

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет
им. Г. И. Носова»
Многопрофильный колледж

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
ОП.04 Численные методы**

**для обучающихся специальности:
специальности 09.02.13 Интеграция решений с применением технологий
искусственного интеллекта**

Квалификация: Специалист по работе с искусственным интеллектом

Форма обучения
очная на базе основного общего образования

Магнитогорск, 2025

ОДОБРЕНО:

Предметно-цикловой комиссией
«Информатики и
вычислительной

техники»

Председатель Т.Б. Ремез
Протокол № 5 от 17.02.2025

Методической комиссией МпК
Протокол №4 от №3 от «19» февраля
2025

г.

Разработчики:

преподаватель МпК ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова», к.т.н., доцент В.Д. Тутарова
преподаватель МпК ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова» С.В. Меркулова

Методические указания по выполнению лабораторных работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Численные методы».

Содержание лабораторных работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 09.02.13 Интеграция решений с применением технологий искусственного интеллекта и овладению общими и профессиональными компетенциями.

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ.....	3
ВВЕДЕНИЕ	4
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ.....	5
ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ №1	5
ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ №2,3 «РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ	13
УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ ГАУССА И КРАМЕРА».....	13
ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ №4 «ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ	16
СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ».....	16
ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ №5,6 «Реализация метода Ньютона для решения нелинейных	20
уравнений. Применение численных методов для задач оптимизации в нелинейных системах»	20
ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ №7,8 «Интерполяция методом Лагранжа для восстановления	26
недостающих данных. Построение полиномиальной интерполяции для реальных данных»	26
ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ №9 «Применение метода наименьших квадратов для аппроксимации	32
данных. Аппроксимация данных с использованием сплайнов».	32
ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ №10, 11 «ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И	33
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ».....	33
ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ №12,13 «ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ	35
УРАВНЕНИЙ».....	35
ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ №14,15 «Реализация метода градиентного спуска для оптимизации	38
функций. Применение стохастического градиентного спуска для больших наборов данных»	38

ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки обучающихся составляют практические занятия.

Состав и содержание лабораторных занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью лабораторных занятий является формирование учебных практических умений, необходимых в последующей учебной деятельности.

Ведущей дидактической целью лабораторных занятий является экспериментальное подтверждение и проверка существенных теоретических положений (законов, зависимостей).

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Численные методы» предусмотрено лабораторных занятий.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

- использовать основные численные методы решения математических задач;
- выбирать оптимальный численный метод для решения поставленной задачи;
- давать математические характеристики точности исходной информации и оценивать точность полученного численного решения;
- разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата;

Содержание лабораторных занятий ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению **профессиональными компетенциями:**

ПК 3.3 – Проводить обучение и последующую калибровку готовых моделей искусственного интеллекта.

ПК 1.1 – Формировать алгоритмы разработки программных модулей в соответствии с техническим заданием.

А также формированию **общих компетенций:**

ОК 1 – Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

Выполнение обучающихся лабораторных работ по учебной дисциплине «Численные методы» направлено на:

- *обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины.*

Лабораторные занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1 Основные задачи численных методов

ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ №1

«Сравнение численных и аналитических решений для простых задач. Применение численных методов для решения инженерных задач»

Цель: получить навыки определения основных источников погрешностей.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- давать математические характеристики точности исходной информации и оценивать точность полученного численного решения;
- разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата;
- распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте

Материальное обеспечение: пакет прикладных программ Microsoft Office.

Задание:

Ознакомьтесь с приведенным ниже предисловием к учебнику Шевченко А.С Численные методы и выполните задания.

<https://znanium.ru/catalog/document?id=384029>

- а) определить, какое равенство точнее;
- б) округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки; определить абсолютную погрешность результата;
- в) найти предельные абсолютную и относительную погрешности приближенного числа, все цифры которого по умолчанию верные.

Варианты заданий:

- а) $14/17 = 0,824$, $\sqrt{53} = 7,28$; б) $23,3748$, $\delta = 0,27\%$; в) $0,645$.
- а) $7/3 = 2,33$, $\sqrt{58} = 7,62$; б) $13,5726 \pm 0,0072$; в) $4,8556$.
- а) $27/31 = 0,871$, $\sqrt{42} = 6,48$; б) $0,088748$, $\delta = 0,56\%$; в) $71,385$.
- а) $23/9 = 2,56$, $\sqrt{87} = 9,33$; б) $4,57633 \pm 0,00042$; в) $6,8346$.
- а) $6/7 = 0,857$, $\sqrt{41} = 6,40$; б) $46,7843$, $\delta = 0,32\%$; в) $7,38$.
- а) $12/7 = 1,71$, $\sqrt{47} = 6,86$; б) $0,38725 \pm 0,00112$; в) $0,00646$.
- а) $21/13 = 1,62$, $\sqrt{63} = 7,94$; б) $45,7832$, $\delta = 0,18\%$; в) $3,6765$.
- а) $16/7 = 2,29$, $\sqrt{11} = 3,32$; б) $0,75244 \pm 0,00013$; в) $5,374$.

9. а) $18/7 = 2,57$, $\sqrt{22} = 4,69$; б) $46,453$, $\delta = 0,15\%$; в) $6,125$.
10. а) $17/9 = 1,89$, $\sqrt{17} = 4,12$; б) $0,66385 \pm 0,00042$; в) $24,6$.
11. а) $51/11 = 4,64$, $\sqrt{35} = 5,92$; б) $0,66385$, $\delta = 0,34\%$; в) $0,543$.
12. а) $19/12 = 1,58$, $\sqrt{12} = 3,46$; б) $4,88445 \pm 0,00052$; в) $4,633$.
13. а) $13/7 = 1,857$, $\sqrt{7} = 2,65$; б) $2,8867$, $\delta = 0,43\%$; в) $63,749$.
14. а) $49/13 = 3,77$, $\sqrt{14} = 3,74$; б) $5,6483 \pm 0,0017$; в) $0,00858$.
15. а) $5/3 = 1,667$, $\sqrt{38} = 6,16$; б) $3,7542$, $\delta = 0,32\%$; в) $0,389$.
16. а) $17/11 = 1,545$, $\sqrt{18} = 4,243$; б) $0,8647 \pm 0,0013$; в) $0,864$.
17. а) $7/22 = 0,318$, $\sqrt{13} = 3,61$; б) $0,3944$, $\delta = 0,15\%$; в) $21,7$.
18. а) $13/17 = 0,765$, $\sqrt{31} = 5,57$; б) $3,6878 \pm 0,0013$; в) $8,74$.
19. а) $50/19 = 2,63$, $\sqrt{27} = 5,20$; б) $0,85638$, $\delta = 0,22\%$; в) $231,57$.
20. а) $21/29 = 0,724$, $\sqrt{44} = 6,63$; б) $13,6853 \pm 0,0023$; в) $2,16$.
21. а) $17/19 = 0,895$, $\sqrt{52} = 7,21$; б) $7,521$, $\delta = 0,12\%$; в) $0,5748$.
22. а) $6/11 = 0,545$, $\sqrt{83} = 9,11$; б) $3,7832 \pm 0,0043$; в) $2,678$.
23. а) $16/19 = 0,842$, $\sqrt{55} = 7,416$; б) $17,356$, $\delta = 0,11\%$; в) $0,5718$.
24. а) $23/15 = 1,53$, $\sqrt{98} = 9,899$; б) $8,7432 \pm 0,0023$; в) $0,578$.
25. а) $2/21 = 0,095$, $\sqrt{22} = 4,69$; б) $24,5641$, $\delta = 0,09\%$; в) $4,478$.
26. а) $12/11 = 1,091$, $\sqrt{68} = 8,246$; б) $0,5532 \pm 0,0014$; в) $3,4479$.
27. а) $6/7 = 0,857$, $\sqrt{48} = 6,928$; б) $14,5841$, $\delta = 0,17\%$; в) $0,421$.
28. а) $15/7 = 2,14$, $\sqrt{10} = 3,16$; б) $4,5012 \pm 0,0013$; в) $1,4229$.
29. а) $4/17 = 0,235$, $\sqrt{105} = 10,25$; б) $1,1341$, $\delta = 0,12\%$; в) $2,401$.
30. а) $7/15 = 0,467$, $\sqrt{30} = 5,48$; б) $6,7702 \pm 0,0015$; в) $11,1239$.

Краткие теоретические сведения:

Выделим следующие основные источники погрешностей:

- а) параметры, входящие в описание задачи, заданы неточно; соответствующую погрешность называют неустранимой (погрешность данных);
- б) математическая модель описывает изучаемый объект приближенно с учетом основных, наиболее существенных факторов (погрешность математической модели);
- в) численный алгоритм, применяемый для решения математической задачи, зачастую дает лишь приближенное решение (погрешность метода);
- г) в процессе вычислений на компьютере промежуточные и конечные результаты округляются (вычислительная погрешность или погрешность округления). Методы, причисляемые к точным, не учитывают наличие вычислительной погрешности.

Часто первые два вида погрешности, объединяя в один, также называют неустранимой погрешностью.

Обозначив через I абсолютную величину погрешности результата, а через I_n , I_m и I_o – абсолютные величины неустранимой погрешности, погрешности метода и округления соответственно – нетрудно получить следующее соотношение:

Неравенство (1.1) дает оценку для погрешности результата. Из этого неравенства можно сделать важный вывод: полную погрешность результата нельзя сделать меньше, чем наибольшая из составляющих ее погрешностей.

Определение 1.1. *Приближенным значением* некоторой величины a называется число a_p , которое незначительно отличается от точного значения этой величины.

Пусть a – точное значение некоторой величины, а a_p – ее приближенное значение.

Определение 1.2. *Абсолютной погрешностью* Δ приближенного значения называется модуль разности между точным и приближенным значениями этой величины:

$$\Delta = |a - a_p| \quad (1.2)$$

Пример 1.1. Если $a = 20,25$ и $a_p = 20$, то абсолютная погрешность $= 0,25$.

Определение 1.3. Относительной погрешностью приближенной величины a_p называется отношение абсолютной погрешности приближенной величины к абсолютной величине ее точного значения:

$$\delta = \frac{|a - a_p|}{|a|} = \frac{\Delta}{|a|} \quad (1.3)$$

Это равенство можно записать в другой форме:

$$\Delta = |a|\delta \quad (1.4)$$

Пример 1.2. Пусть $a = 20,25$ и $a_p = 20$, тогда относительная погрешность $\delta = 0,25/20 = 0,0125$.

На практике, как правило, точное значение величины неизвестно. Поэтому вместо теоретических понятий абсолютной и относительной погрешностей используют практические понятия предельной абсолютной погрешности и предельной относительной погрешности.

