

*Приложение 2.23.1к ОПОП по специальности
09.02.13 Интеграция решений с применением
технологий искусственного интеллекта*

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Многопрофильный колледж

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

ОП.01 ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

для обучающихся специальности

09.02.13 Интеграция решений с применением технологий искусственного интеллекта

Магнитогорск, 2025

ОДОБРЕНО

Предметно-цикловой комиссией
«Информатики и вычислительной
техники»
Председатель Т.Б. Ремез
Протокол № 5.1 от «17» февраля 2025г.

Методической комиссией МпК

Протокол № 3 от «19» февраля 2025г.

Разработчик:

преподаватель отделения №2 «Информационных технологий и транспорта»
Многопрофильного колледжа ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»

Елена Александровна Васильева

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Элементы высшей математики».

Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 09.02.13 Интеграция решений с применением технологий искусственного интеллекта и овладению общими компетенциями.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ	4
2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ	5
Практическое занятие № 1	5
Практическое занятие № 2	10
Практическое занятие № 3	16
Практическое занятие № 4	18
Практическое занятие № 5	21
Практическое занятие № 6	23
Практическое занятие № 7	28
Практическое занятие № 8	33
Практическое занятие № 9	37
Практическое занятие № 10	40
Практическое занятие № 11	43
Практическое занятие № 12	46
Практическое занятие № 13	50
Практическое занятие № 14	53

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки студентов составляют практические занятия.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование практических умений (умений решать задачи по математике), необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Элементы высшей математики» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

У1. Исследовать функции на непрерывность, дифференцировать и интегрировать функции одной переменной.

У2. Строить математические модели, решать системы линейных алгебраических уравнений разными методами.

У3. Применять SVD для анализа многомерных данных и уменьшения размерности данных в задачах машинного обучения.

Уо 01.02 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;

Уо 01.03 определять этапы решения задачи;

Уо 01.04 составлять план действий;

Уо 01.06 реализовать составленный план;

Уо 01.08 оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника);

Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и **формированию профессиональных и общих компетенций:**

ПК1.1 Формировать алгоритмы разработки программных модулей в соответствии с техническим заданием.

ПК3.3 Проводить обучение и последующую калибровку готовых моделей искусственного интеллекта.

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

Выполнение обучающимися практических работ по учебной дисциплине «Элементы высшей математики» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;

- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;

- формирование и развитие умений: наблюдать, сравнивать, сопоставлять, анализировать, делать выводы и обобщения;

- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1. Пределы и непрерывность функций

Практическое занятие № 1

Вычисление пределов функций в точке и на бесконечности. Определение типов разрывов функций. Анализ непрерывности функций на интервале

Цель: Научиться вычислять пределы функций. Научиться находить точки разрыва функций, определять их род, находить асимптоты графиков функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- исследовать функции на непрерывность;
- находить точки разрыва, определять их род;
- находить асимптоты;
- вычислять пределы функций, используя теоремы о пределах;
- раскрывать неопределенности;
- находить пределы функций, используя формулы замечательных пределов.

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций, таблица производных.

Задание 1:

Вычислить пределы функций:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - 10x^2 - 4x + 5)$
2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^3 - 5x^2 - 6x + 10}{6x^4 - 8x^2 + 2}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x}$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{5x}$

Краткие теоретические сведения:

Раскрытие неопределенностей различных типов

Для того чтобы найти предел элементарной функции, когда аргумент стремится к значению, принадлежащему области определения этой функции, нужно в выражение функции вместо аргумента подставить его предельное значение.

Далеко не всякая подстановка предельного значения в функцию вместо независимой переменной может сразу привести к нахождению предела. Случаи, в которых подстановка предельного значения в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $\left(\frac{0}{0}\right)$, $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$, (1^∞) , (∞^0) , (0^0) . Рассмотрим несколько типов примеров, классифицируя их по виду неопределенности и предельному значению x .

1-й тип. Рассмотрим примеры вида $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ с неопределенностью вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ в общем случае – сложные степенные или показательные функции. В случае степенных функций

необходимо выносить за скобку в числителе и в знаменателе дроби x с наибольшим показателем степени среди всех слагаемых дроби; в случае показательных функций за скобку выносятся наиболее быстро возрастающее слагаемое среди всех слагаемых дроби. После сокращения дроби неопределенность устраняется.

Полезно запомнить правило:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} 0, & \text{если } n < m, \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{если } n = m, \\ \infty, & \text{если } n > m. \end{cases}$$

2-й тип. Рассмотрим примеры вида $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ с неопределенностью вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. В этом случае необходимо разложить на множители и числитель, и знаменатель дроби или домножить и числитель, и знаменатель дроби на одно и то же выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения. После сокращения дроби неопределенность устраняется.

3-й тип. Рассмотрим примеры с неопределенностью вида $(\infty - \infty)$. Если функция, стоящая под знаком предела, представляет собой алгебраическую сумму дробей, то неопределенность устраняется или приводится к 2-му типу после приведения дробей к общему знаменателю. Если упомянутая функция представляет собой алгебраическую сумму иррациональных выражений, то неопределенность устраняется или приводится к 1-му типу путем домножения и деления функции на одно и то же (сопряженное) выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения.

Замечательные пределы.

Первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел (число e): $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ или $\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$.

Для того что бы избавиться от неопределенности вида (1^∞) , необходимо выделить целую часть дроби (которая должна быть равна 1) в выражении, стоящем под знаком предела, которое представляет собой степенно-показательную функцию. Неопределенность устраняется при помощи выделения второго замечательного предела.

Например:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 0)^\infty = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{k}\right)}\right)^{k \cdot \frac{x}{k}} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{ky} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \right]^k = e^k;$$

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^n = (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}} \right]^4 = e^{\frac{4}{n} \cdot n} = e^4;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{4n}\right)^{n+2} = (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{3}{4n}\right)^{\frac{4n}{3}} \right]^{\frac{3}{4n}(n+2)} = e^{\frac{3(n+2)}{4n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{4n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n}{n} + \frac{2}{n}}{4}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+0}{4}} = e^{\frac{3}{4}};$$

;

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x; \text{ Данный предел можно вычислить двумя способами:}$$

1 способ:

Разделим числитель на знаменатель выделив целую часть:

$$\frac{x+3}{x-2} \Big| \frac{x-2}{1} \Rightarrow \frac{x+3}{x-2} = 1 + \frac{5}{x-2};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x-2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{5}{x-2} \right)^{\frac{x-2}{5}} \right]^{\frac{5}{x-2} \cdot x} = e^{\frac{5x}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x}{x}}{\frac{x-2}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{1-\frac{2}{x}}} = e^5;$$

2 способ:

Поделив числитель и знаменатель дроби на x , сведем данный предел к частному пределов:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{x}{x} + \frac{3}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{2}{x}} \right)^x = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^x} = \frac{e^3}{e^{-2}} = e^5.$$

Пределы от некоторых тригонометрических функций необходимо решать применяя первый замечательный предел или закон эквивалентных величин при условии $x \rightarrow 0$.

Эквивалентными называются бесконечно малые величины, предел от понятия которых равен единице.

Порядок выполнения работы:

1. Найдите предел функции, используя теоремы о пределах.
2. Если получилась неопределенность, определите ее вид и способ раскрытия.
3. Преобразуйте функцию и раскройте неопределенность.
4. Вычислите предел.

Задание 2:

Найти предел функции:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - 10x^2 - 4x + 5)$$

Используем теоремы о пределах:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - 10x^2 - 4x + 5) \\ = 2 \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right)^3 - 10 \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right)^2 - 4 \lim_{x \rightarrow 2} x + 5 = 2 \cdot 8 - 10 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 5 = -27 \end{aligned}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$$

Функция представляет собой отношение двух многочленов, обращающихся в нуль в точке $x = 3$. Поэтому сначала преобразуем данную функцию.

Любой квадратный трехчлен можно разложить на множители с помощью формулы

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \text{ где } x_1 \text{ и } x_2 \text{ корни квадратного трехчлена.}$$

Корнями квадратного трехчлена $3x^2 - 11x + 6$ являются числа $\frac{2}{3}$ и 3; значит

$$3x^2 - 11x + 6 = 3\left(x - 3\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

А корни квадратного трехчлена $2x^2 - 5x - 3$ равны $\frac{1}{2}$ и 3, следовательно

$$2x^2 - 5x - 3 = 2(x - 3)(x + \frac{1}{2})$$

Возвращаясь к пределу, имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x-3)(x-\frac{2}{3})}{2(x-3)(x+\frac{1}{2})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x-\frac{2}{3})}{2(x+\frac{1}{2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x-2}{2x+1} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 3} x - 2}{2 \lim_{x \rightarrow 3} x + 1} = \frac{3 \cdot 3 - 2}{2 \cdot 3 + 1} = \frac{7}{7} = 1 \end{aligned}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^3 - 5x^2 - 6x + 10}{6x^4 - 8x^2 + 2}$$

Так как многочлены в числителе и знаменателе стремятся к ∞ , то получаем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для ее раскрытия разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^4 . Тогда получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^3 - 5x^2 - 6x + 10}{6x^4 - 8x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{11x^3}{x^4} - \frac{5x^2}{x^4} - \frac{6x}{x^4} + \frac{10}{x^4}}{\frac{6x^4}{x^4} - \frac{8x^2}{x^4} + \frac{2}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{11}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3} + \frac{10}{x^4}}{6 - \frac{8}{x^2} + \frac{2}{x^4}} = \frac{0}{6} = 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x}$$

Чтобы вычислить предел функции, нужно воспользоваться формулой первого замечательного предела: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Умножим числитель и знаменатель дроби на $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}}{\frac{1}{2} x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{5x}$$

Преобразуем функцию так, чтобы можно было применить второй замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. Введем новую переменную: $x = -3y; x \rightarrow \infty; y \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{5x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{-3y}\right)^{5 \cdot (-3y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{-15y} = e^{-15} = \frac{1}{e^{15}}$$

Задание 3:

Исследовать функции на непрерывность. Найти точки разрыва и определить их род. Найти асимптоты функций.

$$1) y = \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 9};$$

$$2) y = \frac{2x^2 - 4x - 30}{x^2 - 25}.$$

Краткие теоретические сведения:

Точками разрыва функции называются точки, в которых нарушается условие непрерывности функции.

Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода.

Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва первого рода* функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа, т.е.

