежный с ним, будет острый, то есть $\varphi_1=180^0-135^0=45^0$.

Задача № 3

1. Составьте уравнение прямой, параллельной прямой $5x+3y-7=0$ и проходящей через точку А(-2;6).

Решение

Составим уравнение пучка прямых, проходящих через точку А(-2;6).

$y-6=k(x+2)$

Находим угловой коэффициент данной прямой:

$3y=-5x+7,$

$y=-\frac{5}{3}x+\frac{7}{3};\quad k_1=-\frac{5}{3}.$

Так как прямые параллельны, то $k_2=-\frac{5}{3}$ - угловой коэффициент искомой прямой.

Подставим найденное значение $k_2=-\frac{5}{3}$ в уравнение пучка прямых:

$y-6=k(x+2)$;

после преобразования получим:

$5x+3y-8=0.$

Задача № 4

Из точки А(-3;5) на прямую $x-2y+3=0$ опущен перпендикуляр. Написать его уравнение.

Решение

Составим уравнение пучка прямых, проходящих через точку $A(-3;5)$.

$y-5=k(x+3).$

Найдем угловой коэффициент k_1 прямой $x-2y+3=0$;

$-2y=-x-3;$

$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2};$

$k_1=\frac{1}{2}.$

Учитывая условие перпендикулярности прямых: $k_1=-\frac{1}{k_2}$, найдем уравнение искомой прямой

$k_2=-2.$

$y-5=-2(x+3);$

$y+2x+1=0.$

Ответ: $y+2x+1=0.$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.2. Прямые и плоскости в пространстве

Практическое занятие № 42
«Решение задач на параллельность прямой и плоскости»

Цель работы: Научиться решать задачи на параллельность прямой и плоскости, используя признак параллельности прямой и плоскости.

Выполнение работы способствует формированию:
ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам
ОК 05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
m- количество букв в имени
n- количество букв в фамилии
p- месяц рождения

Задача№1
Точка К не лежит в плоскости квадрата ABCD. Точки М и Р - середины отрезков КВ и КС.
1). Как расположены прямые AD и МР?
2). Вычислите длину отрезка МР, если сторона квадрата равна n см.
Задача №2
Основание AD трапеции ABCD находится на плоскости Р, а основание ВС отстоит от нее на р см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до плоскости Р, если $\frac{DA}{CB}=\frac{m+n}{m}$.
Задача №3
Плоскость Р пересекает стороны АВ и АС треугольника в точках B_1 и C_1 соответственно. B_1C_1 параллельна ВС и равна p см, а $AC_1 : C_1C = m:n$. Найти ВС.

Порядок выполнения работы:
1. Внимательно прочитайте условие задачи.

2. Запишите, что в задаче дано, сделайте рисунок.

3. Проанализируйте условие задачи, рассуждая от того, что нужно найти. Вспомните, какие теоремы и формулы понадобятся при решении задачи.

4. Решите задачу. Запишите ответ.

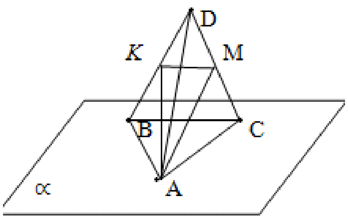
При решении задач на эту тему используется определение параллельных прямой и плоскости, признак параллельности прямой и плоскости, а также ваши знания из планиметрии.

Задача №1

Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. К и М – середины отрезков BD и CD.

1) Имеют ли общие точки прямая КМ и плоскость, в которой лежат точки A, B и C?

2) Вычислите периметр треугольника АКМ, если расстояние между каждой парой данных точек равно 8 см.



Дано: $\propto$, $A \in \propto$, $B \in \propto, C \in \propto$,

BK=KD, CM=MD,

AB=AC=BC=AD=BD=CD=8 см

1) пересекаются ли КМ и $\propto$

2) Найти $P_{АКМ}$

Решение:

1) Точка К является серединой отрезка BD, точка М- середина отрезка CD. Значит отрезок КМ - средняя линия треугольника BCD.

По свойству средней линии треугольника $КМ||BC$, $KM = \frac{1}{2}BC$. Следовательно, отрезок КМ параллелен прямой, лежащей в плоскости. По признаку параллельности прямой и плоскости, отрезок КМ и плоскость параллельны, т.е. не пересекаются.

2)$P_{AKM} = AK + AM + KM$

$KM = \frac{1}{2}BC$ $\quad KM = 4$ см.

Рассмотрим треугольники ACD и ABD: AC=AD=AB=CD=BD, т.е. ACD и ABD- равные равносторонние треугольники, а отрезки АМ и АК- медианы и высоты этих треугольников. Найдем эти отрезки:

$АК = АМ = \sqrt{АС^2 - МС^2}$

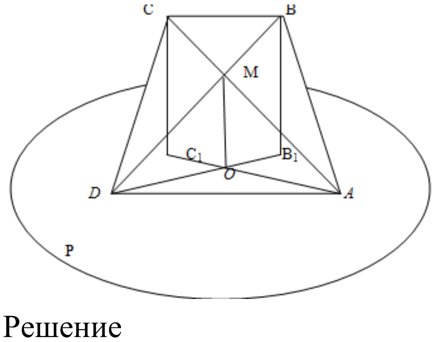
$МС = 4$ см.

$АК = АМ = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ см

$P_{AKM} = 4 + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 4 + 8\sqrt{3}$ см

Задача № 2

Основание AD трапеции ABCD находится на плоскости Р, а основание ВС отстоит от нее на 5 см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до плоскости Р, если $\frac{DA}{CB} = \frac{7}{3}$.



Дано:

ABCD – трапеция,

$\frac{DA}{CB} = \frac{7}{3}$. BB_1=5см, $BB1 \perp P$

Найти: расстояние от М до плоскости Р

Решение

1) Из точки М проведем к плоскости Р перпендикуляр ОМ. Следовательно, ОМ- расстояние от М до плоскости Р.

2) Рассмотрим ΔADM и ΔCBM

$\angle BMC = \angle DMC$ как вертикальные
$\angle CBM = \angle ADM$ как накрестлежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей BD.
Значит, ΔADM и ΔCBM подобны и $\frac{DA}{CD} = \frac{DM}{BM} = \frac{AM}{CM}$.
$\frac{DA}{CB} = \frac{7}{3} \Longrightarrow \frac{DA}{CD} = \frac{DM}{BM} = \frac{AM}{CM} = \frac{7}{3}$
$\frac{DM}{BM} = \frac{7}{3} \Rightarrow DM = \frac{7}{10}BD, BM = \frac{3}{10}BD$
3) Рассмотрим ΔBB_1D и ΔMOD
$\angle D$ – общий, $\angle BB_1D = \angle MOD = 90^0 \Rightarrow \Delta BB_1D \sim \Delta MOD$
$\frac{BB_1}{MO} = \frac{BD}{MD}$
$\frac{BB_1}{MO} = \frac{BD}{0{,}7BD} = \frac{10}{7}$
$MO = \frac{7}{10}BD$
$MO = \frac{7}{10} \cdot 5 = 3{,}5$ см.
Ответ: 3,5 см.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.2. Прямые и плоскости в пространстве

Практическое занятие № 43
«Решение задач на перпендикулярность прямой и плоскости. Решение задач на применение теорем о трёх перпендикулярах.»

Цель работы: Научиться использовать признак перпендикулярности прямой и плоскости, теорему о трех перпендикулярах при решении задач.

Выполнение работы способствует формированию:
ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам
ОК 05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
m- количество букв в имени
n- количество букв в фамилии
p- месяц рождения

Задача№1

Дан ромб ABCD. Из точки пересечения его диагоналей проведен отрезок OF, так, что $AF = CF$, $BF = DF$. Докажите, что OF перпендикулярен плоскости ромба, отрезок AC перпендикулярен плоскости BDF.

