

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Многопрофильный колледж

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

ОП.01 ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

**для обучающихся специальности
09.02.01 Компьютерные системы и комплексы**

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ	3
2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ	4
Практическое занятие № 1	4
Практическое занятие № 2 Операции над матрицами.....	6
Практическое занятие №3 Нахождение обратной матрицы	6
Практическое занятие № 4 Решение системы линейных уравнений по правилу Крамера	8
Практическое занятие № 5 Решение системы линейных уравнений по правилу Гаусса	10
Практическое занятие № 6 Решение системы линейных уравнений матричным методом	13
Практическое занятие №7 Действия с комплексными числами.....	14
Практическое занятие № 8 Операции над векторами. Решение задач	17
Практическое занятие № 9 Составление уравнений прямых и решение задач	18
Практическое занятие № 10 Составление уравнений кривых второго порядка и поверхностей	20
Практическое занятие № 11 Вычисление пределов функций.....	23
Практическое занятие № 12 Вычисление пределов с помощью замечательных пределов, раскрытие неопределенностей.	25
Практическое занятие № 13 Вычисление односторонних пределов, классификация точек разрыва	27
Практическое занятие № 14 Вычисление производных элементарных функций. Правила дифференцирования.....	28
Практическое занятие № 15 Вычисление производных сложных функций	31
Практическое занятие № 16 Производные и дифференциалы высших порядков. Правило Лопиталя.....	33
Практическое занятие № 17 Полное исследование функции. Построение графиков	36
Практическое занятие № 18 Интегрирование заменой переменной в неопределенном интеграле	40
Практическое занятие № 19 Интегрирование по частям в неопределенном интеграле	42
Практическое занятие № 20 Вычисление определенных интегралов.....	44
Практическое занятие № 21 Вычисление площадей фигур с помощью определенных интегралов.....	47
Практическое занятие № 22 Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными.....	49
Практическое занятие № 23 Решение однородных дифференциальных уравнений первого порядка	51
Практическое занятие № 24 Решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.....	52

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки обучающихся составляют практические занятия.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование профессиональных практических умений (умений выполнять определенные действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности) или учебных практических умений (умений решать задачи по математике), необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Элементы высшей математики» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения, обучающийся должен уметь:

Уд 1. Выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений.

Уд 2. Применять методы дифференциального и интегрального исчисления.

Уд 3. Решать дифференциальные уравнения.

Содержание практических занятий ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению **профессиональными компетенциями:**

ПК 1.2. Разрабатывать схемы электронных устройств на основе интегральных схем разной степени интеграции в соответствии с техническим заданием.

ПК 2.3. Выполнять интеграцию модулей в управляющую программу.

А также формированию **общих компетенций:**

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

Практические занятия проводятся в рамках соответствующей темы, после освоения дидактических единиц, которые обеспечивают наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1. Матрицы и определители

Практическое занятие № 1

Вычисление определителей

Цель: формирование умений вычислять определители.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ПК 1.2. Разрабатывать схемы электронных устройств на основе интегральных схем разной степени интеграции в соответствии с техническим заданием

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$
2. Найти значение переменной величины $\begin{vmatrix} -4 & 2x \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -6$
3. Вычислить определитель третьего порядка методом разложения по первой строке $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.
4. Вычислить определитель третьего порядка методом треугольника $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

5. Выполнить действия:

- А) $3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$
- Б) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$
- В) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

Ход работы:

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Таблица вида $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \end{vmatrix}$ называется определителем второго порядка и вычисляется по формуле $\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & l & m \end{vmatrix} = a \cdot m - b \cdot c$

Таблица вида $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ называется определителем третьего порядка и вычисляется двумя способами: методом разложения по первой строке и методом треугольника.

Метод треугольника

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + a_2 \cdot b_3 \cdot c_1 + a_3 \cdot b_1 \cdot c_2) - (a_3 \cdot b_2 \cdot c_1 + a_2 \cdot b_1 \cdot c_3 + a_1 \cdot b_3 \cdot c_2)$$

Метод разложения по первой строке

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Определители любого порядка обладают следующими свойствами:

1. Общий множитель в строке можно выносить за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 8 \end{vmatrix}$$

2. Если каждый элемент в какой-то строке определителя равен сумме двух слагаемых, то исходный определитель равен сумме двух определителей, в которых вместо этой строки стоят первые и вторые слагаемые соответственно, а остальные строки совпадают с исходным определителем.

$$\begin{vmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} & b_{13} + c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3. Если две строки определителя поменять местами, то определитель поменяет знак.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

4. Определитель с двумя равными строками равен нулю

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

5. Определитель с двумя пропорциональными строками равен нулю

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 \end{vmatrix} = 0$$

6. Определитель, содержащий нулевую строку, равен нулю

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

7. Определитель не изменится, если к какой-то его строке прибавить другую строку, умноженную на некоторое число

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Пусть задан определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$. Ко второй строке прибавим третью значение определителя не изменится

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1+2 & 0+3 & -1+1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

8. Определитель верхней (нижней) треугольной матрицы равен произведению его диагональных элементов.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot (-1) = -10$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно.

Тема 1.1. Матрицы и определители

Практическое занятие № 2 Операции над матрицами. Практическое занятие №3 Нахождение обратной матрицы

Цель: формирование умений выполнять операции над матрицами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ПК 1.2. Разрабатывать схемы электронных устройств на основе интегральных схем разной степени интеграции в соответствии с техническим заданием

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

Найти значение функции $f(x) = 4x^2 - 5x + 2$. Если $x = (3 \ -2 \ 1 \ -1)$

Найти значение функции $f(x) = -2x^2 + 3x - 6$. Если $x = (1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 4 \ -1 \ 5 \ 1 \ -3)$

Найти матрицу, обратную данной

$$\text{А) } A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}; \text{ Б) } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & -1 & 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}; \text{ В) } \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & 2 \\ 11 & 10 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

Ход работы:

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Пусть дана квадратная матрица A n -го порядка.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы n -го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$ -го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i -й строки и j -го столбца.

Например, минором элемента a_{12} матрицы A третьего порядка будет:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{23}.$$

Каждая матрица n -го порядка имеет n^2 миноров $(n-1)$ -го порядка.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n -го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца $(i+j)$ - четное число, и отличается от минора знаком, когда $(i+j)$ -нечетное число.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы

Решение.

$$A_{11}=(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{12}=(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{13}=(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{22}=(-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23}=(-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{32}=(-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{33}=(-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Алгоритм вычисления обратной матрицы

1. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица A – вырожденная и обратной матрицы A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица A – невырожденная и обратная матрица существует.

2. Находим матрицу A^T , транспонированную к A .

3. Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы и составляем из них присоединенную матрицу A^* .

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$.

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы A^{-1} , исходя из ее определения $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти матрицу, обратную к данной: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

1. Определитель матрицы $|A| = 5 \neq 0$, т.е. матрица A – невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Находим матрицу A^T , транспонированную к A : $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A^T и составляем из них присоединенную матрицу A^* :

$$A^T_{11}=(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1; \quad A^T_{12}=(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3; \quad A^T_{13}=(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2;$$

$$A^T_{21}=(-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-3; \quad A^T_{22}=(-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1; \quad A^T_{23}=(-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1;$$

$$A^T_{31}=(-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1; \quad A^T_{32}=(-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2; \quad A^T_{33}=(-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3,$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы по формулам $A^{-1}A = AA^{-1} = E$:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{3}{5} \cdot 2 + \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot 1 & \frac{1}{5} \cdot (-1) + \frac{3}{5} \cdot 1 + \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot 1 & \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{3}{5} \cdot 1 + \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot 2 \\ \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 1 & \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot (-1) + \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 1 & \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 2 \\ \frac{1}{5} \cdot 1 + \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot 2 + \frac{3}{5} \cdot 1 & \frac{1}{5} \cdot (-1) + \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot 1 + \frac{3}{5} \cdot 1 & \frac{1}{5} \cdot 1 + \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot 1 + \frac{3}{5} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89-хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-неудовлетворительно.

Тема 1.2. Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 4 Решение системы линейных уравнений по правилу Крамера

Цель: формирование умений решать системы линейных уравнений по правилу Крамера.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;

- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ПК 1.2. Разрабатывать схемы электронных устройств на основе интегральных схем разной степени интеграции в соответствии с техническим заданием

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

Решить системы линейных уравнений с двумя неизвестными по правилу Крамера

$$a) \begin{cases} x + 2y = -2 \\ 3x - y = 8 \end{cases}; b) \begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ x - 5y = 4 \end{cases}; c) \begin{cases} 7x + 3y = 1 \\ 2x - 6y = -10 \end{cases}$$

Решить системы линейных уравнений с тремя неизвестными по правилу Крамера

$$a) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \end{cases} \quad б) \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases} \quad в) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5; \end{cases}$$

Решить системы линейных уравнений с четырьмя неизвестными по правилу Крамера

$$a) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2; \end{cases} \quad d) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

Ход работы:

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Метод Крамера

Теорема Крамера. Пусть Δ – определитель матрицы системы A , а Δ_j – определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j -го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

Формула получила название формулы Крамера.

Алгоритм решения системы линейных уравнений методом Крамера.

1). Вычислить определитель матрицы A , составленной из коэффициентов системы линейных уравнений.

2). Составить матрицы $A_1, A_2, \dots, A_n$, путем замены соответствующих столбцов столбцом свободных членов, и вычислить их определители.

3). Вычислить значения переменных по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \dots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}.$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Пример. Решить систему уравнений методом Крамера:

Решение. Составим матрицу из коэффициентов системы уравнений и вычислим ее

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A| = 5 \neq 0.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то по теореме Крамера система имеет единственное решение.

Вычислим определители матриц A_1, A_2, A_3 , полученных из матрицы A , заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20; \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5$$

Теперь по формулам Крамера найдем значения переменных:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{20}{5} = 4, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{10}{5} = 2, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{5}{5} = 1.$$

Ответ: (4; 2; 1).

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно.

Тема 1.2. Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 5 Решение системы линейных уравнений по правилу Гаусса

Цель: формирование умений решать системы линейных уравнений по правилу Гаусса.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ПК 1.2. Разрабатывать схемы электронных устройств на основе интегральных схем разной степени интеграции в соответствии с техническим заданием

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

Решить системы линейных уравнений с двумя неизвестными по правилу Гаусса

$$a) \begin{cases} x + 2y = -2 \\ 3x - y = 8 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ x - 5y = 4 \end{cases}; \quad c) \begin{cases} 7x + 3y = 1 \\ 2x - 6y = -10 \end{cases}$$

Решить системы линейных уравнений с тремя неизвестными по правилу Гаусса

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5; \end{cases} \end{array}$$

Решить системы линейных уравнений с четырьмя неизвестными по правилу Гаусса

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2; \end{cases} \text{д) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

Ход работы:

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Метод Гаусса (метод исключения неизвестных)

Метод Гаусса является наиболее общим точным методом решения и исследования систем линейных уравнений. Сущность его состоит в том, что посредством элементарных преобразований система приводится к ступенчатому виду, из которого все решения системы могут быть найдены непосредственно.