Определение 1.4. Под предельной абсолютной погрешностью приближенного числа понимается всякое число Δ_a не меньшее абсолютной погрешности этого числа:

$$\Delta = |a - a_p| \leq \Delta_a \quad (1.5)$$

Неравенство (1.5) позволяет для точного значения величины получить оценку

$$a_p - \Delta_a \leq a \leq a_p + \Delta_a \quad (1.6)$$

Часто неравенства (1.6) записывают в другой форме

$$a = a_p \pm \Delta_a = a_p(1 \pm \delta_a) \quad (1.7)$$

На практике в качестве предельной абсолютной погрешности выбирают наименьшее из чисел Δ_a , удовлетворяющих неравенству (1.5), однако это не всегда возможно.

Пример 1.3. Оценить предельную абсолютную погрешность приближенного значения $a_p = 2,72$ числа e , если известно, что $e = 2,718281828459045$.

Решение.

Очевидно, что $|a_p - e| < 0,01$. Следовательно, $\Delta_a = 0,01$. Также справедливо неравенство $|a_p - e| = |2,720 - 2,71828 \dots| < 0,002$. Получаем другое значение абсолютной погрешности $\Delta_a = 0,002$. Ясно, что следует выбрать наименьшее из найденных значений предельной погрешности, так как это позволит сузить диапазон (1.5), в котором находится точное значение изучаемой величины.

Определение 1.5. Предельной относительной погрешностью δ_a данного приближенного числа называется любое число, не меньшее относительной погрешности этого числа:

$$\delta \leq \delta_a \quad (1.8)$$

Так как справедливо неравенство

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|} \leq \frac{\Delta_a}{|a|},$$

то можно считать, что предельные абсолютная и относительная погрешности связаны формулой

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \text{ или } \Delta_a = |a|\delta_a.$$

Пример 1.4. Пусть длина бруска измерена сантиметровой линейкой и получено приближенное значение $a_p = 251$ см. Найти предельную относительную погрешность δ_a

Решение.

Так как сантиметровая линейка не содержит делений меньше сантиметра, то предельная абсолютная погрешность $\Delta_a = 1$ см, а точное значение, a длины бруска находится в диапазоне $250 \text{ см} < a < 252 \text{ см}$. Хотя точное значение a неизвестно, можно для относительной погрешности записать неравенство

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} = \frac{1}{250} = 0,004$$

т. е. считать, что $\delta_a = 0,004$.

Если абсолютная погрешность Δ_a значительно меньше точного значения $|a|$, то относительную погрешность подразделяют приближенно как отношение абсолютной погрешности к приближенному значению:

$$\delta_a \approx \frac{\Delta_a}{|a_p|}, \Delta_a \approx |a_p| \delta_a. \quad (1.10)$$

Часто в формуле (1.10) вместо знака « $\approx$ » используют знак точного равенства « $=$ ». Относительную погрешность иногда задают в процентах.

Пример 1.5. Определить предельную относительную и абсолютную погрешности значения $x=125\pm 5\%$.

Решение.

Здесь $\delta_a = 5\% = 0,05$ и $\Delta_a = 0,05 \cdot 125 = 6,25$. В этом примере мы воспользовались формулой (1.10).

Значащие цифры

Определение 1.6. Значащими цифрами в записи приближенного числа называются:

- все ненулевые цифры;
- нули, содержащиеся между ненулевыми цифрами;
- нули, являющиеся представителями сохраненных десятичных разрядов при округлении.

В следующих примерах значащие цифры подчеркнуты.

Пример 1.6. 2,305; 0,0357; 0,001123; 0,035299879 $\approx$ 0,035300.

При округлении числа 0,035299879 до шести знаков после запятой получается число 0,035300, в котором последние два нуля являются значащими. Если отбросить эти нули, то полученное число 0,0353 не является равнозначным с числом 0,035300 как приближенным значением числа 0,035299879, так как погрешности указанных приближенных чисел отличаются!

Определение 1.7. Первые n значащих цифр в записи приближенного числа называются верными в узком смысле, если абсолютная погрешность числа не превосходит половины единицы разряда, соответствующего n -й значащей цифре, считая слева направо.

Наряду с данным определением иногда используется другое.

Определение 1.8. Первые n значащих цифр в записи приближенного числа называются верными в широком смысле, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, соответствующего n -й значащей цифре.

Пример 1.7. Определить верные цифры приближенного значения $a_p = 2,721$ числа e , если известно, что $e = 2,71828...$

Решение.

Очевидно, что $|a_p - e| = |2,721 - 2,71828 \dots| < 0,003 < 0,005$. Следовательно, верными являются только три первые цифры (в узком и широком смысле), последнюю цифру можно отбросить, $a_p = 2,72$.

Пример 1.8. Пусть $x = 1,10253 \pm 0,00009$. Верными являются первые четыре значащие цифры, а цифры 5 и 3 не удовлетворяют определению. В широком смысле верными являются первые пять цифр.

Пример 1.9. При записи следующих физических констант указаны три верные значащие цифры:

- а) гравитационная постоянная $\gamma = 6,67 \cdot 10^{11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$;
- б) скорость света в вакууме $c = 3,00 \cdot 10^8$, м/с;
- в) постоянная Планка $h = 6,63 \cdot 10^{34}$, Дж с.

Замечание. Термин «верные значащие цифры» нельзя понимать буквально. Например, современное опытное значение скорости света в вакууме составляет $c = 2,997925 \cdot 10^8$, м/с. Очевидно, что ни одна значащая цифра в примере 1.9, не совпадает с

соответствующей точной цифрой, но абсолютная погрешность меньше половины разряда, соответствующего последней значащей цифре в записи $3,00 \cdot 10^8$:

$$|3,00 \cdot 10^8 - 2,997925 \cdot 10^8| < 0,003 \cdot 10^8 < 0,01 \cdot 10^8 / 2 = 0,005 \cdot 10^8 .$$

Правило округления чисел

Чтобы округлить число до n значащих цифр, отбрасывают все цифры, стоящие справа от n -й значащей цифры, или, если это нужно для сохранения разрядов, заменяют их нулями. При этом:

если первая отброшенная цифра меньше 5, то оставшиеся десятичные знаки сохраняют без изменения;

если первая отброшенная цифра больше 5, то к последней оставшейся цифре прибавляют единицу;

если первая отброшенная цифра равна 5 и среди остальных отброшенных цифр есть ненулевые, то к последней оставшейся цифре прибавляют единицу;

если первая из отброшенных цифр равна 5 и все отброшенные цифры являются нулями, то последняя оставшаяся цифра остается неизменной, если она четная, и увеличивается на единицу, если нет (правило четной цифры).

Это правило гарантирует, что сохраненные значащие цифры числа являются верными в узком смысле, т. е. погрешность округления не превосходит половины разряда, соответствующего последней оставленной значащей цифре. Правило четной цифры должно обеспечить компенсацию знаков ошибок.

Пример 1.10. Приведем примеры округления до четырех значащих цифр;

а) $3,1415926 \approx 3,142$;

$$\Delta_a = |3,142 - 3,1415926| < 0,00041 < 0,0005 ;$$

б) $1\,256\,410 \approx 1\,256\,000$;

$$a = |1\,256\,000 - 1\,256\,410| < 500 ;$$

в) $2,997925 \cdot 10^8 \approx 2,998 \cdot 10^8$;

$$a = |2,998 \cdot 10^8 - 2,997925 \cdot 10^8| < 0,000075 \cdot 10^8 < 0,0005 \cdot 10^8$$

Следующая теорема выявляет связь относительной погрешности числа с числом верных десятичных знаков.

Теорема 1.1. Если положительное приближенное число имеет n верных значащих цифр, то его относительная погрешность δ не превосходит величины 10^{1-n} , деленной на первую значащую цифру α_H

$$\delta \leq 10^{1-n} / \alpha_H \quad (1.11)$$

Формула (1.11) позволяет вычислить предельную относительную погрешность

$$\delta_a = 10^{1-n} / \alpha_H \quad (1.12)$$

Пример 1.11. Найти относительную и абсолютную погрешности приближенных чисел: а) 3,142, б) $2,997925 \cdot 10^8$.

Решение.

а) Здесь $n = 4$, $\alpha_H = 3$. Используем формулу (1.12) для оценки относительной погрешности:

$$\alpha = 10^{1-n} / \alpha_H = 0,001 / 3 \approx 0,00033.$$

Для определения абсолютной погрешности применим формулу (1.10):

$$a \approx |a_p| \delta_a = 3,142 \cdot 0,00033 \approx 0,001.$$

б) Аналогично вычислим: $n = 7$, $\alpha_H = 2$, $\delta_a = 10^{1-n} / \alpha_H = 0,000001 / 2 = 0,0000005$;

$$a \approx |a_p| \delta_a = 2,997925 \cdot 10^8 \cdot 0,0000005 = 150$$

Погрешности арифметических операций

Приведем правила вычисления погрешности результата различных арифметических операций над приближенными числами.

Относительно алгебраической суммы $u = x \pm y$ можно утверждать следующее.

Теорема 1.2. Предельная абсолютная погрешность суммы приближенных чисел равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых

$$\Delta_u = \Delta_x + \Delta_y \quad (1.13)$$

Из формулы (1.13) следует, что *предельная абсолютная погрешность суммы не может быть меньше предельной абсолютной погрешности наименее точного из слагаемых*, т.е. если в состав суммы входят приближенные слагаемые с разными абсолютными погрешностями, то сохранять лишние значащие цифры в более точных не имеет смысла.

Пример 1.12. Найти сумму приближенных чисел, все цифры которых являются верными в широком смысле, и ее предельную абсолютную и относительную погрешности $u = 0,259 + 45,12 + 1,0012$.

Решение. Предельные абсолютные погрешности слагаемых здесь равны соответственно 0,001; 0,01; 0,0001.

Суммирование производим, руководствуясь следующим правилом: выделим наименее точные слагаемые (в нашем примере это второе слагаемое) и оставим их без изменения;

остальные числа округлим по образцу выделенных, оставляя один или два запасных знака;

сложим данные числа, учитывая все сохраненные знаки;

полученный результат округлим до точности наименее точных слагаемых. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta_u &= 0,001 + 0,01 + 0,0001 = 0,0111; \\ &= 0,259 + 45,12 + 1,0012 \approx 0,26 + 45,12 + 1,00 = 46,38 \pm 0,01. \end{aligned}$$

Основной вклад в абсолютную погрешность результата здесь вносят предельные погрешности исходных данных, приведенные выше.