$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A_1$ и $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A_2$. При этом: если $A_1 = A_2$, то точка x_0 называется точкой

устраняемого разрыва; если $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 называется точкой конечного разрыва.

Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва второго рода* функции $y = f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x; f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ равно $-\infty$ или $+\infty$.

Замечание. Прямая $x = a$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = a$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ равно b .

Замечание. График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции, если $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - kx - b| = 0$

Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \rightarrow \infty$.

Порядок выполнения работы:

1. Найти область определения функции и выявить точки разрыва.
2. Найти асимптоты функции.

Задание 4:

Исследовать функцию на непрерывность. Найти асимптоты функции.

$$y = \frac{x^2}{2x-2}.$$

Область определения функции $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

Точка $x = 1$ является точкой разрыва 2 рода, т.к.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2}{2x-2} = \left[\frac{1}{0} \right] = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2}{2x-2} = \left[\frac{1}{0} \right] = +\infty$$

Прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2x-2)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{2x-2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

Конечный вид прямой следующий

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

- «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.2. Производная и её применение

Практическое занятие № 2

Вычисление производных для элементарных и составных функций. Исследование функций с помощью производных (нахождение экстремумов и точек перегиба)

Цель работы: Научиться вычислять производные и исследовать функции и строить графики функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- проводить исследование функций с помощью производной;
- строить графики функций.

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций, таблица производных.

Задание 1:

Найти производные функций

1. $y = (5x^3 - 2x)^6$

2. $f(x) = 3 \sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3. $f(x) = \arcsin 4x + \arccos x^2$
4. $f(x) = \log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$
5. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Порядок выполнения работы:

1. Определите вид функции. Если функция является сложной, то введите промежуточный аргумент.
2. Определите, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Примените соответствующее правило.
3. Используя таблицу производных, найдите производные функций.
4. Раскройте скобки и приведите подобные, если это упростит запись функции.

Задание 2:

Найти производные функций:

$$1. \quad g(x) = (1 - 4x^2)^{10}$$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u = 1 - 4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$$y' = 10(1 - 4x^2)^9 \cdot (1 - 4x^2)' = 10(1 - 4x^2)^9(-8x) = -80x(1 - 4x^2)^9$$

$$2. \quad f(x) = \sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = (\sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (\sin \frac{1}{2}x)' \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x (\cos 2x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$, $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (\sin \frac{1}{2}x)' \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x (\cos 2x)' \\ &= \cos \frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)' = \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x - 2 \sin \frac{1}{2}x \cdot \sin 2x. \end{aligned}$$

$$3. \quad y = \frac{2^{3x+5x^2}}{\log_2(3+10x)}$$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = 3x + 5x^2$, для второй функции $u = 3 + 10x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$.

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} = \frac{2^{3x+5x^2} \ln 2 (3x+5x^2)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \frac{1}{(3+10x) \ln 2} (3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} =$$

$$\frac{2^{3x+5x^2} \ln 2 (3+10x) \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \frac{10}{(3+10x) \ln 2}}{(\log_2(3+10x))^2}$$

$$4. f(x) = \arcsin \frac{3}{5}x + \arccos 5x$$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U + V)' = U' + V'$.

$$f'(x) = \left(\arcsin \frac{3}{5}x \right)' + (\arccos 5x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = \frac{3}{5}x$, для второй функции $u = 5x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$$f'(x) = \left(\arcsin \frac{3}{5}x \right)' + (\arccos 5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{5}x)^2}} \left(\frac{3}{5}x \right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}} (5x)' = \frac{3}{5 \sqrt{1-\frac{9}{25}x^2}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

$$5. f(x) = \arccos \sqrt{1 - e^{2x}}$$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент $u = \sqrt{1 - e^{2x}}$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f'(x) = (\arccos \sqrt{1 - e^{2x}})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1 - e^{2x}})'$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент $u = 1 - e^{2x}$.

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$f'(x) = (\arccos \sqrt{1 - e^{2x}})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1 - e^{2x}})' = -\frac{1}{\sqrt{1-1+e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot (1 - e^{2x})' =$$

$$-\frac{1}{e^x} \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} (-2e^x) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

Задание 3:

Исследовать функцию по общей схеме и построить ее график:

$$1. f(x) = 5x^3 - 3x^5.$$

$$2. f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}.$$

Краткие теоретические сведения:

Общая схема исследования функций.

1. Найти область определения функции $D(y)$.
2. Найти (если это не вызывает затруднений) точки пересечения графика с осями координат (при $x = 0$ и при $y = 0$).
3. Исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность.
4. Найти интервалы монотонности, точки экстремумов и значения функции в этих точках.
5. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика функции.
6. Найти асимптоты графика функции.
7. Найти дополнительные точки и построить график по результатам исследования.
8. Найти область значений.

Алгоритм нахождения экстремумов функции и интервалов ее монотонности с помощью первой производной

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.
2. Найти производную функции $f'(x)$.
3. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.
4. Исследовать характер изменения функции $f(x)$ и знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$.
5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

Помни: критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x) < 0$, от промежутка, в котором $f'(x) > 0$, и точка максимума - в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0 , знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

6. Вычислить значения функции в точках экстремума.
7. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

Алгоритм нахождения выпуклостей функции и точек перегиба:

1. Находим вторую производную.
2. Находим точки, в которых $f''(x) = 0$ или не существует.
3. Исследуем знак второй производной слева и справа от найденных точек и делаем вывод об интервалах выпуклости и о наличии точек перегиба.
4. Находим значение функции в точках перегиба.

Асимптоты.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x; f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ равно $-\infty$ или $+\infty$.

Замечание. Прямая $x = a$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = a$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ равно b .

Замечание. График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$,

если $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - kx - b| = 0$

Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \rightarrow \infty$.

Порядок выполнения работы:

1. Провести анализ заданной функции по общей схеме.

Задание 4:

Исследовать функцию и построить ее график.

$$y = \frac{x^2}{2x-2}.$$

1. Область определения функции $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$
2. При подстановке значения $x = 0$ получим $y(0) = 0$.

Такую же точку получим, если приравняем функцию к нулю. Точка $x = 0$ - единственная точка пересечения с осями координат.

3. Проверяем функцию на четность

$$y(-x) = \frac{(-x)^2}{-2x-2} = -\frac{x^2}{2x+2}.$$

$$y(-x) \neq y(x); y(-x) \neq -y(x).$$

Итак, функция ни четная, ни нечетная, непериодическая.

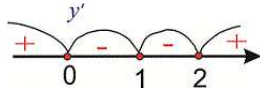
4. Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную функции

$$y' = \frac{2x(2x-2) - x^2 \cdot 2}{(2x-2)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2}{(2x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(2x-2)^2}$$

Приравнявая ее к нулю, получим критические точки $x = 0; x = 2$. Они разбивают область определения на следующие интервалы монотонности $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения.

Графически интервалы монотонности будут иметь вид



Исследуемая функция возрастает на интервалах $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ и убывает $(0; 1) \cup (1; 2)$.

5. Точка $x = 0$ точка локального максимума, $x = 2$ – локального минимума. Найдем значение функции $y_{\max} = 0; y_{\min} = 2$.

6.. Для отыскания интервалов выпуклости найдем вторую производную

$$y'' = \frac{(4x-4)(2x-2)^2 - (2x^2-4x) \cdot 2(2x-2) \cdot 2}{(2x-2)^4} = \frac{8}{(2x-2)^3} = \frac{8}{8(x-1)^3} = \frac{1}{(x-1)^3}$$

Таких интервалов нет, поскольку вторая производная не принимает нулевых значений в области определения.

7. Прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$.

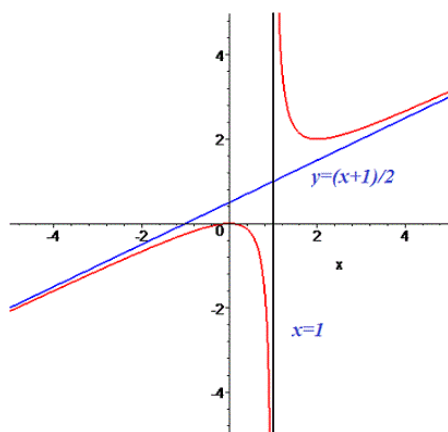
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2x-2)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{2x-2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

Конечный вид прямой следующий

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

8. На основе проведенного анализа выполняем построение графика функции. Для этого сначала строим вертикальные и наклонные асимптоты, затем находим значение функции в нескольких точках и по ним проводим построение.



Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

- «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Практическое занятие № 3

Применение частных производных в многомерных функциях

Цель работы: формирование умений вычислять частные производные и дифференциалы функций нескольких переменных.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять частные производные функций нескольких переменных;
- вычислять дифференциалы функций нескольких переменных.

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание 1:

1. Найти частные производные функций: а) $z = e^{x-y} \cdot (2x - 1)$; б) $z = xe^y + x^y$;

в) $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

2. Найти частные производные второго порядка функции двух переменных

$$z = \sin(x + \sqrt{y}).$$

3. Найти дифференциал функции двух переменных $z = \ln(1 + e^x + y^2)$.

Краткие теоретические сведения:

Пусть имеется n переменных величин, и каждому набору их значений $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из некоторого множества X соответствует одно вполне определенное значение переменной величины z . Тогда говорят, что задана *функция нескольких переменных* $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются *независимыми переменными* или *аргументами*, z – *зависимой переменной*, а символ f означает *закон соответствия*. Множество X называется *областью определения функции*.

Частной производной функции $z = f(x, y)$ по x называют производную функции $z = f(x, y)$ по x при фиксированной переменной y и обозначают $f'_x(x, y)$.

Частная производная функции $z = f(x, y)$ по y при фиксированной переменной x обозначается $f'_y(x, y)$.

Для частных производных используют также обозначения $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Частные производные второго порядка определяются следующим образом: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения независимых переменных $dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y$ или $dz = z'_x dx + z'_y dy$ или $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$.

Порядок выполнения работы:

1. Проанализировать условие задачи.
2. Выполнить решение, применяя необходимые формулы.
3. Записать ответ.

Задание 2:

1. Найти частные производные функций: а) $z = x^3 y^5 + 5x^2 - 3y + 1$; б) $z = x^2 e^{y^2}$; в) $z = x \ln y + \frac{y}{x}$.

Решение. а) При дифференцировании по x считаем постоянной величиной y . Таким образом, $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^5 + 10x$. При дифференцировании по y считаем постоянной величиной x , следовательно, $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 5x^3 y^4 - 3$.