Элементарными преобразованиями системы являются:

- перестановка любых двух уравнений системы;
- умножение любого уравнения системы на число $\neq 0$;
- вычеркивание уравнения, у которого все коэффициенты и свободный член равны нулю;
- сложение двух уравнений системы.

Любое элементарное преобразование системы не меняет множество ее решений.

Чаще всего преобразования выполняются не с самой системой, а с ее расширенной матрицей, при этом элементарные преобразования системы легко превращаются в элементарные преобразования матрицы.

Пример. Решить систему уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{array}{ll} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \end{cases} & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ -x_2 - 7x_3 = -8, \\ -5x_2 - 13x_3 = -18; \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ -x_2 - 7x_3 = -8, \\ 22x_3 = 22; \end{cases} & \begin{cases} x_1 = 6 - 2x_2 - 3x_3, \\ x_2 = \frac{-8 + 7x_3}{-1}, \\ x_3 = 1; \end{cases} \\ & \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases} \end{array}$$

Ответ: (1; 1; 1).

Пример. Решить систему уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 7x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выполним преобразования с помощью расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -5 \\ 7 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\textcircled{R} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 9 & -5 & 35 \end{array}\right)$$

$$\textcircled{R} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & -20 & -40 \end{array}\right).$$

Полученной матрице соответствует система
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 5x_2 - 5x_3 = 15, \\ -20x_3 = -40, \end{cases}$$
 которая имеет единственное

решение
$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Ответ: (1; 5; 2).

Если система несовместна (т.е. составляющие её уравнения противоречивы и система не имеет решения), то в результате приведения к ступенчатому виду получается абсурдное равенство типа $1=0$. Обратно: если мы получили равенство $1=0$ (вместо единицы в левой части может стоять любое число, не равное нулю), то система несовместна.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1. \end{cases}$$

Пример. Решить систему уравнений методом Гаусса:

Решение. Выполним преобразования с помощью расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \end{array}\right)$$

$$\textcircled{R} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Полученной матрице соответствует система
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ -4x_3 + 5x_4 = -4, \\ 0x_4 = -6. \end{cases}$$
 Третье уравнение системы не имеет решений, следовательно, система решений не имеет.

Ответ: система несовместна.

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$$

Пример. Решить систему уравнений методом Гаусса:

Решение. Запишем расширенную матрицу и выполним первый шаг гауссовых исключений:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right) \textcircled{R} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array}\right).$$

Разделим третью строку на 3 и выполним второй ход гауссовых исключений:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \textcircled{R} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует система уравнений:
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ -x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим: $x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4$ и, подставив в первое уравнение, получим:
 $x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4$.

Итак, $x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4$, $x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4$, x_3, x_4 – любые числа.

Ответ: система неопределенная и имеет бесконечное множество решений.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. $90 \div 100$ – отлично; $80 \div 89$ – хорошо; $70 \div 79$ – удовлетворительно; менее 70 – не удовлетворительно.

Тема 1.2. Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 6 Решение системы линейных уравнений матричным методом

Цель: формирование умений решать системы линейных уравнений матричным методом.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ПК 1.2. Разрабатывать схемы электронных устройств на основе интегральных схем разной степени интеграции в соответствии с техническим заданием

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

Решить системы линейных уравнений с двумя неизвестными по правилу Крамера

a) $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ x - 5y = 4 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 7x + 3y = 1 \\ 2x - 6y = -10 \end{cases}$

Решить системы линейных уравнений с тремя неизвестными по правилу Крамера

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5; \end{cases}$

Решить системы линейных уравнений с четырьмя неизвестными по правилу Крамера

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

Ход работы:

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно.

Тема 1.3. Комплексные числа

Практическое занятие №7 Действия с комплексными числами

Цель: формирование умений выполнения действий с комплексными числами в алгебраической и тригонометрических формах.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ПК 1.2. Разрабатывать схемы электронных устройств на основе интегральных схем разной степени интеграции в соответствии с техническим заданием

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

1. Даны комплексные числа: $z_1 = (7; 1)$, $z_2 = (-1, 5; 1, 5)$, $z_3 = (4; -3)$.
Записать эти числа в алгебраической форме.

2. Вычислить:

1) $z_1 + z_2$;

2) $z_2 - z_3$;

3) $\frac{z_1}{z_3}$;

4) $z_2 \cdot z_3$;

5) z_1^5 ;

3. Вычислить: $\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8$

4. Даны комплексные числа: $z_1 = (-3; -5)$, $z_2 = (-7, 2; 7, 2)$, $z_3 = (2; 6)$.
Записать эти числа в тригонометрической форме.

5. Вычислите: $z_2 \cdot z_3$; $\frac{z_1}{z_3}$; z_1^5 ; $\sqrt{z_2}$.

6. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

a) $\left(3 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)\right)^2 \left(3 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)\right)^2$ b) $\frac{24(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ) 24(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)}{3(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) 3(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)}$

Краткие теоретические сведения:

Комплексным числом называется выражение вида $a + bi$, где a и b – действительные числа, а символ i удовлетворяет условию $i^2 = -1$.

Комплексные числа $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ называются равными, если $a = c$ и $b = d$.

Комплексные числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ называются сопряженными. Числа $a + bi$ и $-a - bi$ называются противоположными.

Модулем комплексного числа называется длина радиус-вектора соответствующей точки комплексной плоскости. Обозначается $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$.

Запись комплексного числа z в виде $a + bi$, где a и $b \in \mathbb{R}$, называется алгебраической формой комплексного числа.

1. **Сумма** двух чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ равна $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

2. **Разность** двух чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ равна $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.

3. **Произведением** комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ называется комплексное число $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

4. **Частным** комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di \neq 0$ называется комплексное число $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$.

5. **Возведение комплексного числа в степень** $n \in \mathbb{N}$ рассматривается как частный случай умножения комплексного числа n раз.

Степени числа i :

$$i^n = \begin{cases} i, & \text{если } n = 4k + 1 \\ -1, & \text{если } n = 4k + 2 \\ -i, & \text{если } n = 4k + 3 \\ 1, & \text{если } n = 4k \end{cases}$$

Тригонометрической формой комплексных чисел называется запись их в виде:

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi).$$

При выполнении действий над комплексными числами в тригонометрической форме используются следующие формулы:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Для извлечения корня n -й степени из комплексного числа в тригонометрической форме

$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ используется формула :

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \quad \omega_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \text{ где } \sqrt[n]{r} - \text{арифметический корень, } k=0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Алгоритм перехода от алгебраической формы к тригонометрической:

Пусть комплексное число задано в алгебраической форме $z = a + bi$.

1) Модуль $|z|$ однозначно определяется по формуле $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2) Аргумент φ определяется из формул $\cos \varphi = \frac{a}{r}$, $\sin \varphi = \frac{b}{r}$.

Значения аргумента комплексного числа можно находить и так:

- Определить, в какой четверти находится вектор (использовать геометрическую интерпретацию числа) $z = a + bi$

- Решив уравнение $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$, получаем, что
 $\arg z = \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ для внутренних точек 1 и 4 четвертей,
 $\arg z = \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi$ для внутренних точек 2 четверти,
 $\arg z = \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \pi$ для внутренних точек 3 четверти.

Если точка z лежит на действительной или мнимой оси, то $\arg z$ можно найти непосредственно.

3) Найдя модуль и аргумент комплексного числа, его можно записать в тригонометрической или показательной форме $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ или $z = re^{i\varphi}$.

Порядок выполнения работы:

- Запишите комплексные числа в алгебраической форме $z = a + bi$.
- Выполните действия над комплексными числами в алгебраической форме, используя формулы:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

Ход работы:

- Получить у преподавателя задания.
- Оформить решение в тетради для практических работ.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100 – отлично; 80 ÷ 89 – хорошо; 70 ÷ 79 – удовлетворительно; менее 70 – не удовлетворительно.

Тема 2.1. Алгебра векторов.
Практическое занятие № 8 Операции над векторами. Решение задач

Цель: формирование умений решать задачи по теории алгебры векторов.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ПК 1.2. Разрабатывать схемы электронных устройств на основе интегральных схем разной степени интеграции в соответствии с техническим заданием

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

1. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{i} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$. Выполните следующие действия: а) вычислите смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $5\vec{c}$; б) найдите модуль векторного произведения $3\vec{c}$ и $\vec{b}$; в) вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $3\vec{b}$; г) проверьте, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$; д) проверьте, будут ли компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2, 3, 4)$, $B(4, 7, 3)$, $C(1, 2, 2)$, $D(-2, 0, -1)$. Вычислить: а) площадь грани ABC ; б) объем пирамиды $ABCD$.

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

Ход работы:

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ с общим началом в точке O называется правой, если кратчайший поворот оси вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ со стороны вектора $\vec{c}$ осуществляется против часовой стрелки (рис. а). В противном случае тройка векторов называется левой (рис. б).



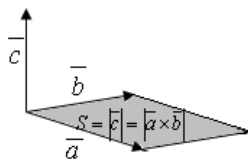
Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который удовлетворяет трем условиям:

- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$;
- 2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
- 3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – правая тройка векторов.

Из определения векторного произведения следует, что $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

Если известны координаты векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то координаты их векторного произведения вычисляются по формуле

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$



Смешанным произведением трех векторов $\vec{b}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число, которое получается, если векторы $\vec{b}$ и $\vec{b}$ умножить векторно, а затем результат умножить на вектор $\vec{c}$ скалярно. Обозначается смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Итак, по определению $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$.

Пусть известны координаты векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$. Тогда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Условие компланарности трех векторов $\vec{b}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ имеет вид:

$$\vec{b}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — компланарны} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Геометрический смысл смешанного произведения состоит в следующем. Смешанное произведение трех векторов $\vec{b}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ равно объему V параллелепипеда, построенного на этих векторах, если $\vec{b}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — правая тройка. Если же эта тройка левая, то смешанное произведение отрицательно и равно объему параллелепипеда с противоположным знаком:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{cases} V, & \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — правая тройка,} \\ -V, & \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — левая тройка.} \end{cases}$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ — 1 балл. За неправильный ответ — 0 баллов. 90 ÷ 100 — отлично; 80 ÷ 89 — хорошо; 70 ÷ 79 — удовлетворительно; менее 70 — не удовлетворительно

Тема 2.2. Уравнение прямой на плоскости и в пространстве

Практическое занятие № 9 Составление уравнений прямых и решение задач

Цель: формирование умений составлять уравнения прямых.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ПК 1.2. Разрабатывать схемы электронных устройств на основе интегральных схем разной степени интеграции в соответствии с техническим заданием

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

1. Даны вершины $A(3, 1)$, $B(-13, -11)$, $C(-6, 13)$ треугольника ABC . Составить уравнения сторон треугольника ABC и найти угол между прямыми AB и BC .