Теорема 1.3. Если все слагаемые в сумме имеют один и тот же знак, то предельная относительная погрешность суммы не превышает наибольшей из предельных относительных погрешностей слагаемых:

$$\delta_u \leq \max(\delta_x, \delta_x, \dots, \delta_x) \quad (1.14)$$

При вычислении разности двух приближенных чисел $u = x - y$ ее абсолютная погрешность, согласно теореме 1.2, равна сумме абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого, т.е. $\Delta_u = \Delta_x + \Delta_y$, а предельная относительная погрешность.

$$\delta_u = \frac{\Delta_x + \Delta_y}{|x - y|} \quad (1.15)$$

Из формулы (1.15) следует, что если приближенные значения x и y близки, то предельная относительная погрешность будет очень большой.

Пример 1.13. Найти разность $u = x - y$ с тремя верными знаками, если $x = 12,1254 \pm 0,0001$, $y = 12,128 \pm 0,001$.

Решение.

Имеем $12,1254 - 12,128 = -0,0026$.

$$u = 0,0001 + 0,001 = 0,0011;$$

$$u = \frac{0,0011}{|-0,0026|} = 0,42;$$

$$x = \frac{0,0001}{|12,1254|} \approx 0,000008;$$

$$y = \frac{0,001}{|12,128|} \approx 0,00008;$$

Согласно этим результатам разность $x-y$ имеет не более одной верной цифры и относительная погрешность очень велика по сравнению с относительными погрешностями операндов.

В некоторых случаях удастся избежать вычисления разности близких чисел с помощью преобразования выражения так, чтобы разность была исключена. Рассмотрим один из таких примеров.

Пример 1.14. Найти разность $\sqrt{4,05} - \sqrt{4}$ с тремя верными знаками.

Решение. Умножим и разделим на сопряженное. Получим

$$\sqrt{4,05} - \sqrt{4} = \frac{(\sqrt{4,05} - \sqrt{4}) \cdot (\sqrt{4,05} + \sqrt{4})}{\sqrt{4,05} + \sqrt{4}} = \frac{4,05 - 4}{\sqrt{4,05} + \sqrt{4}} \approx \frac{0,05}{4,012461} \approx 0,01246$$

$$\approx 0,0125$$

Если представляется сложным заменить вычитание близких приближенных чисел сложением, то следует поступать так: если известно, что при вычитании должно пропасть m первых значащих цифр, а в результате требуется сохранить n верных цифр, тогда в уменьшаемом и вычитаемом следует сохранять $m+n$ верных значащих цифр:

$$\sqrt{4,05} - \sqrt{4} \approx 2,012461 - 2 \approx 0,0125$$

Теорема 1.4. Предельная относительная погрешность произведения $u=x \cdot y$ приближенных чисел, отличных от нуля, равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей, т. е.

$$\delta_u = \delta_x + \delta_y. \quad (1.16)$$

В частности, если $u=k \cdot x$, где k – точное число, имеем $\Delta_u = |k| \cdot \Delta_x$, $\delta_u = \delta_x$.

Пример 1.15. Определить произведение приближенных чисел $x=12,45$ и $y=2,13$ и число верных значащих цифр в нем, если все написанные цифры сомножителей – верные в узком смысле.

Решение. По условию предельные абсолютные погрешности сомножителей равны $\Delta_x = \Delta_y = 0,005$; $\delta_x = 0,005 / 12,45 \approx 0,0004$; $\delta_y = 0,005 / 2,13 = 0,0023$. Тогда по теореме 1.4 имеем $\delta_u = \delta_x + \delta_y = 0,0004 + 0,0023 = 0,0027 \approx 0,003$. Вычислим произведение $12,45 \cdot 2,13 = 26,5185$. $u = 26,5185 \cdot 0,003 \approx 0,079 \approx 0,08$. Таким образом, результат имеет три верных значащих цифры в широком смысле и может быть записан в виде $=26,5 \cdot (1 \pm 0,003)$.

Теорема 1.5. Предельная относительная погрешность частного равна сумме предельных относительных погрешностей делимого и делителя.

Пример 1.16. Вычислить частное приближенных чисел $x=12,45$ и $y=2,13$ и число верных значащих цифр в нем, если все написанные цифры сомножителей – верные в узком смысле.

Решение. Предельная относительная погрешность частного по теореме 1.5 равна $\delta_u \approx 0,003$. Вычислим частное $12,45 / 2,13 \approx 5,84507$.

$u = 5,84507 \cdot 0,003 \approx 0,0175 \approx 0,02$. Результат имеет две верных значащих цифры в узком смысле и может быть записан в виде $=5,8 \cdot (1 \pm 0,003)$.

Погрешность произвольной функции

Пусть задана произвольная функция $u=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – приближенные величины, а $\Delta_{x1}, \Delta_{x2}, \dots, \Delta_{xn}$ – их известные предельные абсолютные погрешности. Тогда предельная абсолютная погрешность результата – функции u – для малых Δ_{xi} вычисляется по формуле

$$\Delta_u = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta_{xi} \text{ в точке } (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.17)$$

Как видно из формулы (1.17), для ее применения требуется, чтобы функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ была дифференцируемой по всем переменным.

Пример 1.17. Вычислить функцию $u=2\sin(3x+4y)$, если

$$x = \frac{\pi}{24} \pm 0,002 \text{ и } y = \frac{\pi}{24} \pm 0,005$$

Найти предельные абсолютную и относительную погрешности результата и определить число верных значащих цифр.

Решение. Применяя формулу (1.17), имеем

$$\begin{aligned}\Delta u &= \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \Delta y = |6 \cos(3x + 4y)| \cdot 0,002 + |8 \cos(3x + 4y)| \cdot 0,005 = \\ &= |2 \cos(3x + 4y)| \cdot (3 \cdot 0,002 + 4 \cdot 0,005) = |2 \cos \frac{\pi}{4}| \cdot (3 \cdot 0,002 + 4 \cdot 0,005) = \\ &= \sqrt{2} \cdot 0,026 \approx 0,037.\end{aligned}$$

Для функции u находим $u = \sqrt{2} \approx 1,414214$. Учитывая предельную абсолютную погрешность $\Delta u \approx 0,04$, получаем результат, который имеет две верных значащих цифры в узком смысле. Ответ можно записать в виде

$$= 1,4 \pm 0,04.$$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с теоретическими сведениями.
2. Выполнить необходимые расчеты.
3. Оформить и представить результаты расчетов.

Форма представления результата:

Результаты представить в виде отчета в формате .docx.

Критерии оценки:

Задание выполнено без ошибок – оценка «отлично».

Задание выполнено правильно, но допущены 1-3 вычислительных ошибок – оценка «хорошо».

Задание выполнено небрежно, допущены ошибки – оценка «удовлетворительно».

Задание выполнено неправильно, допущены ошибки – оценка «неудовлетворительно».

Тема 1.2 Линейные уравнения и системы уравнений
ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ №2,3 «РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ
УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ ГАУССА И КРАМЕРА»

Цель: освоить методы решения систем линейных уравнений

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

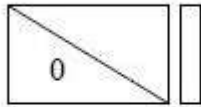
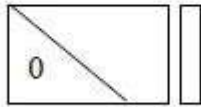
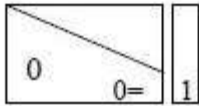
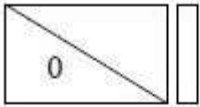
- Использовать основные численные методы решения математических задач;
- Выбирать оптимальный численный метод для решения поставленной задачи
- давать математические характеристики точности исходной информации и оценивать точность полученного численного решения;
- разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата;
- распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте

Материальное обеспечение: пакет прикладных программ Microsoft Office.

Задание: Решите СЛАУ приведенными ниже методами

Методы решения СЛАУ

Метод решения	Пример
<i>Решение невырожденной СЛАУ по формулам Крамера ($m=n$)</i> $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$ где Δ – определитель СЛАУ ($\Delta \neq 0$); Δ_i – определитель, полученный из определителя системы заменой i-го столбца столбцом свободных членов	$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 4x + 5y + 6z = 9, \\ 7x + 8y = -6. \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27,$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ -6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -54,$ $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 27,$ $\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & -6 \end{vmatrix} = 54,$ $x = \frac{-54}{27} = -2, \quad y = \frac{27}{27} = 1, \quad z = \frac{54}{27} = 2$
<i>Решение невырожденной СЛАУ матричным способом ($m=n$)</i> $AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$	$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 4x + 5y + 6z = 9, \\ 7x + 8y = -6. \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16/9 & 8/9 & -1/9 \\ 14/9 & -7/9 & 2/9 \\ -1/9 & 2/9 & -1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Метод решения	Пример
<i>Решение СЛАУ методом Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных) ($m \neq n$)</i> Расширенную матрицу системы (матрица, составленная из коэффициентов системы с добавлением столбца свободных членов) $A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ с помощью элементарных преобразований, проводимых только над строками, приводят к ступенчатому виду $\begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1k_2} & \dots & a'_{1k_r} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \dots & a'_{2k_2} & \dots & a'_{2k_r} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a'_{rk_r} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_m \end{pmatrix}$ После выполнения элементарных преобразований можно получить эквивалентную матрицу следующего типа:  Система совместна и определенна (имеет единственное решение).  Система совместна и неопределенна (имеет множество решений).  Система несовместна (решений нет)	$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 4x + 5y + 6z = 9, \\ 7x + 8y = -6. \end{cases}$ $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim$ $\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -15 \\ 0 & -6 & -21 & -48 \end{pmatrix} \sim$ $\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \end{pmatrix}$ Получена СЛАУ вида  Эквивалентная СЛАУ: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ y + 2z = 5 \\ 9z = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ Ответ: $x = -2$; $y = 1$; $z = 2$

№	Система уравнений	№	Система уравнений
1	$a) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$ $b) \begin{cases} 5x + 8y - z = -7 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \end{cases}$	4	$a) \begin{cases} x_1 + 5x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ -5x_1 - x_2 + 8x_3 - x_4 = 10 \end{cases}$ $b) \begin{cases} -2x + 5y - 3z = 11 \\ x - y = 0 \\ 3x + y - 4z = -4 \end{cases}$
2	$a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$ $b) \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$	5	$a) \begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -5 \\ -x_1 - 5x_2 + x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$ $b) \begin{cases} 2x - 5z = -17 \\ 2x - 2y - 3z = 3 \\ 3x + 4y - 5z = -8 \end{cases}$
3	$a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$ $b) \begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$	6	$a) \begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - 7x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 8 \\ -4x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$ $b) \begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с теоретическими сведениями.
2. Выполнить необходимые расчеты.
3. Оформить и представить результаты расчетов.

Форма представления результата:

Результаты представить в виде отчета в формате .docx.

Критерии оценки:

Задание выполнено без ошибок – оценка «отлично».

Задание выполнено правильно, но допущены 1-3 вычислительных ошибок – оценка «хорошо».

Задание выполнено небрежно, допущены ошибки – оценка «удовлетворительно».

Задание выполнено неправильно, допущены ошибки – оценка «неудовлетворительно».