б) При дифференцировании по x считаем постоянной величиной y . Таким образом, $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 2x e^{y^2}$. При дифференцировании по y считаем постоянной величиной x , следовательно, $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 e^{y^2} \cdot 2y = 2x^2 y e^{y^2}$.

в) При дифференцировании по x считаем постоянной величиной y . Таким образом, $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \ln y + y \left(\frac{1}{x} \right)' = \ln y - \frac{y}{x^2}$. При дифференцировании по y считаем постоянной величиной x , следовательно,

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = x(\ln y)' + \frac{1}{x} \cdot y' = \frac{x}{y} + \frac{1}{x}.$$

2. Найти частные производные второго порядка функции двух переменных $z = \ln(1+x+2y)$.

Решение. Частные производные первого порядка имеют вид: $z'_x = \frac{1}{1+x+2y}$, $z'_y = \frac{2}{1+x+2y}$. Считая их новыми функциями двух переменных, найдем их частные производные. Получаем:

$$z''_{xx} = \frac{1}{(1+x+2y)^2}, \quad z''_{xy} = -\frac{2}{(1+x+2y)^2}, \quad z''_{yy} = -\frac{4}{(1+x+2y)^2}.$$

3. Найти дифференциал функции двух переменных $z = x^2y - y^3x$.

Решение. Частные производные первого порядка имеют вид: $z'_x = 2xy - y^3$ и $z'_y = x^2 - 3y^2x$. Следовательно, $dz = (2xy - y^3)dx + (x^2 - 3y^2x)dy$.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

- «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 1.3. Интегралы и их применение

Практическое занятие № 4

Вычисление неопределённых интегралов с использованием метода подстановки.

Применение метода интегрирования по частям для нахождения интегралов

Цель работы: Научиться интегрировать функции, используя различные методы интегрирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить неопределённые интегралы методом непосредственного интегрирования, методом подстановки;
- находить неопределённые интегралы методом интегрирования по частям.

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание 1:

Найдите неопределенные интегралы:

1) $\int (8x^4 - 6x^2 + 2x - 3) dx$

2) $\int \frac{3x^4 + 2x^2 - 3x + 7}{x^2} dx$

3) $\int \cos(10x - 5) dx$

4) $\int 3^{4x^2} x dx$

5) $\int \frac{5dx}{25 + 16x^2}$

6) $\int \frac{x^2 dx}{(1 - 2x^3)^2}$

7) $\int \frac{2x^4 - 4x^2 - 3x - 1}{\sqrt[3]{x}} dx$

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, приведите интеграл к табличным формулам. Проинтегрируйте.
3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то введите новую переменную, найдите ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Найдите полученный интеграл. В случае неопределенного интеграла вернитесь к старой переменной.
4. Если интеграл нельзя найти вышеуказанными способами, то примените формулу интегрирования по частям $\int U dV = UV - \int V dU$. Этот метод заключается в том, что подынтегральное выражение представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей U и dV . Затем, после нахождения dU и V , используйте формулу интегрирования по частям.

-Интегралы вида $\int P(x)e^{kx} dx$, $\int P(x)\sin kx dx$, $\int P(x)\cos kx dx$, где $P(x)$ - многочлен, k - число.

Удобно положить $U = P(x)$, а все остальные множители принять за dV .

-Интегралы вида $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$, $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arctg x dx$, $\int P(x)\operatorname{arccotg} x dx$.

Удобно положить $P(x)dx = dV$, а остальные множители принять за U .

- Интегралы вида $\int e^{ax} \sin bx dx$, $\int e^{ax} \cos bx dx$, где a и b числа. За U можно принять функцию $U = e^{ax}$.

Ход работы: Найти интегралы:

1) $\int \frac{6x^4 - 5x^2 + 3x + 4}{x^2} dx$

Чтобы найти этот интеграл, нужно сначала привести подынтегральное выражение к табличному виду. Для этого применяем почленное деление:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{6x^4 - 5x^2 + 3x + 4}{x^2} dx \\
&= \int \left(\frac{6x^4}{x^2} - \frac{5x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{4}{x^2} \right) dx \\
&= \int \left(6x^2 - 5 + \frac{3}{x} + 4x^{-2} \right) dx \\
&= 6 \int x^2 dx - 5 \int dx \\
&+ 3 \int \frac{dx}{x} + 4 \int x^{-2} dx = \frac{6x^3}{3} - 5x + 3 \ln|x| + \frac{4x^{-1}}{-1} + C = 2x^3 - 5x + 3 \ln|x| - \frac{4}{x} + C
\end{aligned}$$

$$2) \int \frac{15x^2 dx}{(1-x^3)^4}$$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int \frac{15x^2 dx}{(1-x^3)^4} = \left[\begin{array}{l} 1-x^3 = t \\ d(1-x^3) = dt \\ -3x^2 dx = dt \\ x^2 dx = -\frac{dt}{3} \end{array} \right] = \int \frac{15dt}{-3t^4} = -5 \int t^{-4} dt = -5 \frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{5}{3t^3} + C = \frac{5}{3(1-x^3)^3} + C$$

$$3) \int (x^3 - 4x) \ln x \cdot dx$$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится ко второму виду, поэтому $U = \ln x$, $dV = (x^3 - 4x)dx$.

$$dU = \frac{1}{x} dx, \quad V = \int (x^3 - 4x) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned}
& \int (x^3 - 4x) \ln x \cdot dx = \ln x \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) - \int \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \frac{1}{x} dx = \\
& \ln x \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) - \int \left(\frac{x^3}{4} - 2x \right) dx = \ln x \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) - \frac{x^4}{16} + x^2 + C
\end{aligned}$$

$$4) \int (x^2 - 2x) \cos 4x dx$$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится к первому виду, поэтому $U = x^2 - 2x$, $dV = \cos 4x dx$.

$$dU = (2x - 2) dx, \quad V = \int \cos 4x dx = \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$\begin{aligned}
& \int (x^2 - 2x) \cos 4x dx = (x^2 - 2x) \frac{1}{4} \sin 4x - \int \frac{1}{4} \sin 4x (2x - 2) dx = \\
& (x^2 - 2x) \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} \int \sin 4x (2x - 2) dx = \frac{1}{4} (x^2 - 2x) \sin 4x - \frac{1}{2} \int \sin 4x (x - 1) dx =
\end{aligned}$$

Чтобы найти оставшийся интеграл, снова применяем формулу интегрирования по частям.

$$U = x - 1, \quad dV = \sin 4x dx.$$

$$dU = dx, \quad V = \int \sin 4x dx = -\frac{1}{4} \cos 4x$$

$$= \frac{1}{4}(x^2 - 2x) \sin 4x - \frac{1}{2}((x - 1) \left(-\frac{1}{4} \cos 4x\right) - \int -\frac{1}{4} \cos 4x dx =$$

$$\frac{1}{4}(x^2 - 2x) \sin 4x - \frac{1}{2}((x - 1) \left(-\frac{1}{4} \cos 4x\right) + \frac{1}{4} \int \cos 4x dx =$$

$$= \frac{1}{4}(x^2 - 2x) \sin 4x + \frac{1}{8}((x - 1)(\cos 4x) - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx =$$

$$\frac{1}{4}(x^2 - 2x) \sin 4x + \frac{1}{8}((x - 1)(\cos 4x) - \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

Форма предоставления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Практическое занятие № 5

Вычисление определённых интегралов для расчёта площадей и объёмов. Решение задач с применением интегралов для расчёта физических величин

Цель работы: Научиться находить определенные интегралы, используя различные методы интегрирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять определенные интегралы различными методами;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

Задание 1:

Вычислите определенные интегралы:

$$1. \int_{-2}^3 (4x^3 + 3x^2 + 2x + 1) dx$$

$$1. \int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

2. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{3\sqrt{1-x^2}}$
3. $\int_{-2}^b \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x} \cos x dx$
5. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{dx}{\sin \frac{2x}{3}}$

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать. Вычислить значение определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.
3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то необходимо вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл.

1) $\int_{-1}^3 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 5) dx$

$$\int_{-1}^3 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 5) dx = 4 \int_{-1}^3 x^3 dx - 3 \int_{-1}^3 x^2 dx + 2 \int_{-1}^3 x dx + 5 \int_{-1}^3 dx = x^4 - x^3 + x^2 + 5x \Big|_{-1}^3 =$$

2) $3^4 - 3^3 + 3^2 + 5 \cdot 3 - (1 + 1 + 1 - 5) = 81 - 27 + 9 + 15 + 2 = 80$

$$\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2}$$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2} = \frac{5}{4} \int_0^{0,4} \frac{dx}{1+\frac{25}{4}x^2} = \frac{5}{4} \int_0^{0,4} \frac{dx}{1+(\frac{5}{2}x)^2} = \left[\begin{array}{l} \frac{5}{2}x = t \\ \frac{5}{2}dx = dt \\ dx = \frac{2}{5}dt \\ x_H = 0 \quad t_H = 0 \\ x_B = 0,4 \quad t_B = 1 \end{array} \right] =$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{5} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \arctg t \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (\arctg 1 - \arctg 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos^4 x}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} = \left[\begin{array}{l} \cos x = t \\ d\cos x = dt \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \\ x_H = 0 \quad t_H = \cos 0 = 1 \\ x_B = \frac{\pi}{3} \quad t_B = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{array} \right] = \int_1^{0,5} \frac{-dt}{t^3} = -\frac{t^{-2}}{-2} \Big|_1^{0,5} = \frac{1}{2t^2} \Big|_1^{0,5} = \frac{1}{2 \cdot 0,25} - \frac{1}{2} = 2 - 0,5 = 1,5$$

Форма представления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

- «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 2.1. Векторы и операции над ними**Практическое занятие № 6****Операции с векторами: сложение, вычитание и умножение на скаляр. Вычисление длины и угла между векторами. Применение скалярного и векторного произведений в задачах аналитической геометрии**

Цель: Научиться выполнять действия над векторами, вычислять угол между векторами, применять векторное и смешанное произведения для решения геометрических задач

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить проекцию вектора;
- вычислять угол между векторами;
- вычислять векторное произведение и применять его к решению задач;
- вычислять смешанное произведение и применять его для вычисления объема.