Задача №2

Дан равнобедренный треугольник ABC. $AC = BC = n$ см, $AB = m + 5$ см. Из вершины угла C проведен к плоскости перпендикуляр CD, равный p см. Найдите расстояние от точки D до стороны AB.

Задача №3

Точки A и B лежат в плоскости α, $M-$ такая точка в пространстве, для которой $AM = m$, $BM = n$ и ортогональная проекция на плоскость α отрезка BM в три раза больше ортогональной проекции на эту плоскость отрезка AM. Найдите расстояние от точки M до плоскости α.

Задача № 4

Высота прямоугольного треугольника ABC, опущенная на гипотенузу, равна р см. Из вершины C прямого угла восставлен к плоскости треугольника ABC перпендикуляр CM, причем $CM = m + n$ см. Найдите расстояние от точки M до гипотенузы AB.

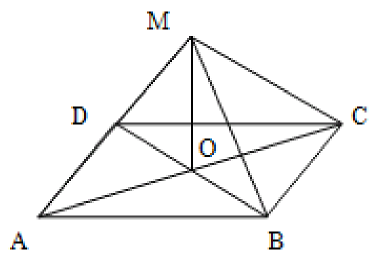
Порядок выполнения работы:

1. Внимательно прочитайте условие задачи.
2. Запишите, что в задаче дано, сделайте рисунок.
3. Проанализируйте условие задачи, рассуждая от того, что нужно найти. Вспомните, какие теоремы и формулы понадобятся при решении задачи.
4. Решите задачу. Запишите ответ.

При решении задач на эту тему используется определение перпендикулярных прямой и плоскости, признак перпендикулярности прямой и плоскости, теоремы о трех перпендикулярах, а также ваши знания из планиметрии

Задача 1

Из точки пересечения диагоналей параллелограмма ABCD проведен отрезок OM так, что $MA = MC, MB = MD$. Докажите, что отрезок OM перпендикулярен плоскости параллелограмма.



Дано:

$ABCD$ – параллелограмм

$AC \cap BD = O$

$MA = MC, MB = MD$

Доказать: $OM \perp (ABCD)$

Доказательство

1) Рассмотрим треугольники AOM и COM. OM - общая сторона, $MA = MC$ по условию, $AO = OC$ по свойству диагоналей параллелограмма. Значит, треугольники равны по трем сторонам, т.е. $\triangle AOM = \triangle COM$. Следовательно, $\angle AOM = \angle COM$.

Т. к. эти углы смежные и равные, то они равны по 90^0, т.е. $OM \perp AC$.

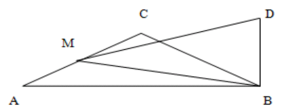
2) Рассмотрим треугольники BOM и DOM. OM - общая сторона, $MB = MD$ по условию, $BO = OD$ по свойству диагоналей параллелограмма. Значит, треугольники равны по трем сторонам, т.е. $\triangle BOM = \triangle DOM$. Следовательно, $\angle BOM = \angle DOM$.

Т. к. эти углы смежные и равные, то они равны по 90^0, т.е. OM $\perp$BD.

3) $\left.\begin{matrix} OM \perp AC. \\ OM \perp BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow OM \perp (ABCD)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

Задача 2

Стороны треугольника 10 см, 17 см и 21 см. Из вершины большего угла этого треугольника проведен перпендикуляр к его плоскости, равный 15 см. Найдите расстояние от его концов до большей стороны.



Дано:

$$\Delta ABC, AB = 10\text{ см}, BC = 17\text{см}, AC = 21\text{см}$$
$$BD \perp (ABC), BD = 15\text{см}$$

Найти расстояние от B и D до AC

Решение

1) Дополнительное построение: проведем $\text{BM} \perp \text{AC}$.

Значит, BM- расстояние от B до AC.

$$\left.\begin{matrix} DM - \text{наклонная} \\ \text{BM} - \text{проекция наклонной} \\ \text{BM} \perp \text{AC}. \end{matrix}\right\} \Rightarrow D\text{M} \perp \text{AC} \Rightarrow DM - \text{расстояние от } D \text{ до AC}.$$

2) Для того, чтобы найти высоту BM треугольника ABC, вычислим сначала его площадь, используя формулу Герона $S_{\Delta} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$

$p = \frac{10+17+21}{2} = 24$ см

$S_{ABC} = \sqrt{24 \cdot (24-10) \cdot (24-17) \cdot (24-21)} = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3} = 84\text{см}^2$

3) Запишем формулу для вычисления площади $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ah$

Применим эту формулу к нашему треугольнику: $S_{\Delta\text{ABC}} = \frac{1}{2}\text{AC} \cdot \text{BM}$.

Выразим из этой формулы BM: $\text{BM} = \frac{2S_{ABC}}{AC}$

$BM = \frac{2 \cdot 84}{21} = 8$ см

4) Рассмотрим треугольник BDM- прямоугольный, т.к. $BD \perp (ABC)$.

По теореме Пифагора найдем DM:

$DM^2 = BD^2 + BM^2$

$DM^2 = 15^2 + 8^2 = 289$

$DM = \sqrt{289} = 17$ см

Ответ: расстояния от концов перпендикуляра до стороны AC равны 8 см и 17 см.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Практическое занятие № 44
«Решение задач на параллельность плоскостей»

Цель работы: Научиться использовать признак параллельности плоскостей и свойства параллельных плоскостей при решении задач.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

m- количество букв в имени

n- количество букв в фамилии

p- месяц рождения

Задача № 1

Между двумя параллельными плоскостями заключен отрезок, длиной $m+n$ см. Найдите проекции этого отрезка на каждую плоскость, если расстояние между плоскостями равно p см.

Задача № 2

Плоскости M и P параллельны. Из точек A и B плоскости M проведены к плоскости P наклонные $\mathrm{AC} = m+n$ см и $BD = m+n-3$ см. Проекция наклонной AC на одну из плоскостей равна m см. Чему равна проекция наклонной BD?

Задача №3

Между двумя параллельными плоскостями P и Q проведены отрезки AC и BD (точки A и B лежат в плоскости P), $\mathrm{AC} = m+n+p$ дм, $BD = m+n$ дм , разность проекций AC и BD на одну из плоскостей равна m дм . Найдите длины этих проекций и расстояние между плоскостями.

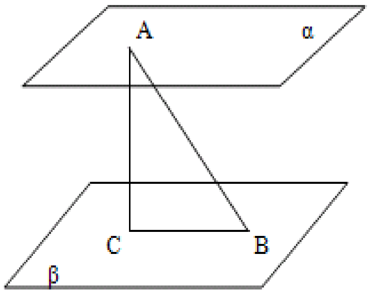
Порядок выполнения работы:

1. Внимательно прочитайте условие задачи.
2. Запишите, что в задаче дано, сделайте рисунок.
3. Проанализируйте условие задачи, рассуждая от того, что нужно найти. Вспомните, какие теоремы и формулы понадобятся при решении задачи.
4. Решите задачу. Запишите ответ.

При решении задач на эту тему используется определение параллельных плоскостей, признак параллельности плоскостей, теоремы о параллельных плоскостях, а также ваши знания из планиметрии

Задача № 1

Между двумя параллельными плоскостями заключен отрезок, длиной 10 м. Найдите проекции этого отрезка на каждую плоскость, если расстояние между плоскостями равно 8 м.



Дано:

$\alpha // \beta, \mathrm{AB} = 10$ см

$\mathrm{AC} \perp \beta, \mathrm{AC} = 8$ см

Найти проекции АС

Решение

1) Так как плоскости параллельны, то расстояние между ними - это перпендикуляр AC. Построим проекцию отрезка AB на плоскость β. Это отрезок BC.