Тема 1.2 Линейные уравнения и системы уравнений
ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ №4 «ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Цель: освоить методы численного решения систем линейных уравнений

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Использовать основные численные методы решения математических задач;
- Выбирать оптимальный численный метод для решения поставленной задачи
- давать математические характеристики точности исходной информации и оценивать точность полученного численного решения;
- разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата;
- распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте

Материальное обеспечение: пакет прикладных программ Microsoft Office.

Краткие теоретические сведения:

1. Метод простой итерации

Все методы решения систем уравнений можно разбить на условно точные и приближенные. К точным алгоритмам относится – метод Крамера, Гаусса, Жордана-Гаусса и т.д. Среди приближенных следует отметить, прежде всего, итерационные методы. Рассмотрим подробно метод простой итерации, который обладает следующими преимуществами:

1. Если процесс итерации сходится быстро, т.е. количество приближений меньше, чем порядок системы, то получается выигрыш во времени решения по сравнению с точными методами.

2. Метод итераций является самокорректирующимся, т.е. отдельные ошибки не отражаются на конечном результате решения.

3. Процесс итераций легко программируется на ЭВМ.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

где A – невырожденная матрица.

Расширенная матрица A этой системы имеет вид:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

Приводя с помощью линейных преобразований эту систему к эквивалентному виду .

$$\bar{x} = c\bar{x} + \bar{d}$$

будем решать последнюю методом последовательных приближений. Взяв за нулевое приближение какой-либо вектор $\bar{x}^{(0)}$, вычислим приближение $\bar{x}^{(1)}$ по формуле

$$\bar{x}^{(1)} = c\bar{x}^{(0)} + \bar{d}$$

аналогично

$$\bar{x}^{(2)} = c\bar{x}^{(1)} + \bar{d} \text{ и т.д.}$$

Последовательность векторов $\{\bar{x}^{(k)}\}, k=1,2,\dots$ сходится к точному решению $\bar{x}^*$, т.е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}^{(k)} = \bar{x}^*$$

если норма матрицы c

$$\|c\| < 1.$$

Норма $\|c\|$ определяется по одному из следующих способов:

$$\|c\|_m = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

$$\|c\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

$$\|c\|_k = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$$

При сделанных предположениях о норме матрицы c погрешность k -ого приближения можно оценить следующим образом:

$$\|\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)}\| \leq \frac{\|c\|^{k+1}}{1 - \|c\|} \|\bar{d}\| \quad \text{при } \bar{x}^{(0)} = \bar{d};$$

$$\|\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)}\| \leq \frac{\|c\|}{1 - \|c\|} \|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^{(k-1)}\|$$

Первая из этих формул позволяет оценить количество итераций, теоретически необходимых для достижения заданной точности.

Задание: Решите систему уравнений методом простой итерации

Варианты заданий

Решить систему линейных уравнений методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$. Для проверки сравнить полученный ответ с результатом применения функции Find в Mathcad (прил. 2).

$$1. \begin{cases} x_1 = 0.32x_1 - 0.23x_2 + 0.41x_3 - 0.06x_4 + 0.67, \\ x_2 = 0.18x_1 + 0.12x_2 - 0.33x_3 - 0.88, \\ x_3 = 0.12x_1 + 0.32x_2 - 0.05x_3 + 0.67x_4 - 0.18, \\ x_4 = 0.05x_1 - 0.11x_2 + 0.09x_3 - 0.12x_4 + 1.44. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 = 0.34x_2 + 0.23x_3 - 0.06x_4 + 1.42, \\ x_2 = 0.11x_1 - 0.23x_2 - 0.18x_3 + 0.36x_4 - 0.66, \\ x_3 = 0.23x_1 - 0.12x_2 + 0.15x_3 - 0.35x_4 + 1.08, \\ x_4 = 0.12x_1 + 0.11x_2 - 0.47x_3 + 0.17x_4 + 1.72. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 = 0.06x_1 + 0.17x_2 + 0.34x_3 + 0.16x_4 + 2.43, \\ x_2 = 0.32x_1 + 0.23x_2 - 0.35x_4 - 1.12, \\ x_3 = 0.16x_1 - 0.08x_2 - 0.12x_4 + 0.43, \\ x_4 = 0.09x_1 + 0.21x_2 - 0.13x_3 + 0.83. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 = 0.08x_2 - 0.23x_3 + 0.36x_4 + 1.37, \\ x_2 = 0.16x_1 - 0.22x_2 + 0.18x_3 - 2.38, \\ x_3 = 0.15x_1 + 0.12x_2 + 0.35x_3 - 0.17x_4 + 0.38, \\ x_4 = 0.25x_1 + 0.21x_2 - 0.19x_3 + 0.03x_4 + 0.64. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 = 0.32x_1 - 0.13x_2 - 0.08x_3 + 0.16x_4 + 2.42, \\ x_2 = 0.17x_1 - 0.22x_2 + 0.13x_3 - 0.21x_4 + 1.48, \\ x_3 = 0.05x_1 - 0.08x_2 + 0.34x_4 - 0.16, \\ x_4 = 0.12x_1 + 0.11x_2 - 0.19x_3 + 0.06x_4 + 1.64. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1 = 0.12x_1 + 0.23x_2 - 0.33x_3 + 0.07x_4 + 0.17, \\ x_2 = 0.45x_2 - 0.23x_3 + 0.07x_4 - 0.38, \\ x_3 = 0.12x_1 - 0.08x_3 + 0.77x_4 + 0.88, \\ x_4 = 0.08x_1 + 0.09x_2 + 0.39x_3 + 0.22x_4 - 1.74. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 = 0.03x_1 - 0.05x_2 + 0.21x_3 - 0.36x_4 + 0.43, \\ x_2 = 0.28x_1 + 0.52x_2 - 0.83x_3 + 0.07x_4 - 1.8, \\ x_3 = 0.33x_1 + 0.12x_2 - 0.08x_3 - 0.07x_4 - 0.8, \\ x_4 = 0.08x_1 + 0.17x_2 + 0.29x_3 + 0.32x_4 + 1.7. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x_1 = 0.17x_2 - 0.31x_3 + 0.16x_4 - 1.2, \\ x_2 = 0.18x_2 + 0.43x_3 - 0.08x_4 + 0.38, \\ x_3 = 0.22x_1 + 0.18x_2 + 0.25x_3 + 0.07x_4 + 0.48, \\ x_4 = 0.08x_1 + 0.07x_2 + 0.71x_3 + 0.04x_4 - 1.24. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 = 0.02x_1 + 0.03x_2 - 0.62x_3 + 0.06x_4 - 1.6, \\ x_2 = 0.03x_1 + 0.28x_2 + 0.33x_3 - 0.07x_4 + 1.1, \\ x_3 = 0.09x_1 + 0.12x_2 + 0.42x_3 + 0.27x_4 - 1.7, \\ x_4 = 0.19x_1 - 0.21x_2 + 0.08x_3 + 0.37x_4 + 1.4. \end{cases}$$

Порядок выполнения работы:

4. Ознакомиться с теоретическими сведениями.
5. Выполнить необходимые расчеты.
6. Оформить и представить результаты расчетов.

Форма представления результата:

Результаты представить в виде отчета в формате .docx.

Критерии оценки:

Задание выполнено без ошибок – оценка «отлично».

Задание выполнено правильно, но допущены 1-3 вычислительных ошибок – оценка «хорошо».

Задание выполнено небрежно, допущены ошибки – оценка «удовлетворительно».

Задание выполнено неправильно, допущены ошибки – оценка «неудовлетворительно».

Тема 1.3. Нелинейные уравнения

ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ №5,6 «РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА НЬЮТОНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ»

Цель: освоить методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений
Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Использовать основные численные методы решения математических задач;
- Выбирать оптимальный численный метод для решения поставленной задачи
- давать математические характеристики точности исходной информации и оценивать точность полученного численного решения;
- разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата;
- распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте

Материальное обеспечение: пакет прикладных программ Microsoft Office.

Задание:

Найти решения следующих уравнений с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$:

а) методом половинного деления; б) методом простых итераций; в) методом хорд и касательных.

1. $x^4 - 3x - 20 = 0 \quad (x > 0)$. 2. $x^3 - 2x - 5 = 0 \quad (x > 0)$.

3. $x^3 + 3x + 5 = 0$. 4. $x^4 + 5x - 7 = 0 \quad (x > 0)$.

5. $x^3 - 12x - 5 = 0 \quad (x > 0)$. 6. $x + e^x = 0$.

7. $x^3 - 2x^2 - 4x + 5 = 0 \quad (x < 0)$. 8. $x^5 - x - 2 = 0$.

9. $x^3 - 10x + 5 = 0 \quad (x < 0)$. 10. $2 - \ln x - x = 0$.

11. $x^3 + 2x - 7 = 0$. 12. $x^3 + x^2 - 11 = 0 \quad (x > 0)$.

13. $x^4 - 2x - 4 = 0 \quad (x > 0)$. 14. $2e^x + x - 1 = 0$.

15. $x^4 - 2x - 4 = 0 \quad (x < 0)$. 16. $2x^3 + x^2 - 4 = 0 \quad (x > 0)$.

17. $e^x - x - 2 = 0$. 18. $\frac{1}{2}e^x - x - 1 = 0 \quad (x > 0)$.

19. $x^2 - \cos x = 0 \quad (x > 0)$. 20. $x^2 + \ln x = 0$.

21. $\ln x + 0.5x - 1 = 0$. 22. $\ln x - 0.5x + 1 = 0 \quad (x > 1)$.

23. $\frac{1}{1+x^2} - \ln x = 0$. 24. $\frac{1}{1+x^2} - \frac{e^x}{2} = 0 \quad (x > 0)$.

25. $\frac{x}{2+x} - \ln x = 0$.

Краткие теоретические сведения:

Решение алгебраических и трансцендентных уравнений

6.1. Корни уравнения. Отделение корней

Функция $f(x)$ называется алгебраической, если для получения ее числового значения по данному значению аргумента x требуется выполнить арифметические операции и возведение в степень с рациональным показателем.

Если в запись уравнения входят только алгебраические функции, то уравнение называется *алгебраическим*.

Алгебраическое уравнение всегда может быть приведено к виду

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad (3.1)$$

где $n=1,2,3,\dots$, $a_n \neq 0$.

Все неалгебраические функции: показательная a^x , логарифмическая $\log_a x$, тригонометрические $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ – называются трансцендентными.

Если в запись уравнения входят трансцендентные функции, то уравнение называется трансцендентным, например $\operatorname{tg} x = ax$.

Решение уравнения $f(x) = 0$ с одним неизвестным x заключается в отыскании корней, то есть тех значений x , которые обращают уравнение в тождество.

В общем случае для уравнения $f(x) = 0$ отсутствуют аналитические формулы, определяющие его корни.