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

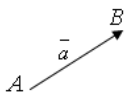
Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Дано: $\vec{a} = (3; -6; -1)$, $\vec{b} = (1; 4; -5)$, $\vec{c} = (3; -4; 12)$. Найти проекцию вектора $(\vec{a} + \vec{b})$ на вектор $\vec{c}$.
2. Даны вершины треугольника А (1; -1; 2), В (5; -6; 2) и С (1; 3; -1). Найдите длину высоты, опущенной из вершины В на сторону АС.
3. Дана пирамида с вершинами $A_1 (7; 2; 4)$, $A_2 (7; -1; -2)$, $A_3 (3; 3; 1)$, $A_4 (-4; 2; 1)$. Найдите:
 - а) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 ;
 - б) объем пирамиды;
 - в) длину высоты, опущенной на грань $A_1A_2A_3$.

Краткие теоретические сведения:

Вектором называется направленный отрезок $\overline{AB}$ с начальной точкой A и конечной точкой B . Векторы могут обозначаться: $\vec{a} = \overline{AB}$.



Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*, и обозначаются $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Векторы называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Если начало и конец вектора совпадают, например, $\overline{AA}$, то такой вектор называют *нулевым* и обозначают $\vec{0} = \overline{AA}$. Длина нулевого вектора равна нулю: $|\vec{0}| = 0$.

Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковую длину:

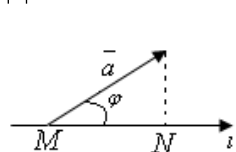
$$\vec{a} = \vec{b} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1) \vec{a} \uparrow \vec{b}; \\ 2) |\vec{a}| = |\vec{b}|. \end{cases}$$

Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, имеющий длину $|\vec{b}| = |\lambda| |\vec{a}|$, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно ему, если $\lambda < 0$.

Противоположным вектором $-\vec{a}$ называется произведение вектора $\vec{a}$ на число (-1) , т.е. $-\vec{a} = (-1) \vec{a}$.

Прямая l с заданным направлением, принимаемым за положительное, называется *осью*.

Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называется число, обозначаемое $np_l \vec{a}$ и равное $|\vec{a}| \cos \varphi$, где $\varphi \in [0, \pi]$ – угол между вектором $\vec{a}$ и положительным направлением оси l .



$$np_l \vec{a} = MN, \quad 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$np_l \vec{a} = -MN, \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi.$$

Вектор $\vec{a} = (x, y, z)$ может быть представлен в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы (орты), совпадающие с направлением осей соответственно Ox , Oy , Oz ; $|\vec{i}| + |\vec{j}| + |\vec{k}| = 1$.

Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат:

$$|\vec{a}| = |\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{или} \quad |\vec{a}| = |\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1)$$

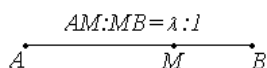
Линейные операции над векторами в координатной форме. Пусть вектор $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, тогда $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$,
 $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$,

а произведение вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ на число λ есть вектор $\vec{f} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$.

Если даны точки $M(x_1, y_1, z_1)$ и $N(x_2, y_2, z_2)$, то вектор $\overline{MN}$ будет иметь координаты:
 $\overline{MN} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны:
 $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

Деление отрезка в данном отношении. Пусть даны точки $A = (x_1, y_1, z_1)$ и $B = (x_2, y_2, z_2)$, а точка M определена условием $AM = \lambda MB$, $\lambda > 0$.



Тогда координаты x, y, z точки M определяются равенствами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

В частном случае $\lambda = 1$ и точка M будет серединой отрезка AB .

Скалярным произведением $(\vec{a}, \vec{b})$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Выразим скалярное произведение через координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{b})$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (2)$$

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины:

$$(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2. \quad (3)$$

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (4)$$

Для двух ненулевых векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ условие ортогональности имеет вид:
 $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$.

Векторное произведение векторов

Тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ с общим началом в точке O называется правой, если кратчайший поворот оси вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ со стороны вектора $\vec{c}$ осуществляется против часовой стрелки (рис. а). В противном случае тройка векторов называется левой (рис. б).

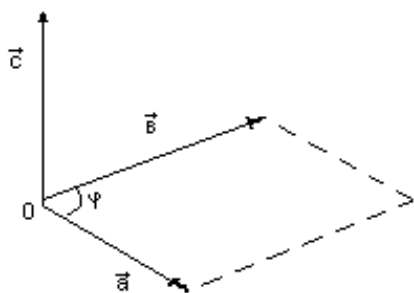


Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который удовлетворяет трем условиям:

- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$;
- 2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
- 3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – правая тройка векторов.

Модуль векторного произведения двух векторов равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

$\vec{c} \perp \vec{a}$ $\vec{c} \perp \vec{b}$ Этот вектор перпендикулярен перемножаемым векторам (перпендикулярен плоскости параллелограмма), т.е и



Векторное произведение в координатной форме

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

Длина векторного произведения равна площади параллелограмма - удвоенного треугольника, а именно произведению сторон в виде векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложенные от одной точки, на синус угла между ними $\sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется действительное число, равное скалярному произведению векторов $[\vec{a} \times \vec{b}]$ и $\vec{c}$, где $[\vec{a} \times \vec{b}]$ - векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Смешанное произведение векторов равно определителю матрицы третьего порядка, строками которой являются координаты умножаемых векторов, то есть

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = ([\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Условие компланарности трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ имеет вид:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{компланарны} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Геометрический смысл смешанного произведения состоит в следующем. Смешанное произведение трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ равно объему V параллелепипеда, построенного на этих векторах, если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - правая тройка. Если же эта тройка левая, то смешанное произведение отрицательно и равно объему параллелепипеда с противоположным знаком:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{cases} V, & \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{правая тройка;} \\ -V, & \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{левая тройка.} \end{cases}$$

$$V_{\text{параллелепипеда}} = |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|.$$

Объем тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равняется $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда. Получаем:

$$V_{\text{тетраэдра}} = \frac{1}{6} V_{\text{параллелепипеда}} = \frac{1}{6} |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|.$$

Порядок выполнения работы:

1. Проанализировать условие задачи.
2. Выполнить решение, применяя необходимые формулы.
3. Записать ответ.

Задание:

1. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, если $\vec{a} = (-1; 0; 2)$ и $\vec{b} = (3; -4; 1)$.

Решение. Для нахождения проекции вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, будем использовать формулу

$$\text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Подставляя в нее координаты векторов, получим:

$$\text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{-1 \cdot 3 + 0 \cdot (-4) + 2 \cdot 1}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{26}} = -\frac{\sqrt{26}}{26}$$

$$\text{Ответ. Пр}_{\vec{b}} \vec{a} = -\frac{\sqrt{26}}{26}$$

2. Даны вершины треугольника $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC .

Решение .

$$\overrightarrow{AB} = (4; -5; 0); \quad \overrightarrow{AC} = (0; 4; -3)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 15i + 12j + 16k = (15; 12; 16)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{225 + 144 + 256} = \frac{25}{2}$$

$$\text{С другой стороны: } S_{ABC} = \frac{1}{2} h \cdot AC = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 9} \cdot h$$

$$\Rightarrow \frac{25}{2} = \frac{5}{2} h \Rightarrow h = 5$$

Ответ: 5

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

- «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 2.2. Матрицы и системы линейных уравнений

Практическое занятие № 7 Операции с матрицами

Цель работы: формирование умений выполнять операции над матрицами; вычислять определители.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- выполнять операции над матрицами;
- вычислять определители.

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями), лекции в тетрадях.
Образовательный портал.

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор.

Задания:

1. Найти матрицу $C = A^2 + 3AB$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Выяснить, является ли матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ обратной к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.
3. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите: $A+B$; $2A$; AB ; BA .
4. Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -15 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \quad 4) \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

Краткие теоретические сведения:

1. *Умножение матрицы на число.* Произведением матрицы A на число λ называется матрица $B = \lambda A$, элементы которой $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ для $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Следствия.

1) Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

2) Произведение матрицы A на число 0 есть нулевая матрица, то есть $0 \cdot A = O$.

2. *Сложение матриц.* Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ (т.е. матрицы складываются поэлементно).

В частном случае $A + O = A$.

3. *Вычитание матриц.* Разность двух матриц одинакового размера определяется через предыдущие операции: $A - B = A + (-1)B$.

4. *Умножение матриц.* Операция умножения матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Чтобы найти элемент матрицы, стоящий в i -той строке в k -том столбце, нужно вычислить сумму произведений элементов i -той строки первой матрицы на соответствующие элементы k -того столбца второй.

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{s=1}^k a_{is} \cdot b_{sj}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Многие свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами:

- 1) $A + B = B + A$.
- 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- 3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
- 4) $A(B + C) = AB + AC$.
- 5) $(A + B)C = AC + BC$.
- 6) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
- 7) $A(BC) = (AB)C$.
- 8) $A \cdot E = E \cdot A = A$.
- 9) $A \cdot B \neq B \cdot A$.

5. *Возведение в степень.* Целой положительной степенью A^m ($m > 1$) квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A , т.е. $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{m \text{ раз}}$.

Операция возведение в степень определяется только для квадратных матриц.

Следствия. 1) $A^0 = E$; 2) $A^1 = A$; 3) $A^m \cdot A^k = A^{m+k}$; 4) $(A^m)^k = A^{mk}$.

6. *Транспонирование матрицы.* Матрица, полученная из матрицы A путем замены строк на соответствующие столбцы, называется *транспонированной* относительно матрицы A и обозначается A^T , то есть:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определителем квадратной матрицы второго порядка (определителем второго порядка) называется число, равное разности произведений элементов главной диагонали и элементов побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Определителем квадратной матрицы третьего порядка (определителем третьего порядка) называется число, равное

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Определителем квадратной матрицы n -го порядка называется число, равное сумме произведений элементов любой строки или столбца на их алгебраические дополнения.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя n -го порядка называется определитель $(n-1)$ -го порядка, полученный из исходного определителя путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите задание.
2. Определите, какие действия, и по каким правилам необходимо выполнить. Прочитайте конспект.
3. Запишите определитель, определите какого он порядка.
4. Используя соответствующее определение, вычислите значение определителя.
5. Выполните действия. Проверьте правильность вычислений.

Задания:

1. Найти матрицу $C = A^2 + 3AB$, если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

а) Найдем A^2 , умножая матрицу саму на себя

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

б) Найдем матрицу $3A$, умножив все элементы матрицы A на 3.

$$3A = 3 \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

в) Найдем произведение $3AB$

$$3AB = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}$$

г) Найдем матрицу C , складывая соответствующие элементы

$$C = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 24 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}$$

2. Найдем произведение $A \cdot A^{-1}$ и $A^{-1} \cdot A$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

В соответствии с определением данные матрицы являются взаимнообратными.

3. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдите: $A+B$; $2A$; AB ; BA .

$$A + B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -8 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 11 \\ 16 & -16 & -4 \\ 14 & -14 & -8 \end{pmatrix};$$

$$c_{11} = -3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 0 = 3;$$

$$c_{12} = -3 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) + (-3) \cdot (-2) = -2;$$

$$c_{13} = -3 \cdot (-5) + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 = 11;$$

$$c_{21} = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 = 16;$$

$$c_{22} = 1 \cdot 0 + 5 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-2) = -16;$$

$$c_{23} = 1 \cdot (-5) + 5 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = -4;$$

$$c_{31} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 = 14;$$

$$c_{32} = 2 \cdot 0 + 4 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-2) = -14;$$

$$c_{33} = 2 \cdot (-5) + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = -8.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -18 & 2 \\ -11 & -10 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-4) = 12 + 12 = 24$$

$$2) \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$$

$$-6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = -15 + 48 - 6 - 18 =$$

$$= 48 - 39 = 9$$

$$3) \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -7 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-7) \cdot 1 + (-6) \cdot (-3) \cdot 5 -$$

$$-5 \cdot 2 \cdot 1 - (-6) \cdot 0 \cdot 2 - (-3) \cdot (-7) = 16 + 0 + 90 - 10 - 0 - 84 = 12$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 3A_{11} + (-1)A_{21} + 0A_{31} + 1A_{41} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 122$$

4)

Задания:

1. Решить уравнение $X=AB$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Выяснить, является матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ обратной к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Решить уравнения: $AX=B$; $2A+X=B$; $AB=X$; $BX=A$.

4. Вычислить определители:

$$2) \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -15 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \quad 4) \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

Форма представления результата: Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

«Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий

Практическое занятие № 8

Решение СЛАУ методами Гаусса, Крамера и при помощи обратной матрицы

Цель работы: Научиться решать системы линейных уравнений различными методами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать системы линейных уравнений методом Крамера;
- решать системы уравнений методом Гаусса;
- решать системы линейных уравнений матричным способом.

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Решить системы линейных уравнений:

$$1) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 7x_3 = -1 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -25 \end{cases}.$$

Краткие теоретические сведения:

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Чтобы решить систему методом Крамера, составим определитель из коэффициентов при неизвестных.

Этот определитель называется определителем системы:
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель Δ_3 получается из определителя Δ путем замены третьего столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Чтобы вычислить значения неизвестных, воспользуемся формулами Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$;

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Метод Гаусса является одним из наиболее универсальных методов решения систем линейных уравнений. Он состоит в последовательном исключении неизвестных.

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому виду. На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

На практике удобнее работать не с системой уравнений, а с расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками.

Элементарными преобразованиями матрицы являются:

- перестановка строк местами;
- умножение некоторой строки на любое, не равное нулю число;
- прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число

Для решения системы методом Гаусса используйте алгоритм:

- 1) Запишите систему линейных уравнений.
- 2) Составьте расширенную матрицу.
- 3) Выполните элементарные преобразования строк матрицы, исключая последовательно переменные.
В результате должна получиться ступенчатая матрица.
- 4) По ступенчатой матрице составьте систему.
- 5) Последовательно найдите значения всех неизвестных.
- 6) Запишите ответ.

Матричный метод (с помощью обратной матрицы)

[illegible]

Составим матричное уравнение: $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

Чтобы найти неизвестную матрицу X , нужно $A^{-1} \cdot B$

Чтобы вычислить обратную матрицу, нужно:

а) вычислить определитель матрицы A ($\Delta A \neq 0$);

б) найти алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы A и составить из них союзную матрицу A^* .

в) транспонировать матрицу A^* из алгебраических дополнений $A^{*T} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$;

г) найти обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$

Чтобы найти неизвестную матрицу X , нужно умножить обратную матрицу A^{-1} на матрицу B , состоящую из свободных членов.

Для решения системы матричным методом:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте матричное уравнение.
3. Вычислите обратную матрицу.

Чтобы вычислить обратную матрицу, нужно:

- а) вычислить определитель матрицы A ($\Delta A \neq 0$);
- б) найти алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы A ;
- в) транспонировать матрицу из алгебраических дополнений;

г) найти обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$

4. Найдите значения неизвестных.

Чтобы найти неизвестную матрицу X , нужно умножить обратную матрицу A^{-1} на матрицу B , состоящую из свободных членов.

5. Запишите ответ.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Решите каждую систему всеми тремя способами.
3. Запишите ответ.

Ход работы:

Рассмотрим примеры:

1) Решить систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Вычислим определители каждой переменной:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 40 - 15 + 10 - 0 = 20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 30 + 0 + 45 - 0 - 20 = -10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 30 - 0 - 20 - 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{10} = -1; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0$$

Ответ: (2;-1;0).

2) Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -25 \end{cases}$$

Найдем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = -104.$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -12; \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -16;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -31; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 13; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 26; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13.$$

Составим обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix}.$$

Решим матричное уравнение:

$$X = A^{-1}C = -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix} = -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} -120 + 64 + 56 \\ -310 - 8 - 98 \\ 130 - 104 + 182 \end{pmatrix} = -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} 0 \\ -416 \\ 208 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (0;4;-2).

Сделаем проверку:

$$\begin{cases} 0 + 12 - 2 = 10 \\ 0 - 8 + 4 = -4 \\ 0 - 4 - 10 = -14 \end{cases} \text{ (верно)}$$

3) Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Полученной матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1; \\ -2x_3 = 0 \end{cases}$$

Начиная снизу вверх, находим значения неизвестных:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases} &; \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases} &; \begin{cases} x_1 + 2 \cdot (-1) = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: (2;-1;0).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

- «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 2.3. Сингулярное разложение матриц (SVD)

Практическое занятие № 9

Реализация сингулярного разложения матрицы с помощью вычислительных методов

Цель: освоить методы вычисления сингулярного разложения матриц и научиться применять полученные знания для решения практических задач.

Задачи занятия:

Освоение понятия сингулярного разложения (SVD).

Изучение алгоритмов вычисления SVD.

Развитие навыков программирования и анализа данных.

Применение метода SVD для обработки реальных данных.

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

Материальное обеспечение: персональный компьютер, программное обеспечение Python с библиотеками NumPy и SciPy.

Краткие теоретические сведения:

1.1 Определение и основы сингулярного разложения

Понятие сингулярного разложения (SVD), формула разложения: $A=U\Sigma V^T$.

Основные свойства сингулярного разложения.

Интерпретация компонентов SVD: U , Σ , V^T .

1.2 Методы вычисления SVD

Основы алгоритма QR-разложения.

Подход с использованием собственного разложения.

Особенности выбора подходящего метода для разных типов матриц.

1.3 Применение SVD

Сжатие изображений.

Ранговая аппроксимация матриц.

Уменьшение размерности данных (анализ главных компонент — PCA).

Порядок выполнения работы:

1. Проанализировать условие задачи.
2. Выполнить решение, применяя необходимые формулы.
3. Записать ответ.

Задания:

Пример 1. **Вычислим SVD простой матрицы вручную и проверим результаты в Python.**

Рассчитаем SVD следующей матрицы размером $3 \times 3 \times 3$:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Задания:

Выполните пошагово ручной расчёт сингулярного разложения данной матрицы.

Проверьте результаты в Python, используя библиотеку NumPy.

```
import numpy as np
```

```
# исходная матрица A
```

```
A = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]])
```

```
# рассчитываем SVD
```

```
U, s, VT = np.linalg.svd(A)
```

```
print("Матрица U:\n", U)
```

```
print("\nДиагональная матрица Σ:\n", np.diag(s))
```

```
print("\nМатрица V транспонированная:\n", VT)
```

Пример 2. **Используйте SVD для уменьшения размерности набора данных.**

Получите набор случайных данных, проведите сингулярное разложение и уменьшите количество признаков.

Задания:

Создайте набор случайных данных размером $100 \times 10100 \times 10$.

Примените SVD для понижения размерности до трех первых сингулярных чисел.

Отобразите преобразованные данные графически.

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
# генерируем случайные данные
```

```
X = np.random.randn(100, 10)
```

```
# используем SVD для понижения размерности
```

```
U, s, VT = np.linalg.svd(X)
```

```
reduced_data = U[:, :3]
```

```
plt.scatter(reduced_data[:, 0], reduced_data[:, 1])
```

```
plt.title('Данные после понижения размерности')
```

```
plt.show()
```

Пример 3. Сжатие изображения с помощью SVD.

Применим SVD для снижения разрешения фотографии.

Задания:

Загрузите чёрно-белое изображение небольшого размера.

Преобразуйте его в двумерный массив пикселей.

Примените SVD для постепенного сокращения числа сингулярных чисел и наблюдайте влияние на визуализацию изображения.