2) Рассмотрим треугольник ABC- прямоугольный.

По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AC^2 = AB^2 - BC^2$

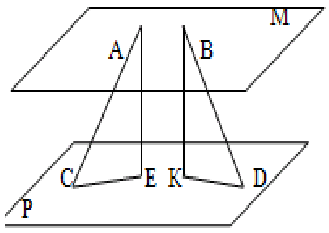
$AC^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$

AC=6 см.

Так как плоскости параллельны, то проекции отрезка на эти плоскости будут равны.

Задача № 2

Плоскости M и P параллельны. Из точек A и B плоскости M проведены к плоскости P наклонные AC= 37см и BD=125 см. Проекция наклонной AC на одну из плоскостей равна 12 см. Чему равна проекция наклонной BD?



Дано: $M \parallel P, A \in M, B \in M$

$AC = 37$ см, $BD = 125$ см

$AE \perp P, BK \perp P, CE = 12$ см

Найти: KD

Решение

1) Рассмотрим треугольник ACE- прямоугольный.

По теореме Пифагора $AC^2 = AE^2 + CE^2$

$AE^2 = AC^2 - CE^2$ $\quad AE^2 = 37^2 - 12^2 = 1369 - 144 = 1225$

AE=35 см.

2) Рассмотрим треугольник BKD- прямоугольный.

По теореме Пифагора $BD^2 = KD^2 + BK^2$

$KD^2 = BD^2 - BK^2$ AE=BK, как расстояния между параллельными плоскостями.

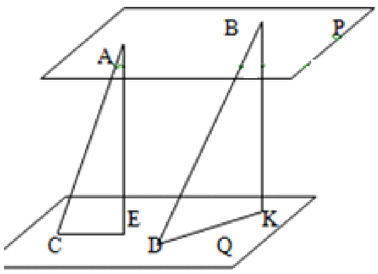
$KD^2 = 125^2 - 35^2 = 15625 - 1225 = 14400$

KD= 120 см.

Ответ: проекция BD равна 120 см.

Задача №3

Между двумя параллельными плоскостями P и Q проведены отрезки AC и BD (точки A и B лежат в плоскости P), AC=13 см, BD=15 см, сумма проекций AC и BD на одну из плоскостей равна 14 см . Найдите длины этих проекций и расстояние между плоскостями.



Дано: $Q \parallel P, A \in P, B \in P$

$AC = 13$ см, $BD = 15$ см

$AE \perp Q, BK \perp Q, CE + DK = 14$ см

Найти: CE, AE, DK

Решение

1) Рассмотрим треугольник ACE- прямоугольный.

По теореме Пифагора $AC^2 = AE^2 + CE^2$
$AE^2 = AC^2 - CE^2$
Пусть $CE = x$, тогда DK=14-x.
$AE^2 = 169 - x^2$
2) Рассмотрим треугольник BDK- прямоугольный.
По теореме Пифагора $BD^2 = BK^2 + DK^2$
$BK^2 = BD^2 - DK^2$
$BK^2 = 225 - (14 - x)^2 = 225 - 196 + 28x - x^2 = 29 + 28x - x^2$
AE=BK, как расстояния между параллельными плоскостями
Значит,
$169 - x^2 = 29 + 28x - x^2$
$28x = 140$
$x=5$
CE=5 см, DK=14-5=9 см
$AE = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ см
Ответ: расстояние между плоскостями 12 см, проекции наклонных 5 см и 9 см.

Форма представления результата: выполненное задание**.**

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи, вычисления, рисунки и графики.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.2. Прямые и плоскости в пространстве

Практическое занятие № 45
«Решение задач на двугранные углы»

Цель работы: Научиться решать задачи на применение понятий угла между прямой и плоскостью, двугранного угла, угла между плоскостями.

Выполнение работы способствует формированию:
ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам
ОК 05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
m- количество букв в имени
n- количество букв в фамилии
p- месяц рождения

1) Из точки А вне плоскости проведены к плоскости перпендикуляр $AB = n$ см и наклонные АС и АМ, образующие с плоскостью углы 30^0. Найдите угол между наклонными прямой. Найдите СМ.

2) Катеты прямоугольного треугольника равны n см и $n+m$ см. Определите расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол 30^0 с плоскостью треугольника.

3) Точки А и В лежат на ребре прямого двугранного угла. AA_1 и BB_1- перпендикуляры к ребру, проведенные в разных гранях, причем $AB = m$ см, $AA_1 = n+m$ см, $BB_1 = n-1$ см. Найдите A_1B_1.

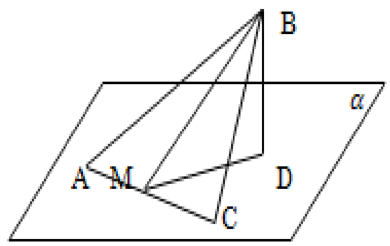
Порядок выполнения работы

1. Внимательно прочитайте условие задачи.
2. Запишите, что в задаче дано, сделайте рисунок.
3. Проанализируйте условие задачи, рассуждая от того, что нужно найти. Вспомните, какие теоремы и формулы понадобятся при решении задачи.
4. Решите задачу. Запишите ответ.

При решении задач на эту тему используются определения угла между прямой и плоскостью, двугранного угла, линейного угла двугранного угла, а также ваши знания из планиметрии.

Задача 1

Дан треугольник АВС со сторонами АВ=9 см, ВС= 6 см и АС= 5 см. Через меньшую сторону проходит плоскость, составляющая с плоскостью треугольника угол 45^0. Найдите расстояние между плоскостью и вершиной В.



Дано: $\Delta ABC, AB = 9$ см
$BC = 6$ см, $AC = 5$ см
$AC \in \alpha, \alpha = 45°$

Найти: Расстояние от В до α

Решение

1) Дополнительное построение: проведем $BD \perp \alpha \Rightarrow BD -$ расстояние от В до плоскости α.
$BM \perp AC \Rightarrow DM \perp AC$ по теореме о трех перпендикулярах.
Значит, $\angle BMD -$ линейный угол двугранного угла, $\angle BMD = 45^0$.

2) В треугольнике АВС найдем высоту ВМ.
Сначала вычислим площадь треугольника по формуле Герона:

$$S_{\Delta} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

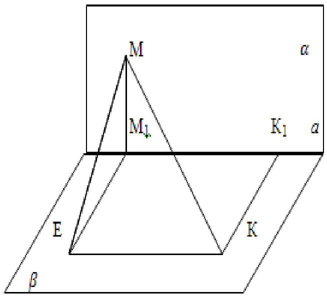
$p = \frac{9+6+5}{2} = 10$ см
$S_{ABC} = \sqrt{10 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5} = 10\sqrt{2}$см^2
$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BM \Rightarrow BM = \frac{2S_{ABC}}{AC}$
$BM = \frac{2 \cdot 10\sqrt{2}}{5} = 4\sqrt{2}$см

3) Рассмотрим треугольник BMD- прямоугольный по построению.
$\frac{BD}{BM} = sin\angle BMD$
$BD = BMsin\angle BMD$
$BD = 4\sqrt{2} \cdot sin45^0 = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$ см.

Ответ: расстояние от В до плоскости 4 см.

Задача 2

Концы отрезка МК лежат на гранях прямого двугранного угла. MM_1 и KK_1- перпендикуляры к ребру, причем МК=13 см, MM_1=12 см, M_1K_1=3 см. Найдите KK_1.



Дано: $< \alpha a \beta = 90°$

$MK = 13$ см, $MM_1 = 12$ см, $M_1K_1 = 3$ см

$MM_1 \perp a, KK_1 \perp a$

Найти: KK_1

Решение

1) Построим линейный угол двугранного угла. Для этого через точку M_1 проведем отрезок M_1E, параллельный и равный KK_1.