2. Найти точку пересечения прямых, заданных уравнениями: а) $2x - y + 3 = 0$ и $4x + 8y + 17 = 0$; б) $2x - y + 3 = 0$ и $4x - 8y - 11 = 0$.

3. Даны вершины $A(4, 3)$, $B(-3, -3)$, $C(2, 7)$ треугольника ABC . Найти: а) уравнение стороны AB ; б) уравнение высоты CH ; в) уравнение медианы AM ; г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH ; д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB ; е) расстояние от точки C до прямой AB .

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

Ход работы:

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на плоскости любая прямая может быть задана уравнением первой степени

$Ax + By + C = 0$, где A, B, C – определенные числа, $A^2 + B^2 \neq 0$. И обратно, всякое уравнение вида $Ax + By + C = 0$ определяет прямую на плоскости.

Данное уравнение называется *общим уравнением прямой* на плоскости, коэффициенты уравнения A, B определяют координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного этой прямой. Этот вектор называется *нормальным вектором* прямой.

Укажем основные способы задания прямой на плоскости и соответствующие уравнения.

1. Прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B)$. В этом случае прямая описывается общим уравнением

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

2. Прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{s} = (m, n)$. В этом случае прямая задается *каноническим уравнением*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

или *параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases}$$

где t – параметр, принимающий любые числовые значения.

3. Прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ с заданным углом наклона α , определяемым угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg} \alpha$ (рис. 1). В этом случае уравнение прямой имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$.



Рис. 1.

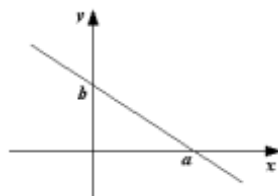


Рис. 2.

4. Прямая отсекает на координатных осях заданные отрезки (рис. 2). В этом случае используют уравнение прямой в отрезках $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

5. Прямая задана углом наклона α , определяемым угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg} \alpha$, и отрезком b , отсекаемым на оси Oy . В этом случае используют уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$.

Расстоянием точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно

Тема 2.2. Уравнение прямой на плоскости и в пространстве

Практическое занятие № 10 Составление уравнений кривых второго порядка и поверхностей

Цель: формирование умений составлять уравнения кривых и поверхностей 2-го порядка.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ПК 1.2. Разрабатывать схемы электронных устройств на основе интегральных схем разной степени интеграции в соответствии с техническим заданием

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

1. Определить координаты центра и радиус окружности $x^2 + y^2 - 4x + 3y = 0$.
2. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A(6, -1)$ с центром в точке пересечения прямых $3x - 4y - 5 = 0$ и $4x + 3y - 15 = 0$.
3. Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $4x^2 + 25y^2 - 100 = 0$.
4. Определить вид и расположение кривой (полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет) $5x^2 + 16y^2 + 10x - 96y + 69 = 0$.
5. Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку $A(1, -3)$ и симметрична относительно оси Ox . Найти фокус и уравнения параболы и ее директрисы.

Парабола с вершиной в точке $O(2, 1)$ проходит через точку $A(6, 3)$. Составить уравнение параболы

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

Ход работы:

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Общее уравнение кривых второго порядка имеет вид

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, в котором A , B и C не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Эллипс и окружность

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 , называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$, причем эта величина больше расстояния $2c$ между фокусами.

Если за ось Ox принять прямую, проходящую через фокусы F_1 и F_2 , а за ось Oy – перпендикуляр к оси Ox , проходящий через середину отрезка F_1F_2 (рис. 1), то уравнение

эллипса примет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Это уравнение называют *каноническим уравнением эллипса*. При этом a – большая полуось эллипса, b – его малая полуось, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ – фокусы эллипса.

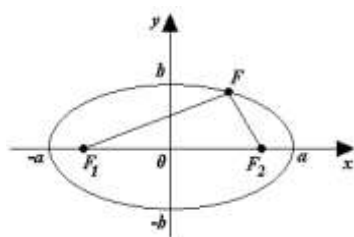


Рис. 1.

Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ называется *эксцентриситетом эллипса*.

При $a < b$ уравнение также задает эллипс, но у такого эллипса фокусы расположены на оси Oy , параметр b задает большую полуось, а a – малую полуось. Параметр c , равный половине расстояния между фокусами, можно найти по формуле $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, а эксцентриситет – по формуле $\varepsilon = \frac{c}{b}$.

При $a = b$ уравнение задает окружность с центром в начале координат и радиусом a .

Окружность радиуса R с центром в точке $C(x_0, y_0)$ задается уравнением $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 , называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$, причем эта величина меньше расстояния $2c$ между фокусами.

Если за ось Ox принять прямую, проходящую через фокусы F_1 и F_2 , а за ось Oy – перпендикуляр к оси Ox , проходящий через середину отрезка F_1F_2 (рис. 2), то уравнение гиперболы примет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Это уравнение называют *каноническим уравнением гиперболы*. При этом a – действительная полуось гиперболы, b – его мнимая полуось, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ – фокусы эллипса.

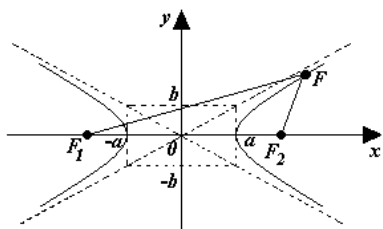


Рис. 2.

Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ называется *эксцентриситетом гиперболы*. Прямые $y = \pm \frac{b}{a}x$, к которым гипербола неограниченно приближается на бесконечности, представляют собой асимптоты гиперболы.

Уравнение $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, определяет гиперболу, но у этой гиперболы фокусы расположены на оси Oy , параметр b есть действительная полуось, параметр a – мнимая полуось, а эксцентриситет вычисляется по формуле $\varepsilon = \frac{c}{b}$.

Парабола

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Если за ось Ox принять прямую, проходящую через фокус перпендикулярно директрисе, а за ось Oy – прямую, проходящую через середину перпендикуляра, опущенного из фокуса на

директрису (рис. 3), то уравнение параболы примет вид $y^2 = 2px$, где p – расстояние от фокуса до директрисы. Это уравнение называют *каноническим уравнением параболы*. При этом $x = -\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы, а фокус $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

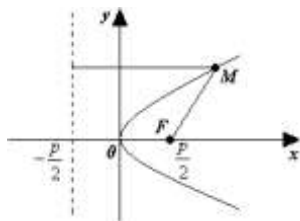


Рис. 3.

Уравнение $x^2 = 2py$ задает параболу, симметричную относительно оси Oy . В этом случае директриса параболы $y = -\frac{p}{2}$, а фокус $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно

Тема 3.1. Предел и непрерывность функции

Практическое занятие № 11 Вычисление пределов функций.

Цель: формирование умений вычислять пределы функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ПК 1.2. Разрабатывать схемы электронных устройств на основе интегральных схем разной степени интеграции в соответствии с техническим заданием.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

Вычислить пределы функций уйдя от неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\text{а)} \frac{10x^2-5x}{x^2-0.25}; \text{б)} \frac{2x^2+x-15}{3x^2+7x-6}; \text{в)} \frac{x^3+x+2}{x^3+1}; \text{г)} \frac{2x^3-54x}{x^2+x+1}; \text{д)} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}.$$

Вычислить пределы функций уйдя от неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\text{а)} \frac{x^3-3x+7}{5x^3+x-2}; \text{б)} \frac{x^2+x^3}{x^4+x^5}; \text{в)} \frac{x^4+x^5}{x^2+x^3}; \text{г)} \frac{12x^5-3x^3+2x}{x^3+3x^2-1}. \text{д)} } \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot (\sqrt{x^2+1} - x);$$

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

Ход работы:

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Раскрытие неопределенностей различных типов

Для того чтобы найти предел элементарной функции, когда аргумент стремится к значению, принадлежащему области определения этой функции, нужно в выражение функции вместо аргумента подставить его предельное значение.

Далеко не всякая подстановка предельного значения в функцию вместо независимой переменной может сразу привести к нахождению предела. Случаи, в которых подстановка предельного значения в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к

ним относятся неопределенности видов $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $\left(\frac{0}{0}\right)$, $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$, (1^∞) , (∞^0) , (0^0) . Рассмотрим несколько типов примеров, классифицируя их по виду неопределенности и предельному значению x .

1-й тип. Рассмотрим примеры вида $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ с неопределенностью вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ в общем случае – сложные степенные или показательные функции. В случае степенных функций необходимо выносить за скобку в числителе и в знаменателе дроби x с наибольшим показателем степени среди всех слагаемых дроби; в случае показательных функций за скобку выносятся наиболее быстро возрастающее слагаемое среди всех слагаемых дроби. После сокращения дроби неопределенность устраняется.

Полезно запомнить правило:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} 0, & \text{если } n < m, \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{если } n = m, \\ \infty, & \text{если } n > m. \end{cases}$$

2-й тип. Рассмотрим примеры вида $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ с неопределенностью вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. В этом случае необходимо разложить на множители и числитель, и знаменатель дроби или домножить и числитель, и знаменатель дроби на одно и то же выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения. После сокращения дроби неопределенность устраняется.

3-й тип. Рассмотрим примеры с неопределенностью вида $(\infty - \infty)$. Если функция, стоящая под знаком предела, представляет собой алгебраическую сумму дробей, то неопределенность устраняется или приводится к 2-му типу после приведения дробей к общему знаменателю. Если упомянутая функция представляет собой алгебраическую сумму иррациональных выражений, то неопределенность устраняется или приводится к 1-му типу путем домножения и деления функции на одно и то же (сопряженное) выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно

Тема 3.1. Предел и непрерывность функции

Практическое занятие № 12 Вычисление пределов с помощью замечательных пределов, раскрытие неопределенностей.

Цель: формирование умений вычислять пределы функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ПК 1.2. Разрабатывать схемы электронных устройств на основе интегральных схем разной степени интеграции в соответствии с техническим заданием.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

Вычислить пределы функций применяя первый замечательный предел или свойство эквивалентно малых величин

a) $\frac{4\sin 2x}{\sin 3x}$; b) $\frac{\sin 3x}{\sin^2 2x}$; c) $\frac{4\sin x^3}{1-\cos^2 x}$; d) $\frac{5\arcsin 2x}{\arctg 4x}$

Вычислить пределы функций применяя второй замечательный предел

a) $\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n}$; b) $\left(1 - \frac{4}{n}\right)^{6n}$; c) $\left(1 + \frac{3}{4n}\right)^{n^2}$; d) $\left(\frac{5+3n}{4-2n}\right)^n$

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

Ход работы:

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Замечательные пределы.

Первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Второй замечательный предел (число e): $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ или $\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$.

Для того что бы избавиться от неопределенности вида (1^∞) необходимо выделить целую дробь (которая должна быть равна 1) в выражении, стоящем под знаком предела, которое представляет собой степенно-показательную функцию. Неопределенность устраняется при помощи выделения второго замечательного предела.

Например:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 0)^\infty = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{k}\right)}\right)^{k \cdot \frac{x}{k}} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{ky} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \right]^k = l^k;$$

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^n = (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}} \right]^4 = l^4;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{4n}\right)^{n+2} = (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{3}{4n}\right)^{\frac{4n}{3}} \right]^{\frac{3}{4n}(n+2)} = l^{\frac{3(n+2)}{4n}} = l^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{4n}} = l^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{4n} + \frac{2}{n}} =$$

$$l^{\frac{3+0}{4}} = l^{\frac{3}{4}};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x; \text{ Данный предел можно вычислить двумя способами:}$$

1 способ:

Разделим числитель на знаменатель, выделив целую часть:

$$\frac{-x + 3}{x - 2} = \frac{x - 2}{x - 2} + \frac{5}{x - 2} \Rightarrow \frac{x + 3}{x - 2} = 1 + \frac{5}{x - 2};$$

$$\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x = \left(1 + \frac{5}{x-2}\right)^x = \left[\left(1 + \frac{5}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{5}} \right]^{\frac{5x}{x-2}} = l^{\frac{5x}{x-2}} = l^{\frac{5x}{x-2}} = l^{\frac{5x}{x-2}} = l^{\frac{5x}{x-2}} = l^{\frac{5x}{x-2}} = l^5;$$

2 способ:

Поделив числитель и знаменатель дроби на x , сведем данный предел к частному пределов:

$$\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x = \left(\frac{\frac{x}{x} + \frac{3}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}}\right)^x = \left(\frac{1 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{2}{x}}\right)^x = \frac{\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x}{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^x} = \frac{l^3}{l^{-2}} = l^5.$$

Пределы от некоторых тригонометрических функций необходимо решать применяя первый замечательный предел или закон эквивалентных величин при условии $x \rightarrow 0$.

Эквивалентными называются бесконечно малые величины, предел от понятия которых равен единице.

В курсе математического анализа доказывается, что при отыскании предела отношений двух бесконечно малых величин можно заменить на предел эквивалентных им величин.

$$\left(\sin x \sim x; \sin^2 \frac{x}{3} \sim \left(\frac{x}{3}\right)^2; x \sim x \dots \right)$$

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$; так как $\sin x$ и x при $x \rightarrow 0$ эквивалентные бесконечно малые величины, поэтому в данном выражении можно $\sin \frac{x}{2}$ заменить его аргументом $\frac{x}{2}$. Тогда решение выглядит следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{4}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{4x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sin ax}{\sin bx} = |\sin \sin ax \sim ax \quad \sin bx \sim bx| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{b} = \frac{a}{b};$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100 – отлично; 80 ÷ 89 – хорошо; 70 ÷ 79 – удовлетворительно; менее 70 – не удовлетворительно

Тема 3.1. Предел и непрерывность функции

Практическое занятие № 13 Вычисление односторонних пределов, классификация точек разрыва

Цель: формирование умений вычислять односторонние пределы и классифицировать точки разрыва.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ПК 1.2. Разрабатывать схемы электронных устройств на основе интегральных схем разной степени интеграции в соответствии с техническим заданием.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

1. Исследовать на непрерывность и построить график функции:

$$y(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ 1-x, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{1-x}, & x > 1. \end{cases}$$

а) $y = \frac{x^3 + 1}{x + 1}$; б) $y = 3^{\frac{1}{x+1}} + 1$; в)

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

Ход работы:

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Непрерывность функции определяется в точках, принадлежащих области определения функции. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 . Эта функция называется *непрерывной* в точке x_0 , если:

- 1) существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ функции $f(x)$ в точке x_0 ;
- 2) этот предел равен значению функции в точке x_0 .

Иначе говоря, f непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \stackrel{def}{\Leftrightarrow} f(x_0) \stackrel{def}{=} f(x_0)$. (1)

Непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 означает, что в этой точке существуют односторонние пределы, равные значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0), \quad (2)$$

где $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$ – правосторонний предел функции f в точке x_0 ; $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$ – левосторонний предел функции f в точке x_0 ; $f(x_0)$ – значение функции f в точке x_0 .

Если условия (1) или (2) в точке x_0 не выполняются, то точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Если существуют конечные односторонние пределы $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$, причем не все три числа $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$, $f(x_0)$ равны между собой, то x_0 называют *точкой разрыва первого рода*.

Если в точке разрыва x_0 хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ не существует или бесконечен, то x_0 называют *точкой разрыва второго рода*.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100 – отлично; 80 ÷ 89 – хорошо; 70 ÷ 79 – удовлетворительно; менее 70 – не удовлетворительно

Тема 3.2. Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной

Практическое занятие № 14 Вычисление производных элементарных функций. Правила дифференцирования

Цель: формирование умений вычислять производные элементарных функций с использованием правил дифференцирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- определять этапы решения задачи;
- определять задачи для поиска информации.

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.2. Разрабатывать схемы электронных устройств на основе интегральных схем разной степени интеграции в соответствии с техническим заданием.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

Задание 1: Найти производные функций используя правила вычисления и таблицу производных элементарных функций.

1) $y = 7x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2;$

2) $y = 5\sqrt{x} - \frac{2\sqrt{x}}{x^3} + \frac{x^4}{\sqrt{x}};$

3) $y = 3\operatorname{ctgx} + 5\ln x - 3^x;$

4) $y = (9 + x^2)(2x - 1);$

5) $y = \frac{x^3}{3x+5};$

Задание 2: Вычислить производную функции в точке.

6) $f(t) = 0,5t + 0,6t^2 + 0,8t + 8; \quad f'(1) - ?$

7) $f(x) = \operatorname{ctgx} - \operatorname{tgx}; \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) - ?$

8) $f(x) = 2 \cdot 5^x + 3 \cdot e^x; \quad f'(0) - ?$

9) $f(x) = \cos x \cdot (1 + \sin x); \quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) - ?$

10) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}; \quad f'(1) - ?$

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

Ход работы:

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Дана функция $y = f(x)$ которая определена в некоторой окрестности точки x . Пусть x_1 и x_2 – значение аргумента, а $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ – соответствующие значение функции.

Разность $\Delta x = x_2 - x_1$ – называется приращением аргумента, а разность $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$ – приращение функции на $[x_1; x_2]$.

Дф: производной функции $y = f(x)$ по аргументу x называют конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последний стремится к нулю

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx};$$

Операция нахождения производной называется дифференцированием. Геометрическая производная представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции

$$y = f(x); \text{ т.е. } y' = f'(x) = k = \operatorname{tg} \alpha.$$

Физический смысл производной может быть определен через мгновенную скорость:

Для выполнения данной работы необходима таблица

Таблица производных основных элементарных функций.

$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
---------------------	----------------	----------------------	--------------------------	-----------------------------------

$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$c' = 0, c = \text{const};$	$x' = 1;$	$(CU)' = C \cdot U'$		
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$(u \cdot v)' = u'v + uv'$ $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \quad \left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}, \quad v(x) \neq 0$		

Решение типовых задач:

Задание 1: Найти производные функций используя правила вычисления и таблицу производных элементарных функций.

1. $y = 6x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 4$

$$y' = (6x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 4)' = 24x^3 - 24x^2 + 4x;$$

2. $y = (5x - 4) \cdot (x + 2)$

$$y' = ((5x - 4)(x + 2))' = \begin{vmatrix} u = 5x - 4; & u' = 5 \\ v = x + 2; & v' = 1 \\ (u \cdot v)' = u'v + uv' \end{vmatrix} =$$

$$= 5(x + 2) + 1(5x - 4) = 5x + 10 + 5x - 4 = 10x + 6$$

3. $y = \frac{x+1}{x}$

$$y' = \left(\frac{x+1}{2x}\right)' = \begin{vmatrix} u = x+1; & u' = 1 \\ v = 2x; & v' = 2 \\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{1 \cdot 2x - 2(x+1)}{(2x)^2} = \frac{2x - 2x - 2}{4x^2} =$$

$$= \frac{-2}{4x^2} = -\frac{1}{2x^2};$$

Задание 2: Вычислить производную функции в точке.

1) $y = 3x^5 - 8x^4 + 9x^2 - 4$

$$y'(-1) = 3 \cdot (-1)^5 - 8 \cdot (-1)^4 + 9(-1)^2 - 4 = -3 - 8 + 9 - 4 = -6.$$

2) $y = 5 \sin x \cos x$

$$y' \left(\frac{\pi}{2}\right) = 5((\sin x)' \cdot \cos x + \sin x (\cos x)') = 5(\cos^2 x - \sin^2 x) = 5(\cos 2x) = 5(\cos 2 \cdot \frac{\pi}{2}) =$$

$$5 \cos \pi = 5 \cdot (-1) = -5$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно

Тема 3.2. Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной

Практическое занятие № 15 Вычисление производных сложных функций

Цель: формирование умений вычислять производные сложных функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- определять этапы решения задачи;
- определять задачи для поиска информации.

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.2. Разрабатывать схемы электронных устройств на основе интегральных схем разной степени интеграции в соответствии с техническим заданием.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

Задание 1: Найти производные функций, используя правила вычисления и таблицу производных сложных функций.

Задание 2: Вычислить производную функции в точке.

«Варианты заданий»

Задание №1	Задание №2
1) $y = (mx^k + 4)^p$	2) $y = m * \cos(px^k - m); y'(1)=?$
3) $y = (e^{px^m} + kx)$	4) $y = k \operatorname{tg}(mx^p); y'(-1)=?$
5) $y = 12^{px^m - mx}$	6) $y = \operatorname{ctg}(px^k - mx); y'(2)=?$
7) $y = \ln(x^k + px^m)$	8) $y = \sqrt{mp^x + kx}; y'(-2)=?$
9) $y = \log_7(mx + k)$	10) $y = (e^{px+k}) * \sqrt{x^p + mx}; y'(3)=?$
11) $y = p * \sin(kx + m)$	12) $y = \frac{\ln(px^n)}{k * \cos mx}; y'(-3)=?$

Где p – число букв в имени; m – число букв в фамилии; k – число букв отчества.