```
from PIL import Image
```

```
import numpy as np
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
img = Image.open('example_image.jpg').convert('L') # конвертируем в оттенки серого
```

```
img_array = np.asarray(img)
```

```
U, s, VT = np.linalg.svd(img_array)
```

```
for k in range(1, len(s)+1):
```

```
    compressed_img = U[:, :k].dot(np.diag(s[:k])).dot(VT[:k, :])
```

```
    plt.imshow(compressed_img, cmap='gray')
```

```
    plt.title(f'Компрессия с {k} сингулярными значениями')
```

```
    plt.show()
```

3. Индивидуальная работа студентов

Студентам предлагается самостоятельно решить одно из предложенных преподавателем заданий:

Рассчитать SVD своей собственной матрицы (размер выбирается индивидуально).

Исследовать зависимость точности реконструкции изображения от числа используемых сингулярных чисел.

Решить систему линейных уравнений методом наименьших квадратов с использованием SVD.

Формы контроля:

Оценивается уровень освоения материала по результатам самостоятельной работы и качеству предоставленного отчёта. Критерии оценивания:

Правильность вычислений.

Ясность изложения материала.

Аккуратность представления отчёта.

Форма представления результата:

Отчёт должен содержать:
Ход выполнения каждого примера.
Код программ на Python.
Выводы по каждому пункту.
Графические иллюстрации (при наличии).

Критерии оценки:

- «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Практическое занятие № 10

Применение SVD для анализа многомерных данных. Уменьшение размерности данных с использованием SVD в задачах машинного обучения

Цель: изучить принципы и методы использования сингулярного разложения (SVD) для анализа и преобразования многомерных данных, освоить практические приёмы снижения размерности данных в задачах машинного обучения.

Задачи занятия:

Понять назначение и возможности метода сингулярного разложения (SVD).
Научиться выбирать подходящие значения для эффективного снижения размерности.
Освоить инструменты Python для работы с большими наборами данных и анализа результата.

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Краткие теоретические сведения:

1.1 Мотивация и цели применения SVD

Почему важно снижать размерность данных?

Как помогает SVD уменьшить объём данных без потери важной информации?

1.2 Сингулярное разложение (SVD)

Формула SVD: $A=U\Sigma V^T$

Компоненты разложения: значения U , Σ , V .

Основная идея понижения размерности с помощью SVD.

1.3 Алгоритм понижающей размерности

Выбор ранга разложения.

Важность сохранения ключевых сингулярных чисел.

1.4 Применение SVD в анализе данных

Снижение шумов и выявление значимых характеристик.

Пример использования SVD в обработке изображений и аналитике больших данных.

Порядок выполнения работы:

1. Проанализировать условие задачи.
2. Выполнить решение, применяя необходимые формулы.

3. Записать ответ.

Задание:

Практика 1. Снижение размерности многомерных данных с помощью SVD.

Задача: применить SVD для понижения размерности двухмерного набора данных и сравнить качество моделей регрессии/классификации.

Инструкция:

Загрузите небольшой набор данных (например, IRIS dataset).

Подготовьте данные: нормировка, стандартизация.

Примените SVD для уменьшения размерности до трёх новых координат.

Постройте график зависимости качества модели классификации от количества использованных сингулярных чисел.

Код:

```
import numpy as np
from sklearn.datasets import load_iris
from sklearn.decomposition import TruncatedSVD
from sklearn.model_selection import train_test_split
from sklearn.linear_model import LogisticRegression
from sklearn.metrics import accuracy_score

# загрузка данных
data = load_iris()
X = data.data
y = data.target

# разделение выборки на обучение и тестирование
X_train, X_test, y_train, y_test = train_test_split(X, y, test_size=0.3, random_state=42)

# применим SVD для снижения размерности
s = []
acc_scores = []
for i in range(1, min(X.shape)):
    svd = TruncatedSVD(n_components=i)
    X_train_reduced = svd.fit_transform(X_train)

    model = LogisticRegression(max_iter=1000)
    model.fit(X_train_reduced, y_train)

    X_test_reduced = svd.transform(X_test)
    pred = model.predict(X_test_reduced)
    acc = accuracy_score(y_test, pred)

    s.append(i)
    acc_scores.append(acc)

# построим график зависимости точности от количества компонентов
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(s, acc_scores, marker='o', linestyle='-', color='b')
plt.xlabel('Количество сингулярных чисел')
plt.ylabel('Точность классификации')
plt.title('Качество классификатора в зависимости от размеров пространства')
```

```
plt.grid(True)
```

```
plt.show()
```

Практика 2. Анализ шума и фильтрация сигналов с помощью SVD.

Задача: применить SVD для очистки зашумлённого сигнала.

Инструкция:

Генерируйте случайный сигнал с наложенным шумом.

Примените SVD для выделения основной структуры сигнала путём отбрасывания малых сингулярных чисел.

Визуализируйте очищенный сигнал и сравните с оригиналом.

Код:

```
import numpy as np
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
# создаём сигнал с шумом
```

```
x = np.linspace(-np.pi*10, np.pi*10, 1000)
```

```
signal = np.sin(x) + np.cos(x)
```

```
noise = np.random.normal(scale=0.5, size=x.size)
```

```
noisy_signal = signal + noise
```

```
# применяем SVD для удаления шума
```

```
U, s, VT = np.linalg.svd(noisy_signal.reshape(-1, 1))
```

```
cleaned_signal = U.dot(np.diag(s)).dot(VT)[0]
```

```
# строим графики
```

```
plt.figure(figsize=(12, 6))
```

```
plt.subplot(2, 1, 1)
```

```
plt.plot(x, noisy_signal, label="Шумный сигнал")
```

```
plt.legend()
```

```
plt.subplot(2, 1, 2)
```

```
plt.plot(x, cleaned_signal, label="Очищенный сигнал")
```

```
plt.legend()
```

```
plt.show()
```

3. Самостоятельная работа

Самостоятельно выбрать один из предложенных вариантов:

Применить SVD для изучения многомерных данных (например, датасеты MNIST, Fashion-MNIST).

Написать собственное приложение для автоматического подбора оптимального количества сингулярных чисел.

Проанализировать собственный набор данных, содержащий большие размеры, используя SVD.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3.1. Линейные модели

Практическое занятие № 11

Построение линейной модели на основе экспериментальных данных. Оценка параметров линейной регрессии с помощью метода наименьших квадратов

Цель: овладеть методами построения линейных моделей на основе эмпирических данных, научиться оценивать коэффициенты линейной регрессии с использованием метода наименьших квадратов, развить навыки прикладного программирования и анализа данных.

Задачи занятия:

Усвоить понятие линейной регрессии и её роли в предсказательных моделях.

Познакомиться с принципами метода наименьших квадратов.

Получить опыт работы с данными, анализировать результаты и интерпретировать их.

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Краткие теоретические сведения:

Линейная регрессия — это один из базовых методов машинного обучения и статистики, предназначенный для выявления и описания связи между одной зависимой переменной (целевым признаком) и одним или несколькими независимыми признаками (предикторами).

Суть метода:

Основная задача линейной регрессии заключается в поиске такой линейной зависимости, которая бы позволяла достаточно точно описать поведение целевой переменной на основании известных значений предикторов. Если говорить проще, линейная регрессия пытается установить следующую функциональную зависимость:

$$y=f(x)=w_0+w_1x_1+w_2x_2+\dots+w_px_p,$$

где y — зависимая переменная (целевое значение),

$w_0, w_1, \dots, w_p$ — неизвестные пока параметры (коэффициенты регрессии),

$x_1, x_2, \dots, x_p$ — независимые переменные (признаки-предикторы).

Наиболее распространённая форма линейной регрессии — это простая линейная регрессия, в которой имеется одна независимая переменная:

$$y=w_0+w_1x$$

Параметры w_0 и w_1 называются соответственно свободным членом (пересечением с осью ординат) и угловым коэффициентом (наклоном прямой).

Линейная регрессия используется для нескольких важных целей:

Прогнозирование. Один из самых частых сценариев — использование линейной регрессии для прогнозирования будущих значений зависимой переменной на основе существующих данных. Например, предсказывать спрос на продукцию, цену недвижимости или стоимость акций.

Анализ взаимосвязей. Линейная регрессия позволяет выявить наличие и силу связи между независимой и зависимой переменными. Это полезно для принятия управленческих решений, планирования бюджета и оптимизации процессов.

Интерпретация моделей. Поскольку коэффициенты линейной регрессии показывают вклад каждого признака в изменение целевой переменной, такая модель легко интерпретируется человеком. Это делает линейную регрессию особенно привлекательной в областях вроде экономики, маркетинга и социологии.

Оценка эффективности действий. Можно определить степень влияния отдельных факторов на интересующий показатель и принять обоснованные решения.

Например, компания хочет выяснить, влияет ли реклама на объем продаж продукции. Используя линейную регрессию, можно проанализировать имеющиеся данные и оценить эффективность рекламных кампаний.

Когда линейная регрессия эффективна?

Для успешного применения линейной регрессии желательно выполнение ряда условий:

Связь между признаками должна быть примерно линейной.

Независимые переменные не должны сильно коррелировать друг с другом (нет мультиколлинеарности).

Остаточные ошибки распределения должны иметь нормальное распределение с нулевым средним и постоянной дисперсией.

Несмотря на свою простоту, линейная регрессия остаётся важным инструментом анализа данных благодаря прозрачности и ясности интерпретаций.

Метод наименьших квадратов (англ. Least Squares Method, LSM) используется для нахождения наилучшей приближённой прямой (или другой кривой) среди множества точек данных таким образом, чтобы сумма квадратов расстояний («отклонений») от каждой точки до полученной линии была минимальной.

Другими словами, этот метод позволяет находить такие параметры модели, при которых суммарная величина ошибок (разница между фактическими и предсказанными значениями) становится минимальной именно в смысле квадратичной меры отклонения.

Рассмотрим подробнее процесс работы метода наименьших квадратов на простом примере:

Допустим, мы имеем ряд пар данных $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, и хотим подобрать прямую линию вида $y = ax + b$, которая наиболее точно описывает связь между этими парами.

Основные этапы метода наименьших квадратов:

Постановка задачи: Для заданных данных находим такую пару параметров a и b , при которой линия $y = ax + b$ проходит ближе всего ко всем точкам данных одновременно.

Определение целевой функции: Суммарная ошибка представляет собой сумму квадратов всех отклонений фактических значений y_i от соответствующих предсказанных значений $y_i = ax_i + b$:

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$$

Минимизация целевой функции: Чтобы минимизировать ошибку, нужно найти такие значения a и b , при которых производные функции $Q(a, b)$ по параметрам равны нулю:

$$\frac{dQ}{da} = 0, \quad \frac{dQ}{db} = 0$$

Решение системы уравнений: После дифференцирования и упрощения получаем систему линейных уравнений относительно a и b , решив которую найдём искомые параметры.

Таким образом, метод наименьших квадратов обеспечивает простое и эффективное средство для оценки параметров линейной (и некоторых нелинейных) моделей на основе имеющихся данных. Этот метод широко используется в статистике, экономике, физике и других науках для анализа и прогнозирования зависимостей между переменными.

Порядок выполнения работы:

1. Проанализировать условие задачи.
2. Выполнить решение, применяя необходимые формулы.
3. Записать ответ.

Задание:

Практика 1. Простейший пример оценки параметров линейной регрессии вручную.

Задача: по заданному набору данных построить простую линейную модель вида $y = a + bx$ и оценить параметры a и b методом наименьших квадратов.

Исходные данные:

x	y
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6

Расчёты:

$$n = 5$$

$$\sum x_i = 15, \quad \sum y_i = 20, \quad \sum x_i^2 = 55, \quad \sum x_i y_i = 55$$

Решение вручную:

Найти среднее арифметическое:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{n}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_i y_i}{n}$$

Определить коэффициент наклона линии регрессии:

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Константа пересечения оси Y:

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$$

Задание: Решить задачу вручную, провести расчеты и убедиться в правильности формул.

Практика 2. **Автоматизированное решение с использованием Python.**

Задача: реализовать оценку параметров линейной регрессии с помощью библиотеки NumPy и проверить качество модели.

Код:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
# исходные данные
```

```
x = np.array([1, 2, 3, 4, 5])
```

```
y = np.array([2, 3, 4, 5, 6])
```

```
# найдем коэффициенты линейной регрессии
```

```
A = np.vstack([x, np.ones(len(x))]).T
```

```
m, c = np.linalg.lstsq(A, y, rcond=None)[0]
```

```
# построим линию регрессии
```

```
line_y = m * x + c
```

```
# отображаем точки и линию регрессии
```

```
plt.scatter(x, y, color='blue', label='Экспериментальные данные')
```

```
plt.plot(x, line_y, color='red', label=f'Регрессия: y={m:.2f}*x+{c:.2f}')
```

```
plt.legend()
```

```
plt.show()
```

```
# подсчитаем коэффициент детерминации R²
```

```
SSR = sum((line_y - np.mean(y))**2)
```

```
SSE = sum((y-line_y)**2)
R_squared = SSR / (SSR+SSE)
print(f'Коэффициент детерминации R²: {R_squared}')
```

Практика 3. Анализ реальных данных.