Задача отыскания корней сводится к нахождению всех точек x_i пересечения графика функции $f(x)$ с осью x (рис. 3.1).

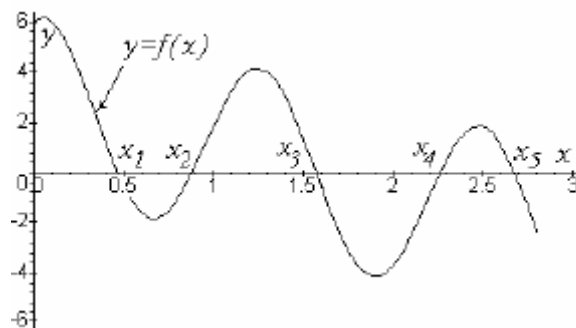


Рис. 3.1. Геометрическая интерпретация корней уравнения $f(x) = 0$

Из рисунка видно, что число точек пересечения графика функции с осью x может быть несколько. Поэтому в качестве первого шага при решении любого уравнения проводят *отделение* его корней. Это означает, что ось x разбивают на такие отрезки, что в каждом из них содержится только один корень уравнения. После этого следует уточнить положение каждого корня в пределах допустимой погрешности.

Для отделения корней полезна следующая теорема: если непрерывная функция $f(x)$ принимает значения разных знаков на концах отрезка $[a, b]$, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, то внутри этого отрезка содержится, по меньшей мере, один корень уравнения $f(x) = 0$. На основе этой же теоремы реализуются самые простые и надежные методы численного определения корней уравнений: метод половинного деления и метод хорд.

Процесс отделения корней начинается с установления знаков $f(x)$ в граничных точках интересующего нас отрезка определения переменной x : $x = a$ и $x = b$. Затем определяются знаки $f(x)$ в ряде промежуточных точек $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots$, выбор которых должен учитывать особенности функции $f(x)$. Если окажется, что $f(\alpha_i) \cdot f(\alpha_{i+1}) < 0$, то в интервале (α_i, α_{i+1}) есть корень уравнения $f(x) = 0$. Необходимо убедиться, является ли этот корень единственным на данном интервале. Для отделения корней практически достаточно провести процесс половинного деления, последовательно деля исходный отрезок $[a, b]$ на 2, 4, 8 и т. д. равных частей и определяя знаки $f(x)$ в точках деления. Напомним, что алгебраическое уравнение степени n имеет не более n действительных корней. Поэтому если для алгебраического уравнения мы получили $n+1$ переменную знака $f(x)$, то все его корни отделены.

6.2. Численное решение уравнения методом половинного деления (метод дихотомии)

Предположим, что процесс отделения корней проведен и на отрезке $[a, b]$ находится ровно один корень ξ уравнения $f(x)=0$. Необходимо определить его положение с погрешностью ε .

Метод половинного деления заключается в следующем, см. рис. 3.2.

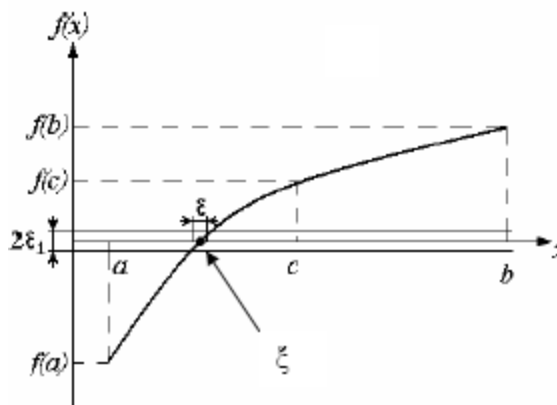


Рис. 3.2. Графическая интерпретация метода половинного деления

Сначала определяем середину c отрезка $[a, b]$ $c = (a+b)/2$ и вычисляем значение функции $f(c)$. Далее делаем выбор, какую из двух частей взять для уточнения корня. Очевидно, что корень будет находиться в той половине исходного отрезка, на концах которой функция имеет разные знаки. На рисунке 2 таким будет правый отрезок – отрезок $[a, c]$.

Для очередного шага уточнения положения корня отрезок $[c, b]$ из рассмотрения исключаем, а с отрезком $[a, c]$ продолжаем процесс деления, как и с первоначальным отрезком $[a, b]$, формально переписывая новому значению b значение c . Если же реализуется ситуация, когда функция имеет разные знаки на концах отрезка $[c, b]$, то из рассмотрения следует исключить отрезок $[a, c]$, формально переписывая новому значению a значение c .

В результате мы получим последовательность вложенных друг в друга отрезков все уменьшающейся длины: $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots [a_n, b_n]$. Этот повторяющийся (итерационный) процесс будем продолжать до тех пор, пока длина отрезка $[a_n, b_n]$ не станет меньше заданной погрешности ε вычислений.

Тогда искомый корень

$$\xi \approx a_n \approx b_n \approx (a_n + b_n)/2. \quad (3.2)$$

Следует учитывать, что функция $f(x)$ вычисляется с некоторой абсолютной погрешностью $\varepsilon_{\square}$. Вблизи корня значения функции $f(x)$ малы по абсолютной величине и могут оказаться сравнимыми с погрешностью ее вычисления. Другими словами, при подходе к корню мы можем попасть в “полосу шумов” $2\varepsilon_1$ (рис. 3.2.) и дальнейшее уточнение корня становится бессмысленным. Поэтому надо задать ширину “полосы шумов” и прекратить итерационный процесс при попадании в нее. Также необходимо иметь в виду, что при уменьшении длины интервала $[a_n, b_n]$ увеличивается погрешность вычисления его длины $a_n - b_n$ за счет вычитания двух близких чисел.

Метод половинного деления обладает довольно большой скоростью сходимости. Так как за каждую итерацию интервал, где расположен корень, уменьшается в два раза, то через n итераций длина интервала будет равна $(b-a)/2^n$. За 10 итераций интервал уменьшится в $2^{10} \approx 1024 \approx 10^3$ раз, а за 20 итераций – в $2^{20} \approx 10^6$ раз.

6.3. Метод хорд

В предположениях предыдущего параграфа укажем более быстрый способ нахождения корня ξ уравнения $f(x) = 0$. В этом методе очередное приближение к корню берется не в середине отрезка $[a, b]$, а в точке x_1 , где хорда графика функции $f(x)$, соединяющая точки $f(a)$ и $f(b)$, пересекает ось абсцисс (рис. 3.3).

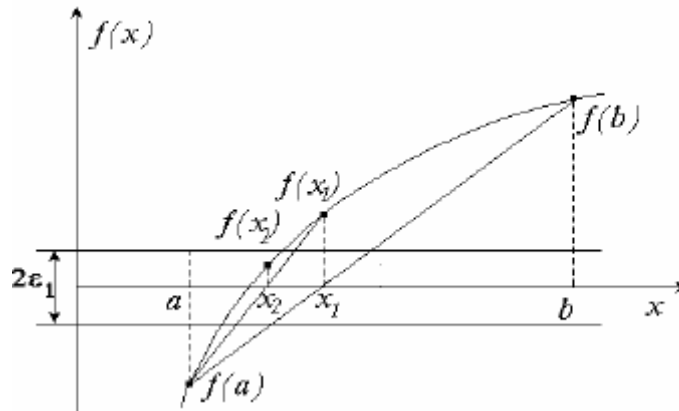


Рис. 3.3. Графическая интерпретация метода хорд

В качестве нового интервала для продолжения итерационного процесса выбираем ту из двух частей ($[a, x_1]$ или $[x_1, b]$) отрезка $[a, b]$, на концах которого функция $f(x)$ меняет знак.

Процесс уточнения корня заканчивается, когда расстояние между очередными приближениями станет меньше требуемой погрешности ε вычислений:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon,$$

или когда значения функции попадут в область шума, т.е.

$$|f(x)| < \varepsilon_1.$$

Уравнение хорды в нашем случае имеет вид:

$$y(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - x) + f(a),$$

откуда для x_1 получаем:

$$x_1 = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} \cdot f(a). \quad (3.3)$$

Схема вычислений при решении трансцендентного уравнения методом хорд в основном совпадает со схемой вычислений по методу дихотомии. Метод хорд требует вдвое–втрое меньшего числа итераций, чем метод половинного деления, для отыскания корня с той же погрешностью. Однако, если функция $f(x)$ в области пересечения с осью абсцисс достаточно пологая, то очередная хорда может практически лечь на ось абсцисс, то есть полностью попасть в полосу шумов. В этой ситуации произойдет сильное увеличение ошибки вычислений, так как в формуле (3.3) разность двух близких величин $f(a) - f(b)$ стоит в знаменателе. В этом смысле метод половинного деления значительно устойчивее.

6.4. Метод касательных (метод Ньютона)

Пусть x^* есть корень уравнения $f(x) = 0$, единственный на отрезке $[a, b]$. Предположим, что каким-либо способом, например, графически определено начальное приближение x_0 к корню. В этой точке вычислим значение функции $f(x_0)$ и ее производной $f'(x = x_0)$. Значение этой производной равно $\operatorname{tg} \alpha$ (рис. 3.4) – тангенсу угла наклона соответствующей касательной к оси абсцисс.

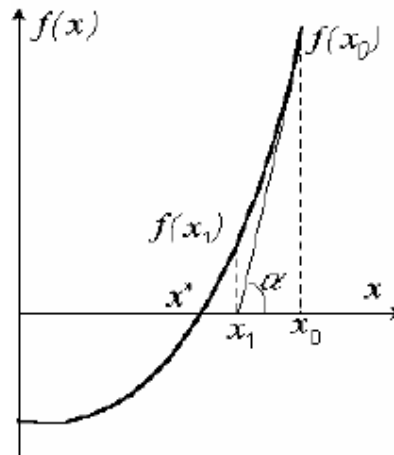


Рис. 3.4. Иллюстрация метода касательных (Ньютона)

Точка x_1 пересечения этой касательной с осью абсцисс есть следующее приближение к корню (поэтому метод Ньютона и называют методом касательных). Эта точка x_1 принимается за новое начальное приближение и процесс повторяется. Из рисунка видно, что процесс сходится к искомому корню x^* . Процесс уточнения корня закончится, когда выполнится условие

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon,$$

где ε – допустимая погрешность определения корня. Из геометрических соображений можно получить расчетную формулу для метода Ньютона в виде:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (3.4)$$

Метод Ньютона обладает высокой скоростью сходимости. Обычно абсолютная погрешность нахождения корня $\varepsilon = 10^{-5} \dots 10^{-6}$ достигается за 5 – 6 итераций. Однако существенным недостатком этого метода является необходимость вычисления производной функции на каждом шаге итерационного процесса. Это может явиться серьезным препятствием, когда функция вычисляется по очень сложному или трудоемкому алгоритму. Несколько уменьшив скорость сходимости, можно ограничиться вычислением производной только на первой итерации, а затем вести вычисления по формуле (3.4), полагая

$$f'(x_k) \approx f'(x_0):$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}.$$

Структура программы решения уравнений методом Ньютона похожа на структуру программ для методов дихотомии и хорд. Главное отличие заключается в том, что в методе Ньютона не нужно делать выбор между левой правой частями отрезка, а также в том, что нет необходимости задавать полосу шума функции, так как по разности двух последовательных приближений $x_{k+1} - x_k$ можно сразу оценивать и величину отношения $f(x)/f'(x)$. Для предотвращения возможного “зацикливания” программы в случае неудачного выбора начального приближения или неправильно заданных параметров, рекомендуется предусмотреть счетчик числа итераций.