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

Ход работы:

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Пусть $y=f(u)$ и $u=u(x)$ – дифференцируемые функции и определена сложная функция $y=f(u(x))$. Тогда сложная функция дифференцируема и равна произведению производной функции $y=f(u)$ в точке $u=u(x)$ и производной функции $u=u(x)$ в точке x , т.е. $y' = f'(u) \cdot u'$.

Если $y=f(x)$ – дифференцируемая и строго монотонная функция на промежутке X , то функция, обратная к данной $x=\varphi(y)$, также дифференцируема и ее производная определяется

соотношением: $x'_y = \frac{1}{y'_x}, \quad y'_x \neq 0$.

Для выполнения данной работы необходима таблица дифференцирования сложных функций

Формулы дифференцирования

№	Сложные функции		
1	$(u^n)' = nu^{n-1}u'$	6	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
2	$(e^u)' = e^u u'$	7	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
3	$(a^u)' = a^u \ln a u'$	8	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} u' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
4	$(\ln u)' = \frac{1}{u} u' = \frac{u'}{u}$	9	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
5	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u' = \frac{u'}{u \ln a}$	10	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Решение типовых задач

Найдите производную следующих функций:

- 1) $y = (2x^3 - 4x)^7$;
- 2) $y = \sqrt{x^2 - 1}$;
- 3) $y = \sin(2x - x^2)$;
- 4) $y = 6 \ln 5x$.

1) Для решения используем формулу № 1

$$y' = ((2x^3 - 4x)^7)' = 7(2x^3 - 4x)^6 \cdot (2x^3 - 4x)' = \\ = 7(2x^3 - 4x)^6 \cdot (6x^2 - 4) = (42x^2 - 28)(2x^3 - 4x)^6.$$

2) Решение проведем по формуле №10

$$y' = (\sqrt{x^2 - 1})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot (x^2 - 1)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}$$

3) Применим формулу № 6:

$$y'(\sin(2x - x^2))' = \cos(2x - x^2) \cdot (2x - x^2)' = (2x - x^2)' \cdot \cos(2x - x^2).$$

4) Воспользуемся формулой №4:

$$y' = (6 \ln 5x)' = 6(\ln 5x)' = 6 \cdot \frac{1}{5x} \cdot (5x)' = \frac{6 \cdot 5}{5x} = \frac{6}{x}.$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно

Тема 3.2. Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной

Практическое занятие № 16 Производные и дифференциалы высших порядков. Правило Лопиталя

Цель: формирование умений вычислять производные функций высших порядков.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- определять этапы решения задачи;
- определять задачи для поиска информации.

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.2. Разрабатывать схемы электронных устройств на основе интегральных схем разной степени интеграции в соответствии с техническим заданием.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

1. Найдите y''' от следующих функций

1) $y = (mx^k + 4)^p$	2) $y = m * \cos(px^k - m)$
3) $y = (e^{px^m} + kx)$	4) $y = ktg(mx^p)$
5) $y = 12^{px^m - mx}$	6) $y = ctg(px^k - mx)$
7) $y = \ln(x^k + px^m)$	8) $y = \sqrt{mp^x + kx}$

9) $y = \log_7(mx + k)$	10) $y = (e^{px+k}) * \sqrt{x^p + mx}$
11) $y = p * \sin(kx + m)$	12) $y = \frac{\ln(px^n)}{k * \cos mx}$

где p – число букв в имени
 m – число букв в фамилии
 k – число букв отчества

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя: а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \ln(1+x)}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$; в)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\ln(e^{x^2} + 1)}.$$

3. Вычислить приближенно а) $\sqrt{1,1}$; б) $e^{-0,1}$.

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

Ход работы:

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Производной второго порядка (второй производной) функции

$y = f(x)$ называют производную от ее производной. Вторую производную обозначают так:

y'' , или $\frac{d^2 y}{dx^2}$, или $f''(x)$. Если $S = f(t)$ – закон прямолинейного движения точки, то вторая

производная пути по времени $\frac{d^2 S}{dt^2}$ есть ускорение этого движения.

Производная третьего порядка функции $y=f(x)$ есть производная от производной второго порядка:

$$y''' = (y'')'.$$

Вообще, производной n -го порядка функции $y = f(x)$ называют производную от производной

$(n-1)$ -го порядка: $y^{(n)}$. Обозначают n -ю производную так: $y^{(n)}$, или $\frac{d^n y}{dx^n}$, или $f^{(n)}(x)$.

Производные высших порядков вычисляют последовательным дифференцированием данной функции.

Решение типовых задач:

Вычислите производную третьего порядка от следующих функций:

1) $y = 6x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 4;$

2) $y = (5x - 4) * (x + 2);$

3) $y = \frac{x+1}{x};$

1) $y' = (6x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 4)' = 24x^3 - 24x^2 + 4x;$

$y'' = (24x^3 - 24x^2 + 4x)' = 72x^2 - 48x + 4; y''' = (72x^2 - 48x + 4)' = 144x - 48.$

$$2) y' = ((5x - 4)(x + 2))' = \begin{vmatrix} u = 5x - 4; & u' = 5 \\ v = x + 2; & v' = 1 \\ (u * v)' = u'v + uv' \end{vmatrix} =$$

$$= 5(x + 2) + 1(5x - 4) = 5x + 10 + 5x - 4 = 10x + 6.$$

$$y'' = (10x + 6)' = 10$$

$$y''' = 10' = 0.$$

$$y' = \left(\frac{x+1}{2x} \right)' = \left| \begin{array}{l} u = x+1; \quad u' = 1 \\ v = 2x; \quad v' = 2 \end{array} \right| = \frac{1 \cdot 2x - 2(x+1)}{(2x)^2} = \frac{2x - 2x - 2}{4x^2} =$$

$$= \frac{-2}{4x^2} = -\frac{1}{2x^2};$$

$$y'' = \left(-\frac{1}{2x^2} \right)' = -\frac{1}{2} \cdot (x^{-2})' = -\frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot x^{-3} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

$$y''' = \left(\frac{1}{x^3} \right)' = (x^{-3})' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4};$$

Правило Лопиталья состоит в следующем. Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле: $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Таким образом, правило Лопиталья используется для раскрытия неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0} \right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$.

Понятие дифференциала функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке X и дифференцируема в некоторой окрестности точки $x \in X$. Тогда существует конечная производная $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

На основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций можно записать $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая величина при $\Delta x \rightarrow 0$, откуда $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.

Таким образом, приращение функции Δy состоит из двух слагаемых: 1) линейного относительно Δx ; 2) нелинейного (представляющего бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx).

Дифференциалом функции называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной: $dy = f'(x) \cdot \Delta x$.

Пример. Найти приращение и дифференциал функции $y = 2x^2 - 3x$ при $x=10$ и $\Delta x = 0,1$.
Решение. Приращение функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [2 \cdot (x + \Delta x)^2 - 3 \cdot (x + \Delta x)] - [2x^2 - 3x] = \Delta x \cdot (4x + 2\Delta x - 3).$$

$$\text{Дифференциал функции } dy = f'(x) \cdot \Delta x = (4x - 3) \cdot \Delta x.$$

При $x=10$ и $\Delta x = 0,1$ имеем $\Delta y = 3,72$ и $dy = 3,70$.

Дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной: $dx = \Delta x$.

Поэтому формулу для дифференцирования функции можно записать в виде $dy = f'(x) \cdot dx$.

Свойства дифференциала в основном аналогичны свойствам производной.

- | | |
|-----------------------------|--|
| 1. $dc=0$, где $c=const$. | 4. $d(uv)=v du+u dv$. |
| 2. $d(cu)=cdu$. | 5. $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v du-u dv}{v^2}$ |
| 3. $d(u \pm v)=du \pm dv$. | |

Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Из изложенного выше следует, что приращение функции Δu отличается от её дифференциала du на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем $dy = f'(x) \cdot \Delta x$. Поэтому при достаточно малых значениях Δx $\Delta u \approx dy$ или $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x$, откуда $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$.

Чем меньше значение Δx , тем точнее формула.

Данную формулу можно использовать для вычисления приближенных значений некоторых выражений, например: а) вычисление корня n -й степени; б) возведение числа в n -ю степень; в) вычисление значения тригонометрической функции, и т.д.

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt[4]{16,64}$.

Решение. Рассматривая выше записанную формулу $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$, в качестве x возьмём число, наиболее близкое к 16,64, но чтобы был известен $\sqrt[4]{x}$, при этом Δx должно быть достаточно малым. Очевидно, следует взять $x=16$, $\Delta x=0,64$.

Итак, $\sqrt[4]{16,64} \approx \sqrt[4]{16} + \frac{\sqrt[4]{16}}{4 \cdot 16} \cdot 0,64 = 2,02$.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно

Тема 3.2. Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной

Практическое занятие № 17 Полное исследование функции. Построение графиков

Цель: формирование умений исследования функции и построения графиков.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- определять этапы решения задачи;
- определять задачи для поиска информации.

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.2. Разрабатывать схемы электронных устройств на основе интегральных схем разной степени интеграции в соответствии с техническим заданием.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

- 1) Исследуйте функцию и постройте ее график.

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 2;$$

- 2) Проведите полное исследование функций и постройте их графики

$$y = \frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{6}x^3 + 2x$$

- 3) Постройте графики дробно- рациональных функций

$$y = \frac{x-2.5}{x^2-4}$$

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

Ход работы:

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Понятие производной позволяет провести подробное исследование функций с целью более точного построения их графиков.

Рассмотрим расширенный алгоритм исследования функций:

- 1) найти область определения функции;
- 2) исследовать функцию на четность и не четность;
- 3) найти вертикальные асимптоты;
- 4) исследовать поведение функции в бесконечности, найти горизонтальные или наклонные асимптоты;
- 5) найти экстремумы и интервалы монотонности функции;
- 6) найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба;
- 7) найти точки пересечения с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график функции;
- 8) построить график функции.

▪ Если для функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, то данная функция является четной. Следовательно, график функции симметричен относительно оси (ОУ).

▪ Если для функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$, то дана функция является нечетной. Следовательно график функции симметричен относительно начала координат (0;0)

▪ Если $f(-x) \neq f(x)$, и $f(-x) \neq -f(x)$, то данная функция является функцией общего вида и свойством симметричности данная функция не обладает

▪ Чтобы найти вертикальные асимптоты нужно:

- а) Найти значение x не принадлежащие области определения, т.е. установить точки разрыва.

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} u \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow x_0+0}$$

- б) Вычислить (слева) (справа)

и если хотя бы один из них равен $\pm\infty$, то прямая $x = x_0$ – вертикальная асимптота.