Задача: подобрать оптимальную линейную модель для описания взаимосвязи между двумя показателями (например, расходы на рекламу и продажи товаров).

Задание:

Загрузите реальные данные (например, набор данных Boston Housing Dataset).

Выделите признаки и целевую переменную.

Проведите линейную регрессию и проанализируйте качество модели.

3. Самостоятельная работа

Предлагается разработать собственную модель линейной регрессии на выбранном наборе данных (например, потребление электроэнергии и температура воздуха).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

- «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Практическое занятие № 12

Применение линейных моделей для предсказания значений

Цель: изучение принципов построения и применения линейных моделей для прогнозирования зависимых величин на основе имеющихся данных, развитие навыков анализа данных и подготовки информационных моделей.

Задачи занятия:

Ознакомиться с основными видами линейных моделей.

Научиться подбирать адекватные модели для конкретной задачи.

Освоить методики анализа и проверки качества построенных моделей.

Использовать инструменты Python для анализа и построения линейных моделей.

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Краткие теоретические сведения:

1. Простая линейная регрессия

Простая линейная регрессия устанавливает зависимость между одной зависимой переменной (Y) и одной независимой переменной (X). Цель состоит в подборе прямой линии, которая наилучшим образом описывает отношение между переменными.

Модель имеет следующий вид:

$$Y = w_0 + w_1 X$$

Где:

$\hat{Y}$ — предсказанное значение зависимой переменной,
 w_0 — свободный член (intercept),
 w_1 — угловой коэффициент (slope),
 X — независимая переменная.

Использование:

Эта модель часто применяется там, где нужно предсказать одну величину на основе другого фактора, например:

Стоимость квартиры в зависимости от общей площади.

Доходы населения в зависимости от уровня образования.

Алгоритм:

Для определения лучших значений коэффициентов w_0 и w_1 чаще всего используют метод наименьших квадратов, который сводит к минимуму разницу между фактическими и предсказанными значениями.

2. Многомерная линейная регрессия

Многомерная линейная регрессия отличается от простой наличием нескольких независимых переменных. Она строится тогда, когда зависимую переменную нужно объяснить сразу несколькими факторами.

Модель выглядит следующим образом:

$$\hat{Y} = w_0 + w_1X_1 + w_2X_2 + \dots + w_pX_p$$

Где:

$\hat{Y}$ — предсказанная зависимая переменная,

$w_0, w_1, \dots, w_p$ — коэффициенты регрессии,

$X_1, X_2, \dots, X_p$ — независимые переменные.

Примеры использования:

Прогнозирование цен на жилье с учётом местоположения, площади, количества комнат и инфраструктуры района.

Оценка дохода сотрудника в зависимости от стажа, квалификации, должности и региона проживания.

Особенности:

При выборе многомерной регрессии необходимо учитывать возможность взаимозависимости между признаками (коллинеарность), что может усложнить подбор хороших коэффициентов.

3. Логистическая регрессия

Логистическая регрессия используется для бинарной классификации, когда цель — отнести объект к одному из двух классов (например, да/нет, положительный/отрицательный результат теста).

Формула логистической регрессии:

$$P(Y=1|X) = \sigma(w_0 + w_1X_1 + w_2X_2 + \dots + w_pX_p)$$

Где:

$P(Y=1|X)$ — вероятность принадлежности класса 1,

$\sigma(z) = 1/(1+e^{-z})$ — сигмоидная функция (логистика),

$w_0, w_1, \dots, w_p$ — веса (коэффициенты),

$X_1, X_2, \dots, X_p$ — входные признаки.

Преимущества:

Возможность вывести не только класс, но и вероятность принадлежности к классу.

Легкая интерпретация весов (чем больше вес, тем сильнее признак влияет на принадлежность к классу).

Недостатки:

Ограниченность только двоичными задачами.

Предположение о линейной связи между признаками и логарифмом шансов (log odds).

Порядок выполнения работы:

1. Проанализировать условие задачи.

2. Выполнить решение, применяя необходимые формулы.
3. Записать ответ.

Задание:

Практика 1. Простая линейная регрессия.

Задача: исследовать зависимость между объемом рекламы и количеством проданного товара.

Шаг 1. Сбор данных: Имеются следующие данные о затратах на рекламу (в тыс. рублей) и количестве проданного товара (в штуках):

Затраты на рекламу	Продажи
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

Шаг 2. Подготовка данных: Запишите данные в виде массива Python.

Шаг 3. Построение модели: Создайте модель простой линейной регрессии с помощью библиотеки scikit-learn.

Шаг 4. Предсказание: Сделайте прогнозы по новым данным затрат на рекламу и проверьте точность модели.

Код:

```
import numpy as np
from sklearn.linear_model import LinearRegression
import matplotlib.pyplot as plt

# Данные
advertising_cost = np.array([1, 2, 3, 4, 5]).reshape(-1, 1)
sales_volume = np.array([1, 2, 3, 4, 5])

# Модель
model = LinearRegression().fit(advertising_cost, sales_volume)

# Прогнозируем новые значения
new_advertising_cost = np.array([6, 7, 8]).reshape(-1, 1)
predicted_sales = model.predict(new_advertising_cost)

# Показываем результаты
plt.scatter(advertising_cost, sales_volume, color='black')
plt.plot(advertising_cost, model.predict(advertising_cost), color='blue', linewidth=3)
plt.scatter(new_advertising_cost, predicted_sales, color='green')
plt.show()
```

Практика 2. Многомерная линейная регрессия.

Задача: построить модель прогнозирования цены дома исходя из площади жилья и количества комнат.

Шаг 1. Собрать данные: Имеются данные о цене домов, площади и числе комнат:

Площадь (м²)	Количество комнат	Цена (тыс. руб.)
50	2	3

60	3	4
70	4	5
80	5	6
90	6	7

Шаг 2. Подготовка данных: Преобразуйте данные в подходящий формат для дальнейшего анализа.

Шаг 3. Моделирование: Постройте многомерную линейную регрессию.

Шаг 4. Проверка качества модели: Посмотрите, насколько хорошо ваша модель предсказывает цену дома.

Код:

```
import pandas as pd
from sklearn.linear_model import LinearRegression
from sklearn.metrics import mean_absolute_error
```

Данные

```
df = pd.DataFrame({
    'Площадь': [50, 60, 70, 80, 90],
    'Комнат': [2, 3, 4, 5, 6],
    'Цена': [3, 4, 5, 6, 7]
})
```

Тренировочная выборка

```
X = df[['Площадь', 'Комнат']]
y = df['Цена']
```

Строим модель

```
model = LinearRegression().fit(X, y)
```

Тестовые данные

```
test_X = [[100, 7]]
predicted_price = model.predict(test_X)
```

Оцениваем точность

```
mae = mean_absolute_error(y, model.predict(X))
```

```
print(f'Прогнозированная цена дома: {predicted_price}, MAE: {mae}')
```

3. Самостоятельная работа

Каждому студенту предоставляется реальный набор данных, например, данные о стоимости автомобилей в зависимости от пробега и возраста автомобиля. Необходимо:

Подобрать подходящую линейную модель.

Построить прогноз для нового автомобиля.

Сделать выводы о качестве модели.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3.2. Нелинейные модели

Практическое занятие № 13

Построение полиномиальной модели для аппроксимации данных

Цель: ознакомиться с принципами построения полиномиальных моделей, освоить методы подбора оптимальной степени полинома и практики построения качественной аппроксимации данных.

Задачи занятия:

Освоить теорию полиномиального регрессионного анализа.

Научиться строить полиномиальные модели различной сложности.

Разработать навыки подбора лучшей степени полинома для аппроксимации данных.

Узнать способы оценки качества модели.

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Краткие теоретические сведения:

Линейная модель предполагает прямолинейную зависимость между объясняющими переменными и откликом (результатом). Эта зависимость задаётся выражением вида:

$$y=w_0+w_1x_1+w_2x_2+\dots+w_nx_n$$

Здесь y — зависимая переменная, $x_1, x_2, \dots, x_n$ — независимые переменные, а $w_0, w_1, \dots, w_n$ — коэффициенты модели. Линейная модель является самой простой формой, поскольку каждый эффект объясняется простым сложением вкладов отдельных переменных.

Полиномиальная модель, напротив, допускает более сложную зависимость, позволяя учитывать нелинейные эффекты. Такие модели представляют собой расширенное выражение линейной модели, где наряду с простыми членами включаются члены, содержащие переменные в степенях выше первой. Таким образом, общая форма полиномиальной модели может выглядеть так:

$$y=w_0+w_1x+w_2x^2+w_3x^3+\dots+w_mx^m$$

где m — максимальная степень полинома.

Полиномиальная регрессия — это расширение классической линейной регрессии, которое включает не только линейные члены, но и членов высокой степени. Основное преимущество полиномиальной регрессии перед обычной линейной моделью заключается в способности аппроксимировать более сложные закономерности в данных, обеспечивая лучшее соответствие реальной ситуации.