Замечание. Отметим три особенности метода Ньютона:

1. Метод Ньютона имеет квадратичную сходимость, т.е. в отличие от метода половинного деления (и метода хорд) его погрешность на следующей итерации пропорциональна квадрату погрешности на предыдущей итерации. У метода дихотомии такая зависимость линейна.

2. Быстрая сходимость метода Ньютона гарантируется лишь при близких к точному решению начальных приближениях. Если начальное приближение выбрано неудачно, то метод может сходиться медленно, либо не сойдется вообще.

3. Если вблизи корня функция $f(x)$ пологая, то есть на очередной итерации $\operatorname{tg}(\alpha) \rightarrow 0$, возможно резкое увеличение ошибки вычислений.

6.5. Метод простых итераций (метод последовательных приближений)

От исходного трансцендентного уравнения $f(x) = 0$ тождественными алгебраическими преобразованиями перейдем к эквивалентной записи в виде

$$x = \varphi(x). \quad (3.5)$$

Выберем какое-то начальное приближение x_0 к корню x^* . Подставив его в правую часть (3.5), получим первое приближение $x_1 = \varphi(x_0)$, затем второе $x_2 = \varphi(x_1)$ и так далее:

$$x_k = \varphi(x_{k-1}). \quad (3.6)$$

Возникает вопрос о том, при каких условиях данный итерационный процесс будет сходиться к корню трансцендентного уравнения x^* . Для ответа на него проведем графический анализ, см. рисунок 3.5.

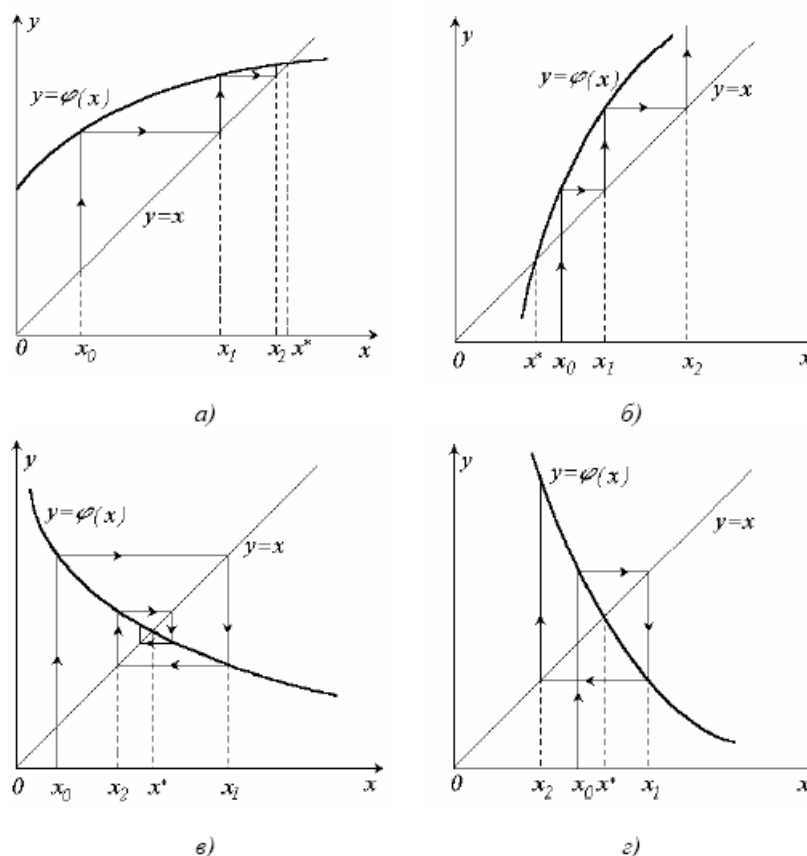


Рис. 3.5. Метод простых итераций:

- а - односторонний сходящийся процесс;
- б - односторонний расходящийся процесс;
- в - двухсторонний сходящийся процесс;
- г - двухсторонний расходящийся процесс

Из графиков видно, что при любом знаке производной $\varphi'(x)$ возможны как сходящиеся, так и расходящиеся итерационные процессы. Скорость сходимости зависит от абсолютной величины производной. Чем меньше $|\varphi'(x)|$ вблизи корня, тем быстрее сходится процесс. Более детальный математический анализ показывает, что необходимым для сходимости метода простых итераций является условие

$$|\varphi'(x)| < 1. \quad (3.7)$$

Выполнение условия (3.7) можно обеспечить путем рационального выбора вида функции $\varphi(x)$. Рассмотрим один из общих алгоритмов такого выбора.

Умножим левую и правую части уравнения $f(x)=0$ на произвольную постоянную b и добавим к обеим частям неизвестное x . При этом корни исходного уравнения не изменятся:

$$x + bf(x) = x + 0 \cdot b.$$

Введем обозначение

$$\varphi(x) = x + b \cdot f(x). \quad (3.8)$$

Произвольный выбор константы b поможет обеспечить выполнение условия сходимости. Желательно выбрать b так, чтобы

$$-1 < \varphi'(x) < 0,$$

тогда сходимость итерационного процесса будет двухсторонней (рисунок 5, в).

Если функция $\varphi(x)$ выбрана в виде (3.5), то ее производная выражается формулой

$$\varphi'(x) = 1 + b \cdot f'(x).$$

Наибольшая скорость сходимости получается при $\varphi'(x) = 0$, тогда

$$b = -\frac{1}{f'(x)}$$

и итерационная формула (3.6) метода простых итераций переходит в формулу Ньютона (4).

Пример. Уравнение

$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0 \quad (3.9)$$

имеет корень в интервале $1 < x^* < 2$, так как $f(1) = -1 < 0$ и $f(2) = 5 > 0$.

Это уравнение можно представить в виде $x = x^3 - 1$.

Здесь $\varphi(x) = x^3 - 1$, $\varphi'(x) = 3x^2$. Поэтому $\varphi'(x) \geq 3$ при $1 \leq x \leq 2$ и, следовательно, условие (3.7) сходимости процесса итераций не выполнено.

Но если записать уравнение (9) в виде

$$x = \sqrt[3]{x+1}, \quad (3.10)$$

то будем иметь

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{x+1}, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}.$$

Отсюда при $1 \leq x \leq 2$

$$0 < \varphi'(x) < 0,25,$$

значит процесс итераций для уравнения (3.10) быстро сойдется.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с теоретическими сведениями.
2. Выполнить необходимые расчеты.
3. Оформить и представить результаты расчетов.

Форма представления результата:

Результаты представить в виде отчета в формате .docx.

Критерии оценки:

Задание выполнено без ошибок – оценка «отлично».

Задание выполнено правильно, но допущены 1-3 вычислительных ошибок – оценка «хорошо».

Задание выполнено небрежно, допущены ошибки – оценка «удовлетворительно».

Задание выполнено неправильно, допущены ошибки – оценка «неудовлетворительно».

Тема 2.1. Полиномиальная интерполяция
ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ №7,8 «Интерполяция методом Лагранжа для восстановления недостающих данных. Построение полиномиальной интерполяции для реальных данных»

Цель: освоить методы интерполирования функций

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Использовать основные численные методы решения математических задач;
- Выбирать оптимальный численный метод для решения поставленной задачи
- давать математические характеристики точности исходной информации и оценивать точность полученного численного решения;
- разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата;
- распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте

Материальное обеспечение: пакет прикладных программ Microsoft Office.

Задание:

Функция определена на отрезке $[1,00; 1,20]$ (см. табл. 4.1). Найти значения многочлена Лагранжа, интерполирующего функцию $f(x)$ на этом отрезке по системе трех равномерно расположенных узлов (с шагом 0,1), в точках 1,05; 1,09 ; 1,13; 1,15; 1,17. Полученные результаты сравнить с табличными значениями и дать оценку точности интерполяции.

Таблица 4.1

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	sin x	cos x	ln x
1,00	2,7183	0,3679	1,1752	1,5431	0,8415	0,5403	0,000 0
1,01	2,7456	0,3642	1,1907	1,5549	0,8468	0,5319	0,010 0
1,02	2,7732	0,3606	1,2063	1,5669	0,8521	0,5234	0,019 8
1,03	2,8011	0,3570	1,2220	1,5790	0,8573	0,5148	0,029 6
1,04	2,8292	0,3535	1,2379	1,5913	0,8624	0,5062	0,039 2
1,05	2,8577	0,3499	1,2539	1,6038	0,8674	0,4976	0,048 8
1,06	2,8864	0,3465	1,2700	1,6164	0,8724	0,4889	0,058 3
1,07	2,9154	0,3430	1,2862	1,6292	0,8772	0,4801	0,067 7
1,08	2,9447	0,3396	1,3025	1,6421	0,8820	0,4713	0,077 0
1,09	2,9743	0,3362	1,3190	1,6552	0,8866	0,4625	0,086 2
1,10	3,0042	0,3329	1,3356	1,6685	0,8912	0,4536	0,095 3
1,11	3,0344	0,3296	1,3524	1,6820	0,8957	0,4447	0,104 4
1,12	3,0649	0,3263	1,3693	1,6956	0,9001	0,4357	0,113 3
1,13	3,0957	0,3230	1,3863	1,7093	0,9044	0,4267	0,122 2
1,14	3,1268	0,3198	1,4035	1,7233	0,9086	0,4176	0,131 0
1,15	3,1582	0,3166	1,4208	1,7374	0,9128	0,4085	0,139 8
1,16	3,1899	0,3135	1,4382	1,7517	0,9168	0,3993	0,148

							4
1,17	3,2220	0,3104	1,4558	1,7662	0,9208	0,3902	0,157 0
1,18	3,2544	0,3073	1,4735	1,7808	0,9246	0,3809	0,165 5
0,19	3,2871	0,3042	1,4914	1,7957	0,9284	0,3717	0,174 0
1,20	3,3201	0,3012	1,5095	1,8107	0,9320	0,3624	0,182 3

Краткие теоретические сведения:

В прикладных задачах часто возникает необходимость по заданным значениям некоторой функции $y_0, y_1, \dots, y_n$ в ряде точек $x_0, x_1, \dots, x_n$ предсказать ее значения в промежуточных точках. Именно эту задачу позволяет решать интерполяция функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена таблицей

x_i	x_0	x_1	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	x_n
y_i	y_0	y_1	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	y_n

Значения аргументов x_i ($i=0, 1, \dots, n$) будем называть узлами интерполяции.