$KK_1 \perp$ a, следовательно, $M_1E \perp a$.

$< MM_1E$ – линейный угол двугранного угла, значит $< MM_1E = 90^0$.

2) Рассмотрим ΔMEK

ME- наклонная к плоскости β, EM_1 – ее проекция на эту плоскость, $EM_1 \perp EK$ (т.к. EM_1K_1K – прямоугольник по построению). Следовательно, $ME \perp EK$ (по теореме о трех перпендикулярах) и ΔMEK – прямоугольный.

По теореме Пифагора $MK^2 = ME^2 + EK^2$

$ME^2 = MK^2 - EK^2$ EK=M_1K_1=3 см

$ME^2 = 13^2 - 3^2 = 169 - 9 = 160$

$ME = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ см

3) Рассмотрим ΔMM_1K – прямоугольный, т.к. $< MM_1E = 90^0$.

По теореме Пифагора $ME^2 = MM_1{}^2 + M_1E^2$

$M_1E^2 = ME^2 - MM_1{}^2$

$M_1E^2 = 160 - 144 = 16$

M_1E= 4 см.

Значит, KK_1=4 см.

Ответ: KK_1=4 см.

Форма представления результата: выполненное задание**.**

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи, вычисления, рисунки и графики.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

Практическое занятие № 46
«Решение задач на призму»

Цель работы: Научиться решать задачи с призмой

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК 06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

ОК 07 Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

ОК 08 Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности

ОК 09 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1.Основание прямой призмы - треугольник, стороны которого равны 4 м, боковое ребро призмы равно 8 м. Найдите площадь полной поверхности призмы.

2.Основание прямой призмы – параллелограмм со сторонами 4 см и 6 см и углом между ними 60^0. Высота призмы 12 см. Найти полную поверхность и объем.

Многогранником называется тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Общие стороны смежных многоугольников называют **ребрами** многогранника. Многоугольники, которые ограничивают многогранник, называются его **гранями**. Грани многогранника, сходящиеся в одной точке, образуют многогранный угол; вершины таких многогранных углов называются **вершинами** многогранника. Прямые, соединяющие две какие-нибудь вершины, не лежащие на одной грани, называются **диагоналями** многогранника.

Призма – многогранник, две грани которого являются равными многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани – параллелограммами, имеющими общие стороны с этими многоугольниками.

Прямая призма называется **правильной**, если ее основания – правильные многоугольники.

Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех ее граней, а **площадью боковой поверхности** призмы – сумма площадей ее боковых граней.

$S_{пол} = 2S_{осн} + S_{бок}$

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

$S_{бок} = P \cdot h$

Объём прямой призмы равен произведению площади основания на высоту.

$V = S_{осн} \cdot h$

Порядок выполнения работы:

1) Выполнить чертеж

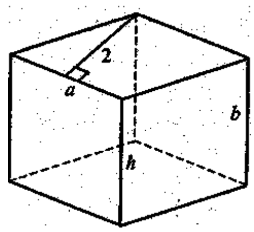
2) Записать кратко условие задачи
3) Оформить решение задачи

Задача 1: Основание прямой призмы - ромб с высотой 2 дм. Площадь боковой поверхности призмы равна 96 дм^2, а площадь полной поверхности равна 128 дм^2. Найдите высоту призмы.

Решение

Обозначим сторону основания *а,* а боковое ребро bРазницу между площадью полной поверхности призмы и площадью боковой поверхности призмы — это удвоенная

площадь основания призмы.



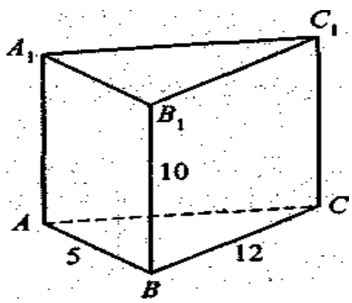
$$S_{осн} = 2a \Rightarrow 2a = 128 - 96 = 32 \Rightarrow a = 16$$

$$S_{бок} = 4ah = 96 \Rightarrow h = \frac{24}{a} = 1{,}5 \text{ (дм)}$$

Ответ: 1,5 дм.

Задача 2: Основание прямой призмы - прямоугольный треугольник, катеты которого равны 5 м и 12 м, боковое ребро призмы равно 10 м. Найдите площадь полной поверхности призмы.

Решение



$$AC = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

$$S_{полн} = 2S_{\Delta ABC} + S_{AA_1B_1B} + S_{BB_1C_1C} + S_{AA_1C_1C}$$

S =2*0,5*5*12+5*10+12*10+13*10=60+300=360 м^2

Ответ: 360 м^2.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

Практическое занятие № 47
«Решение задач на пирамиду»

Цель работы: Научиться решать задачи с пирамидой

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК 06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

ОК 07 Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

ОК 08 Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности

ОК 09 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1.Найдите объем правильной четырёхугольной пирамиды, высота которой 4 см, а диагональ основания 8 см.

2. Найти полную поверхность прямой пирамиды, в основании, которой лежит равнобедренный треугольник с основанием 5 см и боковыми сторонами 6 см. Боковые ребра пирамиды 12 см.

Пирамида – это многогранник, составленный из n–угольника и n треугольников.

Многоугольник - **основание** пирамиды, треугольники - **боковые грани** с общей вершиной, называемой **вершиной пирамиды**. Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на ее основание, называется **высотой пирамиды**.

Площадь полной поверхности пирамиды: $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$

Объем пирамиды: $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$

Правильная пирамида

Пирамида называется **правильной,** если ее основание – правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой.

Все боковые ребра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется **апофемой.**

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot \ell$$

Площадь полной поверхности правильной пирамиды:

$$S_{полн} = S_{осн} + \frac{1}{2} P \cdot l$$

Порядок выполнения работы:

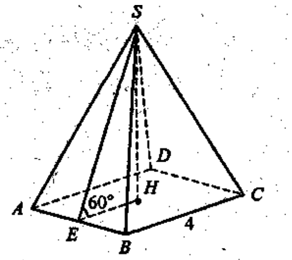
1)Выполнить чертеж

2)Записать кратко условие задачи

3) Оформить решение.

Задача 1: Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 4 см, а апофема образует с плоскостью основания угол в 60^0. Найдите площадь полной поверхности пирамиды

Решение:



$$EH = \frac{1}{2} BC = 2$$

$$\angle ESH = 90° - 60° = 30° \Rightarrow SE = 2EH = 4$$

$$S_{полн} = 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} AB + AB^2 = 2 \cdot 4 \cdot 4 + 4^2 = 48 \text{ (см}^2\text{)}$$

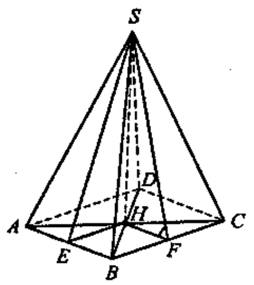
Ответ: 48 $см^2$.

Задача 2: Основание пирамиды —ромб, диагонали которого равны 30 см и 40 см. Высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, образуют с высотой пирамиды углы, равные 30^0. Найдите объем пирамиды.