▪ Чтобы найти горизонтальные асимптоты нужно:

- а) Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$; Если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, то
 $y = b$ – горизонтальная асимптота.

▪ Чтобы найти наклонные асимптоты нужно:

а) Вычислить $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x};$

б) Вычислить $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - kx)$

в) Записать уравнение $y = kx + b$

г) Построить график данной прямой

▪ Правило Лопиталя:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \rightarrow 0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0} \right) \text{ или } \left(\frac{\infty}{\infty} \right), \text{ то } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty}} \frac{f'(x)}{g'(x)};$$

Если имеем, что,

Решение типовых задач:

1) Исследуйте функцию и постройте её график $y = \frac{x^3}{4 - x^2};$

1) Д. (f) $y = 4 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2 \Rightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty).$

2) $f(-x) = \frac{(-x)^3}{4 - (-x)^2} = -\frac{x^3}{4 - x^2} = -f(x) \Rightarrow$ данная функция нечетная и ее график симметричен

относительно начала координат (0;0).

3) Так как $x = 2; x = -2$ точки разрыва, то вычислим следующие пределы.

а) $\lim_{x \rightarrow 2^+0} \frac{x^3}{2 - x^2} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-0} \frac{x^3}{4 - x^2} = +\infty$ следовательно, прямая $x=2$ – вертикальная асимптота.

б) $\lim_{x \rightarrow 2^+0} \frac{x^3}{4 - x^2} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^-0} \frac{x^3}{4 - x^2} = -\infty$ следовательно, прямая $x = -2$ – вертикальная асимптота.

4) Найдем наклонные асимптоты

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{x^3}{4 - x^2}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x(4 - x^2)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{0 - 1} = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{4 - x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{4 - x^2} = 0$$

Запишем уравнение прямой $y = -x + 0$, т.е. $y = -x$ – наклонная асимптота.

5) Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции.

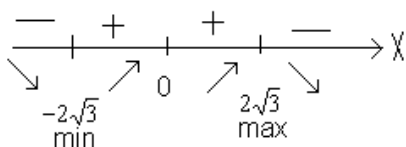
$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{4 - x^2} \right)' = \frac{x^2(12 - x^2)}{(4 - x^2)^2} = \frac{x^2(2\sqrt{3} - x)(2\sqrt{3} + x)}{(4 - x^2)^2};$$

Найдем нули функции.

$$\frac{x^2(2\sqrt{3} - x)(2\sqrt{3} + x)}{(4 - x^2)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2(2\sqrt{3} - x)(2\sqrt{3} + x) = 0 \\ 4 - x^2 \neq 0 \end{cases}$$

$x=0$ – корень четной кратности, следовательно, $x=0$ точка перегиба функции.

$$x = 2\sqrt{3}; \quad x = -2\sqrt{3}$$



$$f(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} \approx -5.2; \quad f(-2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} \approx 5.2.$$

Составим таблицу.

Таблица 1. Возрастание, убывание функции

x	$(-\infty; -2\sqrt{3})$	$-2\sqrt{3}$	$(-2\sqrt{3}; 0)$	0	$(0; 2\sqrt{3})$	$2\sqrt{3}$	$(2\sqrt{3}; +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	-
$f(x)$	Убывает	$3\sqrt{3}$	возрастает	0	возрастает	$-3\sqrt{3}$	убывает

б) Определить интервалы выпуклости.

$$f''(x) = \left(\frac{x^3}{4-x^2} \right)' = \left(\frac{x^2(12-x^2)}{(4-x^2)^2} \right)' = \frac{8x(12+x^2)}{(4-x^2)^3};$$

$$f''(x) = 0; \quad \frac{8x(12+x^2)}{(4-x^2)^3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 8x(12+x^2) & x=0 \\ 4-x^2 \neq 0 & x \neq \pm 2 \end{cases}$$

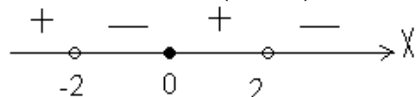
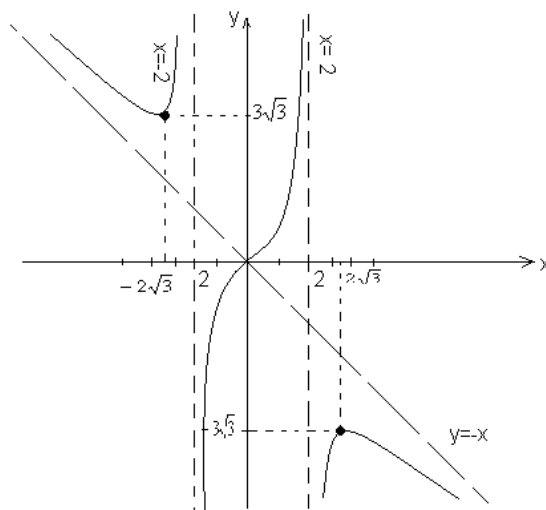


Таблица 2. Выпуклость, вогнутость функции

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f''(x)$	+	0	+	0	+	0	-
$f(x)$	Выпукла вниз	Не сущ.	Выпукла вверх	Не сущ.	Выпукла вниз	Не сущ.	Выпукла вверх

7) Построим график функции.



Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно

Тема 3.3. Интегральное исчисление функции одной действительной переменной Практическое занятие № 18 Интегрирование заменой переменной в неопределённом интеграле

Цель: формирование умений вычислять неопределённые интегралы заменой переменной.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- определять этапы решения задачи;
- определять задачи для поиска информации.

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.2. Разрабатывать схемы электронных устройств на основе интегральных схем разной степени интеграции в соответствии с техническим заданием.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

Вычислить интегралы используя метод подстановки

1	$\int (3 + 5x)^4 dx;$	6	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}};$
2	$\int \sqrt{x+2} dx;$	7	$\int_0^1 \sqrt{1-x} dx;$
3	$\int \frac{dx}{(3x+1)^2};$	8	$\int_0^3 \frac{2xdx}{\sqrt{16+x^2}}$
4	$\int \frac{3dx}{\sqrt[4]{3x+5}};$	9	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \cos x dx}{1 + \sin \sin x};$
5	$\int \frac{dx}{\cos^2(1-2x)};$	10	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos \cos x} \sin x dx.$

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

Ход работы:

1. Получить у преподавателя задания.

2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Способ подстановки (замены переменной) заключается в следующем:

–заменяют новой переменной такую часть подынтегральной функции, при дифференцировании, которой получается оставшаяся часть подынтегрального выражения (не считая постоянного множителя);

–путем введения новой переменной интегрирования удастся свести заданный интеграл к новому интегралу, который сравнительно легко вычисляется непосредственным интегрированием;

–в полученном результате производят обратную замену, т. е. переходят к старой переменной интегрирования.

Решение типовых заданий:

Найти неопределенные интегралы методом подстановки:

1) $\int (3x - 2)^4 dx;$

2) $\int \frac{5x dx}{x^2 + 7};$

3) $\int \sin 12x dx;$

4) $\int e^{x^2} x dx;$

1) $\int (3x - 2)^4 dx;$ Для того чтобы привести этот интеграл к табличному, введем новую переменную: $3x - 2 = t$. Продифференцируем обе части равенства $d(3x - 2) = dt$
 $(3x - 2)' dx = dt$

$$3dx = dt$$

Выразим дифференциал старой переменной через дифференциал новой переменной: $dx = \frac{dt}{3};$

Решение этого примера оформляется так:

$$\begin{aligned} \int (3x - 2)^4 dx &= \left| 3x - 2 = t \quad d(3x - 2) = dt \quad (3x - 2)' dx = dt \quad 3dx = dt \quad dx = \frac{dt}{3} \right| = \\ &= \int t^4 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int t^4 dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^5}{5} + c = \frac{t^5}{15} + c = \frac{(3x - 2)^5}{15} + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int \frac{5x dx}{x^2 + 7} &= 5 \int \frac{x dx}{x^2 + 7} = \left| x^2 + 7 = m \quad d(x^2 + 7) = dm \quad (x^2 + 7)' dx = dm \quad 2x dx = \right. \\ dm \quad x dx &= \left. \frac{dm}{2} \right| = 5 \int \frac{\frac{dm}{2}}{m} = 5 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{dm}{m} = 2,5 \ln |m| + c = 2,5 \ln |x^2 + 7| + c; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int \sin 12x dx &= \left| 12x = t \quad d(12x) = dt \quad (12x)' dx = dt \quad 12dx = dt \quad dx = \frac{dt}{12} \right| = \int \\ \sin \sin t \frac{dt}{12} &= \frac{1}{12} \int \sin \sin t dt = \frac{1}{12} (-\cos \cos t) + c = -\frac{1}{12} \cos \cos (12x) + c; \end{aligned}$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно

Тема 3.3. Интегральное исчисление функции одной действительной переменной

Практическое занятие № 19 Интегрирование по частям в неопределённом интеграле

Цель: формирование умений вычислять неопределённые интегралы методом интегрирование по частям.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- определять этапы решения задачи;
- определять задачи для поиска информации.

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.2. Разрабатывать схемы электронных устройств на основе интегральных схем разной степени интеграции в соответствии с техническим заданием.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

Вычислить неопределённые интегралы, используя метод интегрирования по частям

1.	$\int x \sin x dx;$	6	$\int x \arctg x dx;$
2.	$\int \frac{\ln x dx}{x^2};$	7	$\int x^5 e^{x^2} dx;$
3.	$\int \ln^2 x dx;$	8	$\int (x + 1) e^x dx;$
4.	$\int (2x - 1) \cdot e^{3x} dx;$	9	$\int (2x + 3) \cos x dx;$
5.	$\int x \cdot 2^x dx;$	10	$\int e^{2x} \cos x dx.$

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

Ход работы:

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Метод интегрирования по частям целесообразно применять в тех случаях, когда под знаком интеграла стоит произведение многочлена на одну из функций $\sin x$; $\cos x$; a^x ; $\ln x$; $\arcsin x$; $\arctg x$ и т.д. В частности, интегрирование по частям применяют к интегралам вида:

$\int x^n \cdot e^x dx$; $\int x^n \sin x dx$; $\int x^n \cos x dx$; $\int x^n \ln x dx$; $\int x^n \arcsin x dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) или подобным. Также с помощью интегрирования по частям находят интегралы вида:

$$\int \arcsin x dx; \int \arctg x dx; \int \arccos x dx; \int \operatorname{arcctg} x dx; \int e^x \cos x dx; \int e^x \sin x dx$$

и подобные им.