Задачей интерполяции является нахождение значения функции f в точке $x^* \in [x_0, x_n]$, $x^* \neq x_i$.

Один из возможных путей решения поставленной задачи заключается в следующем:

- 1) строится многочлен степени не выше n , где $(n+1)$ - количество заданных точек

$$L_n(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot x + a_n, \quad (4.1)$$

принимаяющий в точках x_i значения y_i , т.е значения коэффициентов многочлена a_i находят из условия, что

$$L_n(x_i) = y_i, \quad (i=0, 1, \dots, n).$$

Этот многочлен называют интерполяционным. Он всегда существует и единственен.

Функция $f(x)$ представляется в виде:

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x), \quad (4.2)$$

где $R_n(x)$ - остаточный член интерполяционной формулы. Если $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка $(n+1)$ на $[x_0, x_n]$, то

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n), \quad \xi \in (x_0, x_n). \quad (4.3)$$

2) Вычисляется значение $L_n(x^*)$. Если значения y_i заданны приближенно или же по каким-либо причинам вычисления не могут быть выполнены абсолютно точно, то фактически вычисляется лишь приближенное значение $\bar{L}_n(x^*)$ для точного значения $L_n(x^*)$.

- 3) Приближенно принимается, что $f(x) \approx \bar{L}_n(x^*)$.
- 4) Оценивается погрешность метода по остаточному члену интерполяционной формулы:

$$R_n(x^*) \leq \Delta_1 = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x^* - x_0)(x^* - x_1)\dots(x^* - x_n)|, \quad (4.4)$$

$$\text{где } M_n = \left[\begin{array}{c} \max_{x \in [x_0, x_n]} \\ 0 \end{array} \right] f^{(n+1)}(x). \quad (4.5)$$

- 5) Оценивается погрешность вычислений по погрешностям приближенных данных:

$$|L_n(x^*) - \bar{L}_n(x^*)| \leq \Delta_2 \quad (4.6)$$

- 6) Вычисляется полная погрешность приближенного значения:

$$|f(x^*) - \bar{L}_n(x^*)| \leq \Delta_1 + \Delta_2 \leq \Delta \quad (4.7)$$

При решении практических задач интерполяционный многочлен (1), может быть представлен в различной форме.

4.1. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа для произвольных узлов

Функцию $L(x)$ ищем в виде суммы n частных решений.

Первое частное решение l_0 ставит в соответствие значениям абсцисс: $x_0, x_1, \dots, x_n$ набор значений ординат $y_0, 0, \dots, 0$. Из свойств многочленов следует, что многочлен, обращающийся в нуль в n разных точках, т.е. имеющий n различных корней, должен делиться на каждую из n разностей:

$$x - x_1; x - x_2; \dots x - x_n,$$

а, следовательно, и на произведение этих разностей, т.е. должен иметь вид

$$l_0 = \text{const} \cdot (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n).$$

Значение константы определяем из условия

$$l_0(x_0) = y_0 = \text{const} \cdot (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdot \dots \cdot (x_0 - x_n)$$

$$\text{const} = y_0 \cdot \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdot \dots \cdot (x_0 - x_n)}$$

тогда l_0 примет вид

$$l_0 = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdot \dots (x_0 - x_n)}.$$

Остальные частные решения ищутся аналогично, из условия, что i -ое частное решение l_i ($i=1, \dots, n$) должно ставит в соответствие значениям абсцисс: $x_0, x_1, \dots, x_n$ набор значений ординат $0, \dots, y_i, \dots, 0$, т.е.

$$l_i = y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdot \dots (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \dots (x_i - x_n)}$$

или

$$l_i = y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Общее решение найдем как сумму частных решений :

$$L(x) = \sum_{i=0}^n l_i = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad (4.8)$$

Это и есть интерполяционный многочлен в форме Лагранжа для произвольных узлов. Заметим, что степень многочлена Лагранжа не превышает числа n .

Остаточная погрешность значения $L_n(x^*)$, вычисленного по формуле (4.8), оценивается формулой (4.4), а вычислительная погрешность

$$\Delta_2 = \sum_{i=0}^n \left| \frac{(x^* - x_0)(x^* - x_1) \cdot \dots (x^* - x_{i-1})(x^* - x_{i+1}) \cdot \dots (x^* - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdot \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdot \dots (x_i - x_n)} \right| \Delta y_i, \quad (4.9)$$

где Δy_i - погрешность исходных данных (значений функций в узлах).

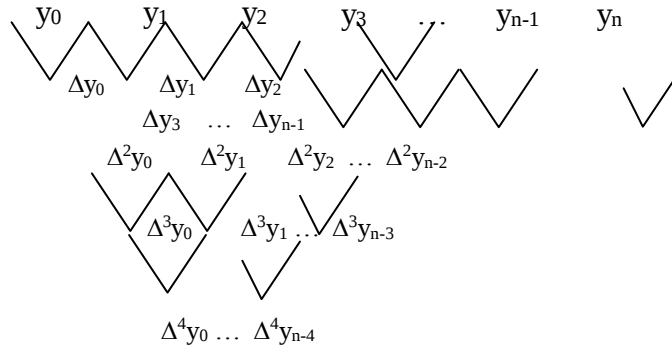
4.2. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона для равноотстоящих узлов

Рассмотрим метод построения интерполирующей функции, основанный на вычислении конечных разностей.

Конечными разностями порядка k называют величины $\Delta^k y_j$. Их рассчитывают по формулам:

$$\Delta y_j = y_{j+1} - y_j, \quad \Delta^2 y_j = \Delta y_{j+1} - \Delta y_j, \quad \dots, \quad \Delta^k y_j = \Delta^{k-1} y_{j+1} - \Delta^{k-1} y_j.$$

В результате вычислений должна быть получена следующая таблица конечных разностей:



Многочлен $P(x)$ для равноотстоящих узлов (т.е. $x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$, где $i = 0, \dots, n-1$, число h – называют шагом) будем искать в виде :

$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})$ где $x_0, x_1, \dots, x_n$ – корни полинома $P(x)$

Значения коэффициентов a_i определяем из условия $P(x_i) = y_i$:

Полагая $x = x_0$, найдем $P(x_0) = y_0 = a_0, \Rightarrow a_0 = y_0$.

Полагая $x = x_1$, найдем $P(x_1) = y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0), \Rightarrow a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}$

В общем случае при $x = x_i, \quad a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i! \cdot h^i}$.

Подставив полученные значения a_i , в выражение для многочлена $P(x)$, получим

$$P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \quad (4.10)$$

Полученное выражение называется интерполяционной формулой Ньютона.

Пусть x^* – точка, в которой необходимо найти значение интерполяционного многочлена.

Для случая равноотстоящих узлов, если x_0 – ближайший к x^* узел слева формула (4.2) примет вид

$$P^I(t) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}t(t-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!}t(t-1)(t-2) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t-1)(t-2)\dots(t-n+1), \quad (4.11)$$

где t определяется формулой $t = \frac{x^* - x_0}{h}$.

$$\Delta_2 = \Delta^* \cdot \left| 1 + 2 \cdot \left| t^* \right| + 2 \left| t^* (t^* - 1) + \dots + 2^n \frac{\Delta y_{n-1}}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} t(t+1) + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!} t(t+1)(t+2) + \dots \right| \right| \quad (4.12)$$

где Δ^* - погрешность
исходных данных.

Если x_n – ближайший к
 x^* узел справа,

то используется второй интерполяционный полином

$$P^{II} + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t+1)\dots(t+n-1),$$

где $t = \frac{x^* - x_n}{h}$.

Оценки погрешностей приближенно значения $P^{II}(t^*)$ можно записать в виде:

$$\Delta_1 = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} \cdot \left| t^* (t^* + 1) \dots (t^* + n) \right| \approx \frac{\max_{[a,b]} |\Delta^{n+1} y_i|}{(n+1)!} \left| t^* (t^* + 1) \dots (t^* + n) \right|$$

$$\Delta_2 = \Delta^* \cdot \left| 1 + 2 \cdot \left| t^* \right| + 2 \left| t^* (t^* + 1) \right| + \dots + 2^n \frac{\left| t^* (t^* + 1) \dots (t^* + n) \right|}{n!} \right|$$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с теоретическими сведениями.
2. Выполнить необходимые расчеты.
3. Оформить и представить результаты расчетов.

Форма представления результата:

Результаты представить в виде отчета в формате .docx.

Критерии оценки:

Задание выполнено без ошибок – оценка «отлично».

Задание выполнено правильно, но допущены 1-3 вычислительных ошибок – оценка «хорошо».

Задание выполнено небрежно, допущены ошибки – оценка «удовлетворительно».

Задание выполнено неправильно, допущены ошибки – оценка «неудовлетворительно».

Тема 2.2. Аппроксимация функций

ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ №9 «Применение метода наименьших квадратов для аппроксимации данных. Аппроксимация данных с использованием сплайнов».

Цель: освоить методы численного интегрирования и дифференцирования

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Использовать основные численные методы решения математических задач;
- Выбирать оптимальный численный метод для решения поставленной задачи
- давать математические характеристики точности исходной информации и оценивать точность полученного численного решения;
- разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата;
- распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте

Материальное обеспечение: пакет прикладных программ Microsoft Office.

Задание:

Теоретические сведения по данной лабораторной работе изложены в учебнике на страницах 185-190:

Шевченко, А. С. Численные методы : учебное пособие / А. С. Шевченко. — Москва : ИНФРА-М. 2022. — 381 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). — DOI 10.12737/996207. - ISBN 978-5-16-014605-8. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/996207> (дата обращения: 15.06.2025). — Режим доступа: по подписке.

Задание для лабораторной работы расположено в этом же учебнике на страницах 213-217.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с теоретическими сведениями.
2. Выполнить необходимые расчеты.
3. Оформить и представить результаты расчетов.

Форма представления результата:

Результаты представить в виде отчета в формате .docx.

Критерии оценки:

Задание выполнено без ошибок – оценка «отлично».

Задание выполнено правильно, но допущены 1-3 вычислительных ошибок – оценка «хорошо».

Задание выполнено небрежно, допущены ошибки – оценка «удовлетворительно».

Задание выполнено неправильно, допущены ошибки – оценка «неудовлетворительно».