Решение:

$$AC = 40 \Rightarrow AH = HC = 20$$

$$BD = 30 \Rightarrow BH = HD = 15$$



$$AB = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$$

$$HE = \frac{1}{2} BC = 12{,}5$$

$$SE = 2HE = 25$$

$$SH = \sqrt{SE^2 - HE^2} = \sqrt{25^2 - \frac{25^2}{4}} = 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$V_{пир} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 30 \cdot 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2500\sqrt{3} \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ: $2500\sqrt{3}$ $см^3$.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

Практическое занятие № 48, 49
«Решение задач на вычисление объемов и поверхностей многогранников»

Цель работы: Научиться решать задачи на вычисление объемов и поверхностей многогранников.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК 06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

ОК 07 Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

ОК 08 Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности

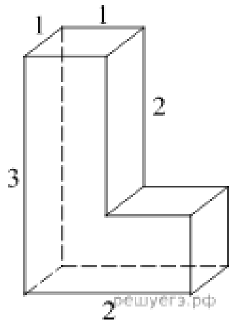
ОК 09 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Материальное обеспечение:

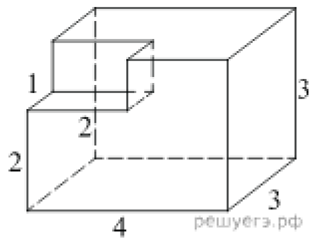
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Определите вид и найдите периметр сечения куба $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ плоскостью, проходящей через ребро $А_1Д_1$ и середину ребра $ВВ_1$, если длина ребра куба равна 8 см.
2. Определите вид и найдите периметр сечения куба $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ плоскостью, проходящей через точки А, Д и середину ребра $СС_1$, если длина ребра куба равна 4 см.
3. Найдите площадь поверхности рабочей детали, изображенной на рисунке (все двугранные углы прямые).



4. Найдите объем рабочей детали, изображенной на рисунке (все двугранные углы прямые).

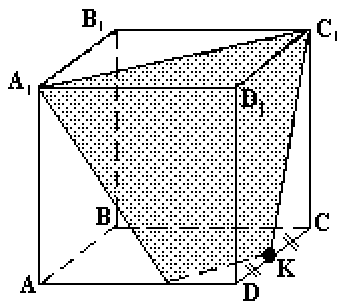


5. Требуется установить резервуар для воды емкостью 15 м3 на площадке размером 4,5 м х 3,75 м, служащей для него дном. Найдите высоту резервуара.

Порядок выполнения работы:

1) Выполнить чертеж
2) Записать кратко условие задачи
3) Оформить решение задачи

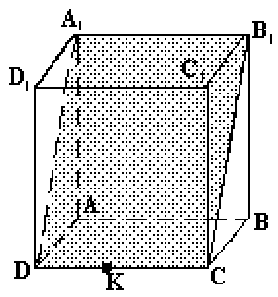
Задача 1: Дан куб *АВСДА*$_1$*В*$_1$*С*$_1$*Д*$_1$. Докажите, что сечение куба плоскостью A_1C_1K, где точка *К* - середина *ДС* - трапеция.



Решение: $MK \| A_1C_1$, потому что $(A_1Д_1C_1)$ параллельна $(АДС)$, а MK и A_1C_1 - линии пересечения этих плоскостей. $MK \| A_1C_1$, $A_1M \nparallel C_1K$, $MK \neq A_1C_1$, значит MA_1C_1K - трапеция.

Задача 2:

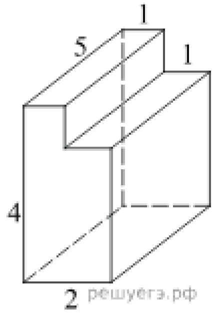
Дан куб *АВСДА*$_1$*В*$_1$*С*$_1$*Д*$_1$. Докажите, что сечение куба плоскостью A_1B_1К - параллелограмм.



Решение: $(AA_1B_1) \| (ДД_1C)$, то $A_1B_1 \| ДС$ и $A_1B_1 = ДС$. $(AA_1Д_1) \| (BB_1C_1)$, то $A_1Д \| B_1C$, значит $A_1B_1СД$ - параллелограмм.

Задача 3:

Найдите площадь поверхности рабочей детали, изображенной на рисунке (все двугранные углы прямые).



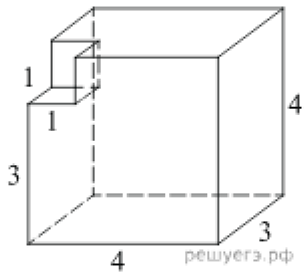
Решение: Площадь поверхности заданной детали -это площадь многогранника, равна разности площади поверхности прямоугольного параллелепипеда с ребрами 2, 4, 5 и двух площадей квадратов со стороной 1:

$$2*4*5+2*2*5+2*2*4-2*1*1=74$$

Ответ: 74.

Задача 4:

Найдите объем рабочей детали, изображенной на рисунке (все двугранные углы прямые).



Решение: Объем данной детали равен объему многогранника и равен разности объемов параллелепипедов с ребрами 3, 4, 4 и 1, 1, 1

$$V=V1-V2=3*4*4-1*1*1=47$$

Ответ: 47

Задача 5:

Требуется установить резервуар для воды емкостью 10 м3 на площадке размером 2,5 м х 1,75 м, служащей для него дном. Найдите высоту резервуара.

Решение: Площадь дна$S=2{,}5*1{,}75=4{,}375$кв. м. Так как $V=S*h$, то $h=\frac{V}{S}$=$\frac{10}{4{,}375}$=2,29 м.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

Практическое занятие № 50
«Решение задач на цилиндр, конус шар и сферу»

Цель работы: Научиться решать задачи с цилиндром, конусом и шаром.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК 06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

ОК 07 Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

ОК 08 Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности

ОК 09 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1.Объем цилиндра 120 см^2, его высота 3,6 см.

Найти радиус цилиндра.

2. Высота конуса 12см, радиус основания 10см. Конус пересечен плоскостью так, что в сечении получился треугольник. Найдите расстояние от этого сечения до оси.

3.Расстояние от центра шара до секущей плоскости равно 8 м, а радиус сечения плоскостью равен 6 м. Найдите радиус шара.

Цилиндр – тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей его сторону.

Круги называются **основаниями цилиндра**, а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей этих кругов – **образующими цилиндра**. У цилиндра основания равны и параллельны и образующие также равны и параллельны между собой.

Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований, параллельная образующим.

Боковая поверхность цилиндра – это поверхность, полученная от вращения стороны прямоугольника, параллельной оси цилиндра.

Высотой цилиндра называется расстояние между основаниями цилиндра. **Радиусом** цилиндра называется радиус его основания.

Цилиндр называется **прямым,** если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований.

Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = 2\pi Rh;$

Площадь полной поверхности:

$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн} = 2\pi Rh + 2\pi R;$

$S_{полн} = 2\pi R(h + R)$

Объем цилиндра: $V = \pi R^2 h.$

Сечение цилиндра – фигура полученная в пересечении цилиндра плоскостью.

Сечение, проходящее через ось цилиндра, называется *осевым сечением* и представляет собой прямоугольник.

Если секущая плоскость перпендикулярна к оси цилиндра, то сечение является кругом.

Конус

Рассмотрим окружность с центром в точке О и прямую ОР, перпендикулярную к плоскости этой окружности. Каждую точку окружности соединим с точкой Р отрезком. Поверхность, образованная этими отрезками, называется **конической**, а сами отрезки – **образующими конуса**.

Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом, называется **конусом** (рис. 2.2).

Коническая поверхность – **боковая поверхность** конуса, круг – **основание** конуса, точка Р – **вершина** конуса, образующие конической поверхности – **образующие** конуса. Все образующие конуса равны друг другу. Прямая ОР, проходящая через центр основания и вершину конуса, называется **осью** конуса. Ось конуса перпендикулярна к плоскости основания. Отрезок ОР называется **высотой** конуса.

Если секущая плоскость проходит через ось конуса, то полученное сечение называется **осевым сечением.**

Проведём секущую плоскость перпендикулярно к оси конуса. Эта плоскость пересекается с конусом по кругу и разбивает конус на две части. Одна из частей представляет собой конус, а другая называется **усечённым конусом.** (Изобразите усечённый конус самостоятельно. Постройте образующую, высоту.)