Пусть производные функций $u(x)$ и $v(x)$ существуют и непрерывны на заданном интервале. Тогда имеет место равенство:

$$\int uv' dx = uv - \int vu' dx.$$

Метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле.

$$\int U dV = UV - \int V dU$$

$$I. \int P_n(x) \cdot (e^{l(x)} a^{l(x)} \cos l(x) \sin l(x)) dx = \left[U = P_n(x) dU = P_n'(x) dx dV = () dx V = \int dV \right]$$

Многочлен

$$II. \int P_n(x) \cdot (\ln l(x) \arcsin l(x) \arccos l(x) \operatorname{arctg} l(x) \operatorname{arcctg} l(x)) dx = \left[U = () dU = (U)' dx dV = P_n(x) dx V = \int dV \right]$$

$$III. \int e^x \cos x dx \text{ или } \int e^x \sin x dx$$

Применим формулу 2 раза, обозначая за $dV = e^x dx$

В результате получим интегральное уравнение

Замечание:

1. За dV берем то выражение, от которого можем найти интеграл.
2. Если в случае I степень $P_n(x)$; $n \geq 2$, то формулу применяем 2 и более раза.
3. Если в случае II ($\ln l(x) \dots \operatorname{arcctg} l(x)$) и $n \geq 2$, то формулу применяем 2 и более раза.

Метод интегрирования по частям в определенном интеграле.

$$\int_A^B U dV = (UV)|_a^B - \int_a^B V dU$$

Более наглядно и просто интегрирование по частям записывается с помощью эквивалентного метода стрелок.

$$\int f(x) \cdot g(x) dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x) dx$$

$$\int \quad ,$$

$$F(x)g'(x)$$

Таким образом, справа получается: произведение множителей находящихся на концах штрихованной линии минус интеграл от произведения функций на концах стрелок.

Решение типовых задач

Найти интеграл, используя интегрирования по частям:

$$1) \int x \cdot e^x dx;$$

1) Проинтегрируем по частям, используя метод стрелок:

$$\int x \cdot e^x dx = \int e^x \cdot x dx = e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1 dx = e^x \cdot x - e^x + c;$$

$$\int e^x - 1$$

2)

$$\text{Найти интеграл } \int (x+1) e^{2x} dx$$

Решение. В исходном интеграле выделим функции u и v , затем выполним интегрирование по частям.

$$\int (x+1) e^{2x} dx \left\| \begin{array}{l} u = x+1 \quad dv = e^{2x} dx \\ du = dx \quad v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\| = (x+1) \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx =$$

$$= \frac{(x+1)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{(x+1)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} + C =$$

$$= \frac{(x+1)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$$

$$\text{Ответ. } \int (x+1) e^{2x} dx = \frac{(x+1)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно

Тема 3.3. Интегральное исчисление функции одной действительной переменной **Практическое занятие № 20 Вычисление определенных интегралов**

Цель: формирование умений вычислять определённые интегралы методом замены переменной.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- определять этапы решения задачи;
- определять задачи для поиска информации.

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.2. Разрабатывать схемы электронных устройств на основе интегральных схем разной степени интеграции в соответствии с техническим заданием.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

Вычислить определённые интегралы методом замены переменной

- 1) а) $\int_0^{\pi/2} \sin \sin x \cdot dx$, б) $\int_0^1 5x^3 \cdot dx$.
- 2) а) $\int_1^4 \sqrt{x} dx$, б) $\int_0^1 x^2 dx$.
- 3) а) $\int_0^{\pi/6} \cos \cos x \cdot dx$, б) $\int_1^2 (x - 1) \cdot dx$.
- 4) а) $\int_0^1 2^x \cdot dx$, б) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos \cos x \cdot dx$.
- 5) а) $\int_0^2 e^x \cdot dx$, б) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$.
- 6) а) $\int_1^3 \sqrt{x} \cdot dx$, б) $\int_0^1 7^{2x} dx$.
- 7) а) $\int_0^{\pi/2} \cos \cos x dx$, б) $\int_1^8 \sqrt[3]{x} dx$.
- 8) а) $\int_2^3 \frac{dx}{x}$, б) $\int_0^1 (x + 3^2) dx$.
- 9) а) $\int_1^4 \frac{dx}{x^3}$, б) $\int_1^2 5x^5 dx$.
- 10) а) $\int_0^4 e^x$, б) $\int^\pi (\sin \sin x + 2) dx$.

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

Ход работы:

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница

Сумма вида

$$I_n = \sum_{i=l}^n f(S_i)x_i$$

где S_i - произвольная точка частичного отрезка

$[x_{i-1}, x_i]$, $x_i = x_i - x_{i-1}$, называется интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и на этом отрезке произвольно выбраны не совпадающие друг с другом точки $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ так, что $x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ а = выбрано разбиение этого отрезка на n частей. В каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$ произвольным образом выбрана точка $S_i, i = 1, 2 \dots n$.

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел I_n интегральных сумм функции $f(x)$ при условии, что длина наибольшего частичного отрезка x_i стремится к нулю

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(S_i)x_i$$

Если непрерывная функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то для нахождения определенного интеграла используют формулу Ньютон-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Запомни, что

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

Заметим так же, что правила нахождения неопределенных интегралов от суммы, разности функций $u(x)$ и $v(x)$ и от произведения функции $f(x)$ на постоянную также верны для определенного интеграла.

Решение типовых задач:

1. Вычислить определённый интеграл методом непосредственного интегрирования $\int_1^2 x^3 dx$.

Найдя первообразную для x^3 , затем по формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 3,75$$

2. При вычислении определенного интеграла методом подстановки следует помнить, что заменяя переменную под знаком интеграла, так же необходимо изменить и пределы интегрирования. Полученный интеграл вычисляют, используя формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_{t_n}^{t_b} f(x)dx = F(t_b) - F(t_n),$$

где t_n и t_b – новые пределы интегрирования.

Вычислить определенные интегралы методом подстановки:

$$1) \int_1^3 (3x-5)^6 dx = \left| 3x-5 = t \quad d(3x-5) = dt \quad (3x-5)' dx = dt \quad 3dx = dt \quad dx = \frac{dt}{3} \right. \\ \left. \frac{dt}{3} \right|_{t_n=3 \cdot 1 - 5 = -2}^{t_b=3 \cdot 3 - 5 = 4} = \int_{-2}^4 t^6 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int_{-2}^4 t^6 dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^7}{7} \Big|_{-2}^4 = \frac{t^7}{21} \Big|_{-2}^4 = \frac{4^7}{21} - \frac{(-2)^7}{21} = \frac{4^7 - (-2)^7}{21} = 786 \frac{2}{7};$$

$$2) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x dx =$$

$$\left| 4x = m \quad d(4x) = dm \quad (4x)' dx = dm \quad 4dx = dm \quad dx = \frac{dm}{4} \right. \\ \left. \frac{dm}{4} \right|_{m_n=4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi}^{m_b=4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi} = \int_{\pi}^{2\pi} \sin m \frac{dm}{4} = \frac{1}{4} \int_{\pi}^{2\pi} \sin m dm = \frac{1}{4} \cdot (-\cos \cos m) \Big|_{\pi}^{2\pi} = \left(-\frac{1}{4} \cos 2\pi \right) - \\ \left(-\frac{1}{4} \cos \cos \pi \right) = \left(-\frac{1}{4} \cdot 1 \right) + \frac{1}{4} \cdot (-1) = -\frac{1}{2};$$

$$3) \int_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{3dx}{9+16x^2} = \frac{3}{9} \int_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{1+\frac{16}{9}x^2} = \frac{1}{3} \int_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{1+(\frac{4}{3}x)^2} = \left| \frac{4}{3}x = z \quad d\left(\frac{4}{3}x\right) = dz \quad \left(\frac{4}{3}x\right)' dx = dz \quad \frac{4}{3}dx = \right. \\ \left. dz \quad dx = \frac{3dz}{4} \right|_{z_n=\frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}}^{z_b=\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1} = \frac{\frac{3}{4}dz}{1+z^2} = \frac{1}{3} \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{dz}{1+z^2} = \\ \frac{1}{3} \arctg z \Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 = \frac{1}{4} \left(\arctg 1 - \arctg \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{48}$$

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. $90 \div 100$ -отлично; $80 \div 89$ - хорошо; $70 \div 79$ -удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно

Тема 3.3. Интегральное исчисление функции одной действительной переменной

Практическое занятие № 21 Вычисление площадей фигур с помощью определенных интегралов

Цель: формирование умений находить площади плоских фигур с помощью определенных интегралов.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- определять этапы решения задачи;
- определять задачи для поиска информации.

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.2. Разрабатывать схемы электронных устройств на основе интегральных схем разной степени интеграции в соответствии с техническим заданием.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

- 1) $y = 2x^3; y = 0; x = 0; x = 3$
- 2) $y = 2x^2; y = 0; x = 1; x = 3$.
- 3) $y = 2x; y = 0; x = 1; x = 3$.
- 4) $y = e^x; y = 0; x = 0; x = 2$.
- 5) $y = x^3; y = x^2; x = 1; x = 2$.

Порядок выполнения работы:

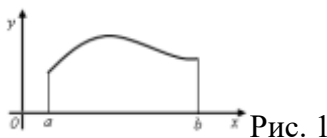
Задания решаются в любом порядке

Ход работы:

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Геометрический смысл определенного интеграла

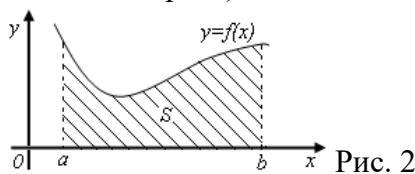
Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на этом отрезке неотрицательные значения, т.е. $f(x) > 0$ при $x \in [a; b]$. Фигура, образованная линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$, называется криволинейной трапецией (рис. 1). Определенный интеграл от неотрицательной функции имеет простой геометрический смысл: это площадь криволинейной трапеции.



Площади плоских фигур

- Если функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a; b]$, то площадь S под кривой $y = f(x)$ на $[a; b]$ (рис. 2) численно равна определенному интегралу от $f(x)$ на данном отрезке: (геометрический смысл определенного интеграла).

$$S = \int_a^b f(x) dx$$



- Если функция $f(x)$ — неположительна на отрезке $[a; b]$, то площадь S под кривой $y = f(x)$ на $[a; b]$ (рис. 3) равна определенному интегралу от $f(x)$ на $[a; b]$, взятому со знаком «минус»:

$$S = - \int_a^b f(x) dx$$

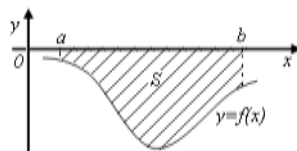


Рис. 3

- Если функция $f_2(x) \geq f_1(x)$ на отрезке $[a; b]$, то площадь S фигуры, заключенной между кривыми $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$ на $[a; b]$ (рис. 4) определяется формулой

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

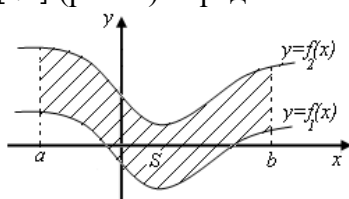


Рис. 4

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ — 1 балл. За неправильный ответ — 0 баллов. 90 ÷ 100 — отлично; 80 ÷ 89 — хорошо; 70 ÷ 79 — удовлетворительно; менее 70 — не удовлетворительно

Тема 3.4. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Практическое занятие № 22 Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными

Цель: формирование умений решать дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Решать дифференциальные уравнения
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи.