Тема 3.1, 3.2 Алгоритмы методы численного интегрирования и дифференцирования

ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ №10, 11 «ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ».

Цель: освоить методы численного интегрирования и дифференцирования

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Использовать основные численные методы решения математических задач;
- Выбирать оптимальный численный метод для решения поставленной задачи
- давать математические характеристики точности исходной информации и оценивать точность полученного численного решения;
- разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата;
- распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте
- определять необходимые источники информации;
- взаимодействовать с коллегами, руководством, клиент
- применять техники и приемы эффективного общения в профессиональной деятельности;
- кратко обосновывать и объяснить свои действия (текущие и планируемые)

Материальное обеспечение: пакет прикладных программ Microsoft Office.

Задание:

Вычислить заданные интегралы по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона, если отрезок интегрирования разбит на $n=2$ и $n=4$ равные части. Оценить погрешность результата и сравнить приближенные значения интеграла с точными.

$$1. \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \quad (I = \frac{\pi}{4} \approx 0.785).$$

$$2. \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \quad (I = \ln 2 \approx 0.693).$$

$$3. \int_0^{\pi/4} \sin 4x dx \quad (I = 0.5).$$

$$4. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad (I = \ln(1+\sqrt{2}) \approx 0.881).$$

$$5. \int_1^e \ln x dx \quad (I = 1).$$

$$3. \int_0^1 \ln(x+1) dx \quad (I = 2\ln 2 - 1 \approx 0.386).$$

$$7. \int_0^{\pi/2} x \cos x dx \quad (I = \frac{\pi}{2} \approx 0.571).$$

$$8. \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x} dx \quad (I = 1).$$

$$1 \quad e^x \quad \pi$$

2. Функция $f(x)$ (см. таблицу 2.1) определена на отрезке $[1; 1.2]$. Выбрав шаг $h=0,5$ найти приближенные значения производных

$f'(x)$

и $f'(x)$

в точках 1 и 1,1. Оценить погрешность вычислений. Сравнить результаты с точными значениями производных в этих точках.

Краткие теоретические сведения:

Колдаев, В. Д. Численные методы и программирование : учебное пособие / В.Д. Колдаев ; под ред. Л.Г. Гагариной. — Москва : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2022. — 336 с. — (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-8199-0779-5. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/1794612> (дата обращения: 15.06.2025). – Режим доступа: по подписке.

Страницы 163-175

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с теоретическими сведениями.
2. Выполнить необходимые расчеты.
3. Оформить и представить результаты расчетов.

Форма представления результата:

Результаты представить в виде отчета в формате .docx.

Критерии оценки:

Задание выполнено без ошибок – оценка «отлично».

Задание выполнено правильно, но допущены 1-3 вычислительных ошибок – оценка «хорошо».

Задание выполнено небрежно, допущены ошибки – оценка «удовлетворительно».

Задание выполнено неправильно, допущены ошибки – оценка «неудовлетворительно».

Т е м ы 4.1, 4.2 Численные методы решения дифференциальных уравнений

ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ №12,13 «ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Цель: освоить методы численного решения дифференциальных уравнений

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Использовать основные численные методы решения математических задач;
- Выбирать оптимальный численный метод для решения поставленной задачи
- давать математические характеристики точности исходной информации и оценивать точность полученного численного решения;
- разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата;
- распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте

Материальное обеспечение: пакет прикладных программ Microsoft Office.

Задание:

I. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка на равномерной сетке отрезка $[a;b]$ один раз с шагом $h=0,2$, другой с шагом $h=0,1$ методами Эйлера, Эйлера-Коши и классическим методом Рунге-Кутты. Оценить погрешность численного решения по принципу Рунге. Сравнить численное решение с точным $\varphi(x)$. Результаты представить в виде таблицы.

1. $y' = \frac{1+xy}{x^2}, \quad y|_{x=1} = 0, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right).$

2. $y' = y - \frac{2x}{y}, \quad y|_{x=0} = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \varphi(x) = \sqrt{2x+1}.$

3. $y' = x + \frac{3y}{x}, \quad y|_{x=1} = 0, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad \varphi(x) = x^2(x-1).$

4. $y' = xy, \quad y|_{x=0} = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \varphi(x) = e^{x^2/2}.$

5. $y' = \frac{y^2 + xy}{x^2}, \quad y|_{x=1} = 1, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad \varphi(x) = x/(1 - \ln x).$

3. $y' = \frac{1-y+\ln x}{x}, \quad y|_{x=1} = 0, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad \varphi(x) = \ln x.$

7. $y' = \frac{x+y}{x}, \quad y|_{x=1} = 0, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad \varphi(x) = x \ln x.$

8. $y' + 2xy = xe^{-x^2}, \quad y|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-x^2}.$

9. $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad y|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \varphi(x) = \sin x + e^{-\sin x} - 1.$

10. $y' + y \tan x = \sin 2x, \quad y|_{x=0} = -1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \varphi(x) = (1 - 2 \cos x) \cos x.$

11. $xy' - y^2 \ln x + y = 0, \quad y|_{x=1} = 1, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad \varphi(x) = 1/(1 + \ln x).$

12. $xy' = x + y + xe^{y/x}, \quad y|_{x=1} = 0, \quad 1 \leq x \leq 1.9, \quad \varphi(x) = x \ln \frac{x}{2-x}.$

13. $x^2 y' - y = x^2 e^{\frac{x-1}{x}}, \quad y|_{x=1} = 1, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad \varphi(x) = e^{\frac{x^2-1}{x}}.$
14. $(x^2 + 1)y' + xy - 1 = 0, \quad y|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \varphi(x) = \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}}.$
15. $xy' - y = \frac{x}{\ln x}, \quad y|_{x=e} = 0, \quad e \leq x \leq e+1, \quad \varphi(x) = x \ln \ln x.$
13. $xy' - y = x^2 \sin x, \quad y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 1, \quad \varphi(x) = \frac{\sin x - 1}{x} - \cos x.$
17. $y' + e^{x-y} = e^{x(1-x)} + 2x, \quad y|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \varphi(x) = x^2.$
18. $y' + e^{x-y} = e^{x(1-x)}, \quad y|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \varphi(x) = x^2.$
19. $xy' = y \ln y, \quad y|_{x=1} = e, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad \varphi(x) = e^x.$
20. $xy' - y \ln(xy) - 1 = 0, \quad y|_{x=1} = e, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad \varphi(x) = e^x/x.$
21. $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y, \quad y|_{x=1} = \frac{\pi}{2}, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad \varphi(x) = 2x \operatorname{arctg} x.$
22. $x^2 y' = (x-1)y, \quad y|_{x=1} = e, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad \varphi(x) = xe^{1/x}.$
23. $(x^2 + 1)y' + xy = x(x^2 + 1), \quad y|_{x=\sqrt{2}} = 1, \quad \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} + 1, \quad \varphi(x) = \frac{x^2 + 1}{3}.$
24. $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x, \quad y|_{x=e} = \frac{e^2}{2}, \quad e \leq x \leq e+1, \quad \varphi(x) = \frac{x^2}{2} \ln x.$
25. $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x, \quad y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 1, \quad \varphi(x) = (x - \frac{\pi}{2}) \sin x.$

II. Задачу Коши для данного дифференциального уравнения второго порядка преобразовать к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка. Найти решение последней задачи методом Рунге–Кутты на сетке отрезка $[a; b]$. Вычисления провести дважды с шагами $h, h/2$, полагая $h = 0,2$. Найти численное решение дифференциального уравнения и оценить его погрешность с помощью правила Рунге. Сравнить решение с известным аналитическим решением $\varphi(x)$. Результаты представить в виде таблицы.

1. $xy' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0, \quad y|_{x=1} = e^2, \quad y'|_{x=1} = 2e^2, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad \varphi(x) = e^{2x}.$
2. $x^2 y' + xy' - y = 3x^2, \quad y|_{x=1} = 1, \quad y'|_{x=1} = 1, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - x + \frac{1}{x}).$
3. $x^2 y' - 6y = 0, \quad y|_{x=1} = 1, \quad y'|_{x=1} = 3, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad \varphi(x) = x^3.$

Краткие теоретические сведения:

Колдаев, В. Д. Численные методы и программирование : учебное пособие / В.Д. Колдаев ; под ред. Л.Г. Гагариной. — Москва : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2022. — 336 с. — (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-8199-0779-5. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/1794612> (дата обращения: 15.06.2025). – Режим доступа: по подписке.

Страницы 134-146

0

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с теоретическими сведениями.
2. Выполнить необходимые расчеты.
3. Оформить и представить результаты расчетов.

Форма представления результата:

Результаты представить в виде отчета в формате .docx.

Критерии оценки:

Задание выполнено без ошибок – оценка «отлично».

Задание выполнено правильно, но допущены 1-3 вычислительных ошибок – оценка

«хорошо».

Задание выполнено небрежно, допущены ошибки – оценка «удовлетворительно».

Задание выполнено неправильно, допущены ошибки – оценка «неудовлетворительно».

Т е м ы 5.1, 2.2 Численные методы для оптимизации
ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ №14,15 «Реализация метода градиентного спуска для оптимизации функций. Применение стохастического градиентного спуска для больших наборов данных»

Цель: освоить методы численного решения дифференциальных уравнений

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Использовать основные численные методы решения математических задач;
- Выбирать оптимальный численный метод для решения поставленной задачи
- давать математические характеристики точности исходной информации и оценивать точность полученного численного решения;
- разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата;
- распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте

Материальное обеспечение: пакет прикладных программ Microsoft Office.

Задание:

Колдаев, В. Д. Численные методы и программирование : учебное пособие / В.Д. Колдаев ; под ред. Л.Г. Гагариной. — Москва : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2022. — 336 с. — (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-8199-0779-5. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/1794612> (дата обращения: 15.06.2025). – Режим доступа: по подписке.
Страницы 278-282

Краткие теоретические сведения:

Колдаев, В. Д. Численные методы и программирование : учебное пособие / В.Д. Колдаев ; под ред. Л.Г. Гагариной. — Москва : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2022. — 336 с. — (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-8199-0779-5. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/1794612> (дата обращения: 15.06.2025). – Режим доступа: по подписке.

Страницы 191-220

0

Порядок выполнения работы:

4. Ознакомиться с теоретическими сведениями.
5. Выполнить необходимые расчеты.
6. Оформить и представить результаты расчетов.

Форма представления результата:

Результаты представить в виде отчета в формате .docx.

Критерии оценки:

Задание выполнено без ошибок – оценка «отлично».

Задание выполнено правильно, но допущены 1-3 вычислительных ошибок – оценка «хорошо».

Задание выполнено небрежно, допущены ошибки – оценка «удовлетворительно».

Задание выполнено неправильно, допущены ошибки – оценка «неудовлетворительно».