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки. Данная точка называется **центром сферы**, а данное расстояние – **радиусом сферы**. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через центр, называется **диаметром**. Тело, ограниченное сферой, называется **шаром**.

Шар можно получить при вращении полукруга вокруг диаметра. Границей шара служит сфера.

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется **касательной плоскостью** к сфере. Радиус сферы, проведённый в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

Сечение шара, проходящее через центр, называется **большим кругом**, не проходящее – **малым кругом** Центр большого круга совпадает с центром шара, а центр малого круга является основанием перпендикуляра, опущенного из центра шара на плоскость этого круга.

Сечения, равноотстоящие от центра, равны.

Радиус окружности, полученной при пересечении сферы радиуса R плоскостью, удаленной от центра сферы на d, равен $\sqrt{R^2 - d^2}$.

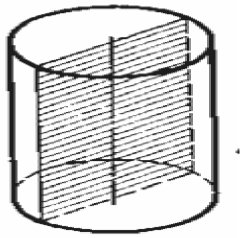
Порядок выполнения работы:

1)Выполнить чертеж

2)Записать кратко условие задачи

Задача 1.Осевое сечение цилиндра − квадрат, площадь которого Q. Найдите площадь основания цилиндра.

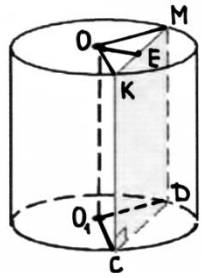
Решение:



Сторона квадрата равна $\sqrt{Q}$. Она равна диаметру основания. Поэтому площадь основания равна $\pi\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2 = \frac{\pi Q}{4}$.

Ответ: $S_{осн.цил.} = \frac{\pi Q}{4}$

Задача 2. Высота цилиндра 6см, радиус основания 5см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4см от нее.



Решение:

$S_{сеч.} = KM \times KC$,

OE = 4 см, KC = 6 см.

Треугольник OKM − равнобедренный (OK = OM = R = 5 см),

треугольник OEK − прямоугольный.

Из треугольника OEK, по теореме Пифагора:

EK = $\sqrt{OK^2 - OE^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$,

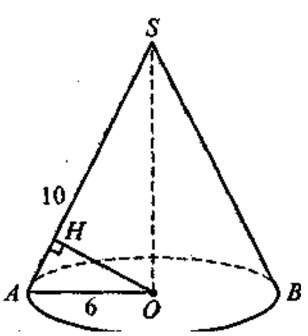
KM = 2EK = 2×3 = 6,

$S_{сеч.} = 6 \times 6 = 36$ см^2.

Ответ: $S_{сеч.} = 36$ см^2.

Задача 4: Площадь боковой поверхности конуса равна 60 дм^2, а радиус основания равен 6 м. Найдите расстояние от центра основания до образующей конуса.

Решение:



$$S_{бок} = \pi rl = 60\pi \Rightarrow rl = 60$$

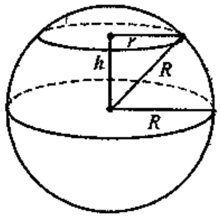
$$r = 6 \Rightarrow l = \frac{60}{r} = 10.$$

$$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

$$S_{\Delta ASO} = \frac{1}{2}\cdot AO \cdot OS = \frac{1}{2}\cdot 6 \cdot 8 = 24$$

С другой стороны, $S_{\Delta ASO} = \frac{1}{2}OH \cdot AS = 5OH = 24 \Rightarrow OH = \frac{24}{5}$

Задача 5: Площади сечения шара плоскостьюравна 16П м^2 , а площадь параллельного ему сечения, проходящего через центр шара, равна 25П м^2 . Найти расстояние между плоскостями сечений.



$\pi r^2 = 16\pi \Rightarrow r^2 = 16$, $r = 4$ м.

$\pi R^2 = 25\pi \Rightarrow R^2 = 25$, $R = 5$ м.

$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{25-16} = 3$ (м)

Ответ: 3 м

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

Практическое занятие № 51, 52
Решение задач на вычисление объёмов и поверхностей круглых тел

Цель работы: Научиться решать задачи вычисление объёмов и поверхностей круглых тел

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК 06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

ОК 07 Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

ОК 08 Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической

подготовленности
ОК 09 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
1. Необходимо по чертежу изготовить конус. Для расчета необходимого материала на изготовление найдите полную поверхность конуса, если образующая наклонена к плоскости основания под углом 30^0 и равна 12 см. А радиус основания 8 см.
2. Необходимо по чертежу изготовить шар, объём которого 125П $м^3$. Для расчета необходимого материала найдете площадь сферы.

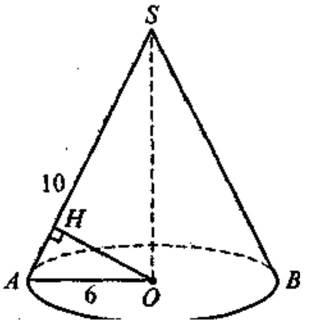
Цилиндр
Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = 2\pi Rh;$
Площадь полной поверхности:
$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн} = 2\pi Rh + 2\pi R;$
$S_{полн} = 2\pi R(h + R)$
Объем цилиндра: $V = \pi R^2 h.$
Сечение цилиндра – фигура полученная в пересечении цилиндра плоскостью.
Сечение, проходящее через ось цилиндра, называется *осевым сечением* и представляет собой прямоугольник.
Если секущая плоскость перпендикулярна к оси цилиндра, то сечение является кругом.
Площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую.
$S_{бок} = \pi rl$
Площадь полной поверхности конуса равна сумме площади боковой поверхности и площади основания.
$S_{полн} = \pi r(l + r)$
Площадь боковой поверхности усечённого конуса равна произведению полусуммы длин оснований на образующую.
Объём конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.
$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

Площадь поверхности сферы равна учетверенной площади большого круга: $S_{сферы} = 4\pi R^2$.
Объем шара: $V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Порядок выполнения работы:
1)Выполнить чертеж
2)Записать кратко условие задачи

Задача 1: Необходимо по чертежу изготовить конус, площадь боковой поверхности которого равна 60 $дм^2$, а радиус основания равен 6 м. Для изготовления конуса необходимо найти расстояние от центра основания до образующей конуса.

Решение:



$$S_{бок} = \pi r l = 60\pi \Rightarrow rl = 60$$

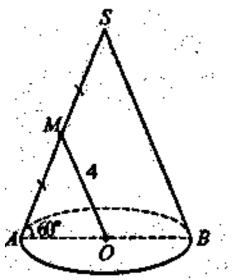
$$r = 6 \Rightarrow l = \frac{60}{r} = 10.$$

$$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

$$S_{\Delta ASO} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OS = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$$

С другой стороны, $S_{\Delta ASO} = \frac{1}{2} OH \cdot AS = 5OH = 24 \Rightarrow OH = \frac{24}{5}$

Задача 2: Необходимо по чертежу изготовить конус. Расстояние от центра основания конуса до середины образующей равно 4 см, а угол наклона образующей конуса к плоскости основания равен 60^0. Для изготовления конуса найдите площадь осевого сечения конуса.

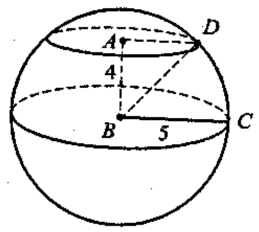


$$S_{\Delta ASB} = \frac{1}{2} \cdot AS \cdot AB \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}$$

Ответ: $16\sqrt{3}$ см^2.

Задача 3: Площадь сферы равна 100 м^2. Расстояние от центра сферы до секущей плоскости равно 4 м. Найдите радиус сечения.