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ПК 2.3. Выполнять интеграцию модулей в управляющую программу.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

- 1) Найти общее решение дифференциальных уравнений:
 - a) $ds = (2t - 3)dt$,
 - b) $dx = (10t^2 - 5)dt$,
 - c) $x dx = dy$,
 - d) $x dx = y dy$,
 - e) $x^2 dx + y dy = 0$,
- 2) Найти частные решения дифференциальных уравнений:
 - a) $(t - 4)dt + s ds = 0$, если при $t = -1$; $s = 0$.
 - b) $\frac{dy}{4x} + \frac{dx}{y} = 0$, если при $x = 0$; $y = 2$.
 - c) $4s dt = t ds$, если при $t = -1$; $s = 3$.
 - d) $x^2 dy - y^2 dx = 0$, если при $x=0,2$ $y=1$.
 - e) $\frac{2 dy}{dx} = 1 + x^2$, если при $x=0$ $y=0$.

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

Ход работы:

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx - f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0$$

относится к типу уравнений с разделяющимися переменными. Если ни одна из функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ не равна тождественно нулю, то в результате деления исходного уравнения на $f_2(x) \cdot \varphi_1(y)$ оно приводится к виду:

переменные в разные части равенства и проинтегрируем $\int \frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} = \int \frac{\varphi_2(y)dy}{\varphi_1(y)}$. Разведём

дифференциального уравнения, выраженное в неявной форме, называют *интегралом* этого уравнения.

Решение типовых задач:

1. Найти общее решение уравнения: $x(y^2 - 4) dx + y dy = 0$.

Разделив обе части уравнения на $y^2 - 4 \neq 0$, имеем

$$x dx + \frac{y dy}{y^2 - 4} = 0$$

Интегрируя, находим

$$x^2 + \ln \ln |y^2 - 4| = \ln \ln C \quad \text{или} \quad y^2 - 4 = Ce^{-x^2}.$$

Это общее решение данного дифференциального уравнения.

Пусть теперь $y^2 - 4 = 0$, т.е. $y = \pm 2$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $y = \pm 2$ — решение исходного уравнения. Однако оно не является особым, так как его можно получить из общего решения при $C = 0$.

2. Найти общий интеграл уравнения $y' = x + y$

Полагая $y' = \frac{dy}{dx}$ — и разделяя переменные, приходим к уравнению

$$ctgy dy = tdx dx. \text{ Интегрируя, имеем}$$

$$\int ctgy dy = \int tdx dx, \text{ или } \ln |\sin y| = -\ln |\cos x| + \ln \ln C.$$

Отсюда находим $\sin y = \frac{C}{\cos x}$, или $\sin y \cos x = C$ (общий интеграл).

3. Найти частный интеграл уравнения $y' \cos x = \frac{y}{\ln y}$ удовлетворяющий начальному условию $y(0) = 1$.

Полагая $y' = \frac{dy}{dx}$ — перепишем данное уравнение в виде

$$\cos x \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\ln y}$$

Разделим переменные:

$$\frac{\ln y}{y} dy = \frac{dx}{\cos x}$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{\ln y}{y} dy = \int \frac{dx}{\cos x} + c, \text{ или } \frac{1}{2} y = \ln \ln \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C$$

Используя начальное условие $y = 1$ при $x = 0$, находим $C = 0$. Окончательно получим

$$\frac{1}{2} \ln \ln 2y = \ln \ln \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

4. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$(1 + x^2) dy + y dx = 0 \text{ при начальном условии } y(1) = 1.$$

Преобразуем данное уравнение к виду $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1+x^2}$. Интегрируя, имеем

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{1+x^2}, \text{ или } \ln |y| = -\arctg x + C$$

Это общий интеграл данного уравнения.

Теперь, используя начальное условие, найдем произвольную постоянную: $\ln 1 = -\arctg 1 + C$, т.е. $C = \frac{\pi}{4}$. Следовательно,

$$\ln y = -\arctg x + \frac{\pi}{4},$$

откуда получаем искомое частное решение $y = e^{\frac{\pi}{4} - \arctg x}$.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. $90 \div 100$ – отлично; $80 \div 89$ – хорошо; $70 \div 79$ – удовлетворительно; менее 70 – не удовлетворительно

Тема 3.4. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Практическое занятие № 23 Решение однородных дифференциальных уравнений первого порядка

Цель: формирование умений решать однородные дифференциальные уравнения первого порядка..

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Решать дифференциальные уравнения
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи.

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ПК 2.3. Выполнять интеграцию модулей в управляющую программу.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

1. Решить уравнения: а) $(3x-1)dy + y^2dx = 0$; б) $xy' + 2y = 2xyu'$.
2. Решить уравнения: а) $(xy - x^2)y' = y^2$; б) $xy' = y \ln \frac{x}{y}$.
3. Решить уравнения: а) $y' - 2y = e^{2x}$; б) $(y^2 + x)y' = 1$.

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

Ход работы:

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *однородным*, если оно может

быть представлено в виде: $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$.

Замена переменной $z = \frac{y}{x}$, где $z = z(x)$, сводит однородные дифференциальные уравнения к уравнениям с разделяющимися переменными.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если оно имеет вид: $y' + f(x)y = g(x)$, где $f(x)$, $g(x)$ – некоторые непрерывные функции переменной x . Если функция $g(x)$ тождественно равна нулю, то уравнение называется *однородным*, в противном случае – *неоднородным*.

Один из способов решения такого уравнения, предложенный Даламбером, – представить неизвестную функцию в виде $y = u \cdot v$. Тогда $y' = u'v + uv'$ и дифференциальное уравнение запишется в виде

$$u'v + uv' + f(x)uv = g(x) \text{ или } u'v + u[v' + f(x)v] = g(x).$$

Если функцию v выбрать так, что будет выполняться равенство $v' + f(x)v = 0$, то относительно другой функции u дифференциальное уравнение будет простым: $vu' = g(x)$. Таким образом, решение исходного дифференциального уравнения (3) распадается на решение двух дифференциальных уравнений: сначала $v' + f(x)v = 0$, а затем $vu' = g(x)$.

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением Бернулли*, если оно имеет вид: $y' + f(x)y = g(x)y^n$, где $n \neq 0$, $n \neq 1$.

Это уравнение приводится к линейному с помощью подстановки $z = y^{1-n}$, либо может быть непосредственно решено тем же методом, что и линейные уравнения.

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. $90 \div 100$ – отлично; $80 \div 89$ – хорошо; $70 \div 79$ – удовлетворительно; менее 70 – не удовлетворительно

Тема 3.4. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Практическое занятие № 24 Решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

Цель: формирование умений решать однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Решать дифференциальные уравнения
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи.

Выполнение практической работы способствует формированию:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ПК 2.3. Выполнять интеграцию модулей в управляющую программу.

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями).

Технические средства обучения: компьютер с лицензионным программным обеспечением и мультимедиа проектор

Задание:

1. Решить уравнения: а) $xy'' + y' = 0$; б) $yy'' = (y')^2$.

2. Решить уравнения: а) $2y'' - y' - y = 0$; б) $4y'' + 4y' + y = 0$; в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Порядок выполнения работы:

Задания решаются в любом порядке

Ход работы:

1. Получить у преподавателя задания.
2. Оформить решение в тетради для практических работ.

Дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид: $y'' = f(x, y, y')$.

Задача Коши для уравнения 2-го порядка состоит в том, чтобы найти решение дифференциального уравнения $y'' = f(x, y, y')$, которое удовлетворяет начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

В некоторых случаях решение дифференциального уравнения 2-го порядка может быть сведено к решению уравнения 1-го порядка, т.е. допускает понижение порядка. Рассмотрим некоторые типы таких уравнений.

Если уравнение второго порядка имеет вид: $y'' = f(x, y')$, т.е. в запись уравнения не входит искомая функция $y = y(x)$, то рекомендуется ввести новую независимую переменную $z = y'$ при сохранении независимой переменной. Относительно новой зависимой переменной получим дифференциальное уравнение 1-го порядка: $z' = f(x, z)$.

Если дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид: $y'' = f(y, y')$, т.е. не содержит независимой переменной x , то понижение порядка достигается заменой $y' = p$, где p рассматривается как функция переменной y : $p = p(y)$. При этом $y'' = p'p$, и мы приходим к уравнению $p'p = f(y, p)$ первого порядка. Решив это уравнение, придем к зависимости y' от x и y , т.е. к дифференциальному уравнению первого порядка относительно y .

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид: $y'' + py' + qy = r(x)$, где p и q – некоторые действительные числа, $r(x)$ – некоторая функция. Если функция $r(x)$ тождественно равна нулю, то соответствующее уравнение называется *однородным*, в противном случае – *неоднородным*.

Рассмотрим решение однородного дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$.

Данному уравнению ставится в соответствие характеристическое уравнение: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, где λ – переменная.

В зависимости от значения дискриминанта D квадратного уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеют место три случая:

- 1) $D > 0$ – уравнение имеет различные действительные корни, т.е. $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$.
- 2) $D = 0$ – уравнение имеет равные действительные корни, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$.
- 3) $D < 0$ – уравнение имеет комплексные сопряженные корни $\lambda_{1,2} = a \pm ib$. Общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx$.

Рассмотрим теперь решение неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Это уравнение может быть в частности решено *методом вариации произвольных постоянных*, который состоит в следующем. Сначала находится общее решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ однородного дифференциального уравнения, имеющего ту же левую часть, что и исходное неоднородное уравнение. Затем решение неоднородного уравнения находится в виде $y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$, т.е. предполагается, что постоянные C_1 и C_2 являются функциями

независимой переменной x . При этом функции $C_1(x)$ и C_2 могут быть найдены как решения

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = r. \end{cases}$$

системы

Форма представления результата:

Представить выполненные задания в тетради для практических работ преподавателю.

Критерии оценки:

За каждый правильный ответ – 1 балл. За неправильный ответ – 0 баллов. 90 ÷ 100-отлично; 80 ÷ 89- хорошо; 70 ÷ 79-удовлетворительно; менее 70-не удовлетворительно