Однако увеличение степени полинома ведёт к росту сложности модели, что повышает риск **перефитинга** (англ. overfitting) — ситуация, когда модель идеально повторяет шумы и мелкие особенности тренировочных данных, теряя способность обобщаться на новые наблюдения.

Основные формулы и подходы к выбору степени полинома

При построении полиномиальной модели необходимо правильно выбрать степень полинома, которая обеспечит оптимальное сочетание качества подогнанной модели и устойчивости к переобучению.

Пусть дана таблица данных (X, y) , где X — матрица независимых переменных, а y — вектор зависимых переменных. Тогда общий вид полиномиальной регрессии можно записать как:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_m x^m + \epsilon$$

где:

$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ — коэффициенты регрессии,

m — степень полинома,

ϵ — случайная ошибка.

Коэффициенты β_j находятся методом наименьших квадратов, который сводится к решению системы уравнений, либо средствами стандартных инструментов линейной алгебры (псевдообращение матрицы).

Подбор оптимальной степени полинома

Существует несколько способов выбора оптимальной степени полинома:

Графический метод: визуально рассмотреть графики зависимости полиномов разной степени от исходных данных и остановить выбор на той степени, при которой модель удовлетворительно отражает общую тенденцию без чрезмерного "следования" шумам.

Кросс-валидация: разделить данные на обучающую и тестовую части, построить модели разного порядка и выбрать ту, которая показывает минимальное отклонение на тестовых данных.

Критерий информационного байеса (BIC) или критерий Акаике (AIC): сравнение моделей разной сложности с учётом штрафа за большее количество параметров.

Наблюдение показателей качества модели (таких как коэффициент детерминации R^2 , средняя абсолютная ошибка MAE или среднеквадратичная ошибка MSE). Обычно выбирают тот порядок полинома, при котором достигается приемлемый баланс между точностью и устойчивостью модели.

Итак, главное отличие между линейной и полиномиальной моделями заключается в характере зависимости: линейная модель фиксирует лишь прямые соотношения, тогда как полиномиальная способна выявлять более сложные нелинейные закономерности, хотя требует тщательного подбора порядка полинома для избежания избыточной сложности.

Порядок выполнения работы:

1. Проанализировать условие задачи.
2. Выполнить решение, применяя необходимые формулы.
3. Записать ответ.

Задание:

Практика 1. Построение простой полиномиальной модели.

Задача: построить полиномиальную модель второй степени для данных, отражающих зависимость урожайности зерновых культур от температуры окружающей среды.

Шаг 1. Набор данных:

Температура (°C)	Урожайность (кг/га)
10	200
15	300
20	400
25	500
30	600

Шаг 2. Запишите данные в массив Python.

Шаг 3. Подберите полином второго порядка для аппроксимации данных.

Шаг 4. Сделайте прогноз урожая при температуре 22 градуса.

Код:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from sklearn.preprocessing import PolynomialFeatures
from sklearn.linear_model import LinearRegression

# Исходные данные
temperature = np.array([10, 15, 20, 25, 30]).reshape(-1, 1)
yield_values = np.array([200, 300, 400, 500, 600])

# Построим полином второй степени
poly_features = PolynomialFeatures(degree=2)
X_poly = poly_features.fit_transform(temperature)

# Линейная регрессия для полиномиальной модели
regressor = LinearRegression()
regressor.fit(X_poly, yield_values)

# Построим график
plt.scatter(temperature, yield_values, color='black')
plt.plot(temperature, regressor.predict(X_poly), color='blue')
plt.title('Аппроксимация полиномом 2-й степени')
plt.show()

# Прогнозируем урожайность при T=22°C
temp_new = np.array([22]).reshape(-1, 1)
X_poly_new = poly_features.transform(temp_new)
predicted_yield = regressor.predict(X_poly_new)
print(f'Урожайность при температуре 22°C: {predicted_yield[0]:.2f} кг/га')
```

Практика 2. Подбор оптимальной степени полинома.

Задача: подобрать лучшую степень полинома для аппроксимации временных рядов потребления энергии домохозяйством.

Шаг 1. Имеются данные о потреблении энергии за неделю:

Время суток (час)	Потребление энергии (Вт/ч)
0	100
1	120
2	110
...	...
23	150

Шаг 2. Экспериментально выберите оптимальную степень полинома, оценив меру соответствия R2R2 и MSE.

Код:

```
from sklearn.metrics import r2_score, mean_squared_error

hours = np.arange(24).reshape(-1, 1)
energy_consumption = np.array([100, 120, 110, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190, 200, 210, 220, 230, 240, 250, 260, 270, 280, 290, 300, 310, 320, 330])
```

```

best_degree = None
best_r2 = float('-inf')

for degree in range(1, 6):
    poly_features = PolynomialFeatures(degree=degree)
    X_poly = poly_features.fit_transform(hours)
    regressor = LinearRegression()
    regressor.fit(X_poly, energy_consumption)
    predictions = regressor.predict(X_poly)
    current_r2 = r2_score(energy_consumption, predictions)
    if current_r2 > best_r2:
        best_r2 = current_r2
        best_degree = degree

print(f"Оптимальная степень полинома: {best_degree}, R^2: {best_r2:.2f}")

```

3. Самостоятельная работа

Выбор конкретного набора данных (например, температурные условия и урожайность пшеницы), проведение полного цикла анализа и построения полиномиальной модели, включая подбор оптимальной степени полинома и проверку качества аппроксимации.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

- «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Практическое занятие № 14

Решение задач прогнозирования с помощью экспоненциальной и логарифмической нелинейных моделей

Цель: ознакомление с принципами использования экспоненциальных и логарифмических моделей для прогнозирования, приобретение навыков подбора и настройки таких моделей, разработка методик анализа и проверки качества прогнозов.

Задачи занятия:

- Освоить базовые концепции экспоненциальных и логарифмических функций.
- Научиться подбирать соответствующие нелинейные модели для конкретных задач.
- Развивать умение решать практические задачи прогнозирования с использованием этих моделей.
- Использовать средства Python для анализа и визуализации результатов.

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Краткие теоретические сведения:

Экспоненциальные и логарифмические функции

1. Экспоненциальные функции

Общая форма экспоненциальной функции:

$$y=e^{kt}$$

где:

e — основание натурального логарифма ($\approx 2.718 \approx 2.718$);

k — константа, определяющая скорость роста или убывания;

t — независимая переменная (обычно время).

Свойства экспоненциальной функции:

Функция монотонна: возрастает при положительном k и убывает при отрицательном k .

Всегда проходит через точку $(0,1)$, так как $e^0=1$.

Её производная равна самой себе: $d(e^{kt})/dt=ke^{kt}$.

Быстро растёт или уменьшается при увеличении $|k|$ (это свойство называется асимптотическим поведением).

Области применения:

Рост населения или бактерий (биология, экология).

Радиоактивный распад веществ (химия, физика).

Сложные проценты в финансах.

Распределение вероятностей в математике (нормальное распределение Гаусса, Пуассона).

2. Логарифмические функции

Общая форма логарифмической функции:

$$y=\log_a(x),$$

где:

a — основание логарифма;

x — аргумент (независимая переменная).

Чаще всего используется натуральный логарифм:

$$\ln(x)=\log_e(x).$$

Свойства логарифмической функции:

Монотонная возрастающая функция при $a>1$, убывающая при $0<a<1$.

Имеет вертикальную асимптоту в точке $x=0$.

Определяется только для положительных аргументов: область определения — $(0,+\infty)$.

Производная логарифмической функции: $d(\ln(x))/dx=1/x$.

Области применения:

Измерение интенсивности звука (децибелы).

Масштабирование шкал в науке и технике (астрономии, химии, биологии).

Экономические процессы, характеризующие замедляющийся темп изменений.

Инженерные расчёты и технические измерения.

Взаимосвязь экспоненциальных и логарифмических функций

Эти функции являются обратными друг другу:

$$\log_a(a^k) = k \quad \text{и} \quad a^{\log_a(x)} = x.$$

Это значит, что экспоненциальная функция "растягивает" шкалу, а логарифмическая — сжимает её обратно. Они играют важную роль в многих сферах науки и техники благодаря своим уникальным свойствам и универсальности.

Порядок выполнения работы:

1. Проанализировать условие задачи.
2. Выполнить решение, применяя необходимые формулы.
3. Записать ответ.

Задание:

Практика 1. Экспоненциальная модель прогнозирования численности популяции животных.

Задача: построить экспоненциальную модель для прогнозирования динамики численности популяции кроликов, основываясь на начальных данных.

Шаг 1. Начальные данные:

Год	Численность
2010	100
2011	120
2012	144
2013	173
2014	207

Шаг 2. Построить экспоненциальную модель, подобрав оптимальный параметр k :

Код:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import curve_fit

def exponential_func(t, k):
    return 100 * np.exp(k*(t-2010))

years = np.array([2010, 2011, 2012, 2013, 2014])
population = np.array([100, 120, 144, 173, 207])

p_optimal, _ = curve_fit(exponential_func, years, population)
fitted_population = exponential_func(years, p_optimal)

plt.scatter(years, population, color='black', label='Фактические данные')
plt.plot(years, fitted_population, color='red', label='Экспоненциальная модель')
plt.title('Прогноз численности популяции кроликов')
plt.legend()
plt.show()
```

Практика 2. Логарифмическое сглаживание временного ряда экономических показателей.

Задача: построить логарифмическую модель для прогнозирования доходов компании, учитывая растущую нестабильность рынка.

Шаг 1. Входные данные:

Год	Доход (млрд Р)
2010	10
2011	15
2012	20
2013	25
2014	30

Шаг 2. Построить логарифмическую модель:

Код:

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import curve_fit

def log_function(x, a, b):
    return a*np.log(b*x)

years = np.array([2010, 2011, 2012, 2013, 2014])
revenue = np.array([10, 15, 20, 25, 30])

params, _ = curve_fit(log_function, years, revenue)
fitted_revenue = log_function(years, params[0], params[1])

plt.scatter(years, revenue, color='black', label='Фактические доходы')
plt.plot(years, fitted_revenue, color='blue', label='Логарифмическая модель')
plt.title('Прогноз доходов компании')
plt.legend()
plt.show()

```

3. Самостоятельная работа

Выбор конкретного набора данных (например, темпы распространения вируса гриппа, экономические показатели страны) и проведение полной процедуры анализа и построения соответствующей нелинейной модели (экспоненциальной или логарифмической).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

- «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.