Решение:



$$S_{сф} = 4\pi R^2 = 100\pi \Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow R = 5$$

$$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ (м)}$$

Ответ: 3 м.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены

2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Многогранники и круглые тела

Практическое занятие № 53
«Использование комбинаций многогранников и тел вращения в практико-ориентировочных задачах»

Цель работы: Научиться решать задачи на комбинацию геометрических тел

Выполнение работы способствует формированию:

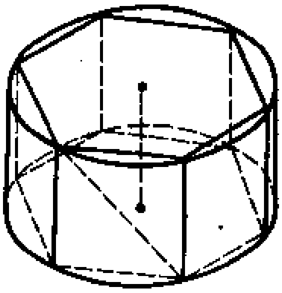
ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам
ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности
ОК 06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения
ОК 07 Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях
ОК 08 Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности
ОК 09 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
1. Для изготовления детали по чертежу, в котором в цилиндр наклонно вписан квадрат так, что все его вершины лежат на окружностях основания необходимо найти сторону квадрата, если высота цилиндра равна 2см, а радиус основания равен 7см.

Порядок выполнения работы:
1)Выполнить чертеж
2)Записать кратко условие задачи

Задача. Для изготовления детали по чертежу, в котором в цилиндр вписана правильная шестиугольная призма необходимо найти отношения объема призмы к объему цилиндра.



Решение:

$$\frac{V_{призм.}}{V_{цил.}} = \frac{S_{осн.} \times h}{\pi R^2 \times h} = \frac{S_{осн.}}{\pi R^2}$$

$a_6 = R$

$$S_{осн.} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{V_{призм.}}{V_{цил.}} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

Ответ: $\frac{V_{призм.}}{V_{цил.}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Раздел 5 Теория вероятностей и математическая статистика

Тема 5.1. Элементы комбинаторики

Практическое занятие № 54
«Решение комбинаторных задач. Размещения, сочетания и перестановки»

Цель работы: Научиться отличать сочетания от размещений, применять формулы для вычисления всех выборок без повторений.

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Пульт управления металлургическим процессом оснащен 10 индикаторами, Сколько вариантов одновременного загорания трех индикаторов.
2. Из бригады рабочих 12 человек, необходимо выбрать 3 человека для работы на станке. Сколько существует различных способов такого выбора.
3. В цехе имеется 8 станков для различной обработки деталей. Сколько способов имеется для расстановки рабочих на станки в разном порядке?

Порядок выполнения работы

1. Определите вид выборки без повторения.
2. Выберете соответствующую формулу для вычисления возможных комбинаций.
3. Произведите вычисления, используя понятие факториала.

1.Индикаторы на пульте управления металлургическим процессом загораются последовательным набором четырёх разных лампочек, пронумерованными цифрами. Требуется определить число возможных вариантов загорания лампочек.

Решение.

Возможных цифр (нумерация лампочек) всего десять(1,2,3,4,5,6,7,8,9,0).Каждая набранная комбинация отличается от другой комбинации хотя бы одной цифрой(1,4,5,7 ≠2,4,5,7),либо порядком набора одинаковых цифр(1,4,5,7≠4,5,7,1),поэтому для подсчёта числа возможных комбинаций используем формулу числа размещений.

Формула размещений имеет вид:$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$. В нашем случае $n = 4\,, m = 10$.

Производим расчёт $A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$=10$\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040$

2.Сколько существует способов выбора трёх рабочих из десяти для проведения работ?

Решение.

В данном случае при выборе для нас важен только состав по три человека, порядок выбора роли не играет, поэтому в отличие от первого примера число способов подсчитаем по формуле сочетаний.

Формула сочетаний имеет вид6$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. В нашем случае n=10, m=3.

Производим расчёт: $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 7!}$ =120.

3.Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр1,2,3.4 9 цифры не повторяются)?

Решение.

По условию дано множество из четырёх элементов, которые требуется расположить в определённом порядке. Значит, требуется найти количество перестановок их четырёх элементов.

Формула перестановок из n –элементов имеет вид:$P_n = n!$ В нашем случае n =4.

Произведём расчёт: P_4 =4!=4$\cdot 3\cdot 2\cdot 1$=24.

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены

2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 5.2 Элементы теории вероятностей и математической статистики

Практическое занятие № 55
«Классическое определение вероятности, свойства вероятностей, теорема о сумме вероятностей. Вероятность в задачах технологического профиля»

Цель работы: научиться находить вероятности событий, используя классическое определение вероятности

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК 07 Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

ОК 09 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Задание:

1. Для проверки качество изготовленных деталей их пронумеровали от 1 до 10. Наудачу выбрана деталь. Какова вероятность того, что это она имеет простой номер?
2. Для проверки качества изготовленных деталей приготовили 300 шт. Чему равна вероятность того, что наугад взятая деталь для проверки будет иметь номер, кратный 5?
3. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее- получить в сумме 7или8?

Порядок выполнения работы

1. Определите событие А, вероятность которого нужно вычислить.
2. Просчитайте общее число(n) возможных исходов.
3. Просчитайте число исходов(m), благоприятствующих наступлению события A.
4. Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события. $P(A) = \frac{m}{n}$.

1. На складе 10 одинаковых по размеру и весу деталей, из которых 6 оцинкованных и 4 обычных. Выбирается одна деталь. Какова вероятность того, что извлечённая деталь окажется оцинкованной?

Решение.

1. Событие А-«Извлечённая деталь оказалась оцинкованной».
2. число n=10
3. число m=6
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = 0,6$

2. Все детали, отобранные для проверки качества, пронумерованы от 1 до 30 и помещены в ящик. Извлекается одна деталь. Какова вероятность того, что число на взятой детали окажется кратным 5?

Решение.

1. Событие А-«На взятой детали число кратное 5».
2. число n=30
3. число m=6(числа 5,10,15,20,25,30)
4. $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{30}=0{,}2.$

3. Из букв слова *дифференциал* наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что эта буква будет: а) гласной, б) согласной, в) букв Событие А-«На взятой карточке число . кратное 5».

Решение.

1. Событие А-«Наугад выбранная буква будет гласной».
2. число n=12(-число букв в слове)
3. число m=5(буквы :*и,е,е,и,а*)
4. $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{5}{12}\approx 0{,}417$
5. число m=7(буквы :*д,ф,ф,р,н,ц,л*)
6. Событие В-«Наугад выбранная буква будет согласной».
7. число n=12(-число букв в слове)
8. $P(\mathrm{B})=\frac{m}{n}=\frac{7}{12}\approx 0{,}583$
9. Событие С-«Наугад выбранная буква будет буквой *ч*».
10. число n=12(-число букв в слове)
11. число m=0(такой буквы нет в данном слове)
12. $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{0}{12}=0.$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 5.2 Элементы теории вероятностей и математической статистики

Тема 6.1. Основы теории множеств

Практическое занятие № 56
«Представление данных. Задачи математической статистики технологического профиля»

Цель работы: научиться находить вероятности событий, используя классическое определение вероятности

Выполнение работы способствует формированию:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК 07 Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

ОК 09 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1**.** Построить полигоны частот и относительных частот по распределению выборки из отобранных деталей для проверки качества:

x_i	2	4	7	8	9	12
n_i	p_1^2	$2p_2$	p_2	p_2^2	p_3	$3p_3$

2. Постройте гистограммы частот и относительных частот по распределению выборки из отобранных деталей для проверки качества:

№ интервала	Интервал, $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала, n_i
1	3 – 5	p_1
2	5 – 7	$2p_2$
3	7 – 9	$3p_3$
4	9 – 11	p_1^2
5	11 – 13	$2p_2^2$
6	13 – 15	$3p_3^2$
7	15 – 17	p_1+p_2

3. Для генеральной совокупности, заданной распределением:

x_i	5	10	15	20	25	30	35
N_i	p_1	$3p_1$	p_2	$2p_2$	p_2^2	$2p_3$	$2p_3^2$

Найдите генеральную среднюю, генеральную дисперсию, генеральное стандартное отклонение, моду, медиану и размах.

4. Из генеральной совокупности сделана выборка, заданная распределением:

x_i	2	4	6	8	10	12	14
n_i	p_2	$2p_2$	p_1	p_1^2	p_3	$2p_3$	p_2+p_3

Найти выборочную среднюю выборочные дисперсию и стандартное отклонение. Обратите внимание: p_1 = числу букв в Вашем имени; p_2= числу букв в Вашей фамилии; p_3 = числу букв в имени Вашего отца.

Краткие теоретические сведения в полном объёме имеются в лекции.
Порядок выполнения работы:
1 Прочитав условие предложенной задачи , по конспекту лекции найдите соответствующие формулы.
2.Примените лекционный теоретический материал для решения каждой задачи.
3 В случае необходимости представить геометрическую интерпретацию числовых характеристик. выборки.

1. Задано распределение частот выборки из отобранных деталей для проверки качества:

x_i	2	6	12	15
n_i	3	10	7	5

Составить распределение относительных частот.
Определим сначала объем выборки:

$$n = 3 + 10 + 7 + 5 = 25.$$

Найдем относительные частоты по формуле $w_i = \dfrac{n_i}{n}$:

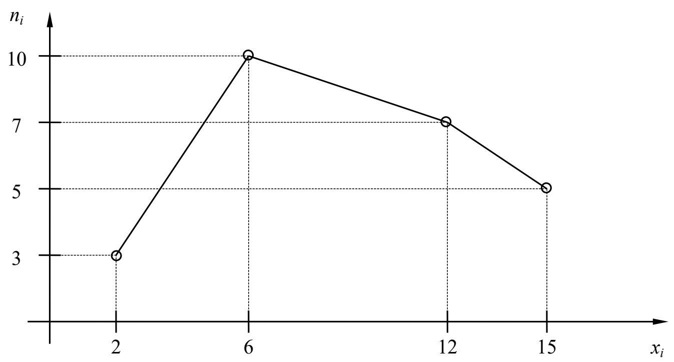
$$w_1 = \frac{3}{25} = 0{,}12\,;\; w_2 = \frac{10}{25} = 0{,}40\,; w_3 = \frac{7}{25} = 0{,}28\,; w_4 = \frac{5}{25} = 0{,}20\,.$$

Следовательно,

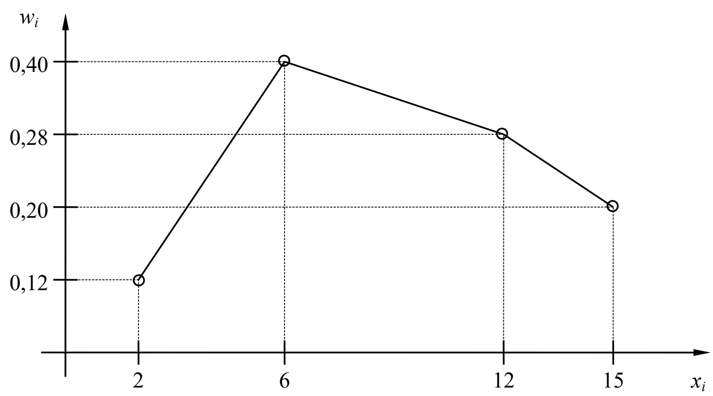
x_i	2	6	12	15
w_i	0,12	0,40	0,28	0,20

Контроль: $0{,}12 + 0{,}40 + 0{,}28 + 0{,}20 = 1$.

2.. По результатам примера 1 построить полигоны частот и относительных частот.
Решение. Отобразив на плоскости точки с координатами (x_i, n_i) и соединив их отрезками, получим полигон частот:



Аналогично построим полигон по точкам (x_i, w_i):



3.Постройте гистограмму по следующему статистическому распределению:

№ интервала	Интервал длиной h=5	Сумма частот вариант n_i
1	5 – 10	4
2	10 – 15	6
3	15 – 20	16
4	20 – 25	36
5	25 – 30	24
6	30 – 35	10
7	35 – 40	4

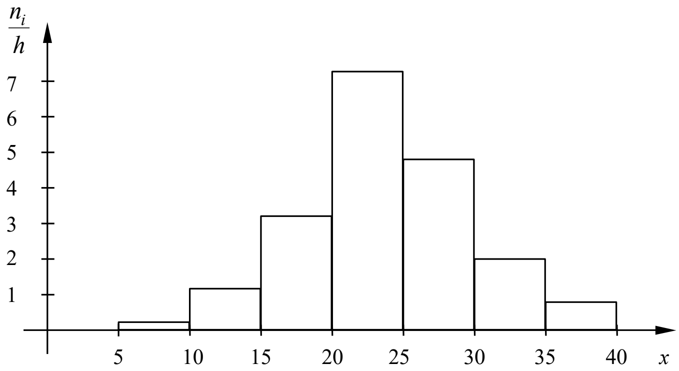
Решение. Прежде всего, определим объем выборки:

$$n = 4 + 6 + 16 + 36 + 24 + 10 + 4 = 100.$$

По известным суммам частот вариант рассчитаем плотность частоты по интервалам:

№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$	№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$
1	0,2	5	4,8
2	1,2	6	2,0
3	3,2	7	0,8
4	7,2		

Изобразим полученный результат:



4. Найдите статистические оценки генеральной совокупности, заданной следующим вариационным рядом:

варианта x_i	2	4	5	6
частота N_i	8	9	10	3

Решение. Определим объем совокупности:

$$N_Г = 8 + 9 + 10 + 3 = 30.$$

Найдем генеральную среднюю:

$$\overline{X}_Г = \frac{8 \cdot 2 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{30} = 4.$$

Для вычисления генеральной дисперсии используем формулу $D_Г = \overline{X^2_г} - \left(\overline{X}_Г\right)^2$. Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X^2_Г} = \frac{8 \cdot 2^2 + 9 \cdot 4^2 + 10 \cdot 5^2 + 3 \cdot 6^2}{30} = 17{,}8.$$

Таким образом, $D_Г = 17{,}8 - 4^2 = 1{,}8$.

Генеральное стандартное отклонение: $\sigma_Г = \sqrt{D_Г} = \sqrt{1{,}8} \cong 1{,}34$.

Обычно полученных результатов достаточно для практических задач. Однако можно получить дополнительные характеристики для более тонкой оценки генеральной совокупности. Приведем их:

Мода Mo : наибольшая частота

$$Mo = 10.$$

Медиана Me: вариационный ряд делится пополам в точке

$$Me = 4{,}5.$$

Размах вариации R: в примере

$x_{\max} = 6; x_{\min} = 2$,

поэтому

$$R = 6 - 2 = 4.$$

5**.** Из генеральной совокупности извлечена выборка

x_i	1	2	3	4	5
n_i	92	94	103	105	106

Найдите статистические характеристики выборки.

Решение. Определим объем выборки:

$$n = 92 + 94 + 103 + 105 + 106 = 500.$$

Выборочная средняя:

$$\overline{X}_B = \frac{92 \cdot 1 + 94 \cdot 2 + 103 \cdot 3 + 105 \cdot 4 + 106 \cdot 5}{500} = 1{,}82.$$

Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X^2_B} = \frac{92 \cdot 1^2 + 94 \cdot 2^2 + 103 \cdot 3^2 + 105 \cdot 4^2 + 106 \cdot 5^2}{500} = 11{,}45.$$

Выборочная дисперсия:

$$D_B = \overline{X^2_B} - \left(\overline{X}_B\right)^2 = 11{,}45 - 1{,}82^2 \cong 8{,}14.$$

Выборочное стандартное отклонение:

$$\sigma_B = \sqrt{8{,}14} \cong 2{,}85.$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.