Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет
им. Г. И. Носова»
Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор
_________________ / С.А.Махновский
«09» февраля 2022г

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
## ЕН.01 Математика

**для обучающихся специальности**

**44.02.06 Профессиональное обучение (по отраслям). Обработка металлов давлением**

Магнитогорск, 2022

**ОДОБРЕНО:**
Предметной комиссией
Математических и естественнонаучных дисциплин
Председатель Е.С. Корытникова
Протокол № 5 от 19.01.2022 г.

Методической комиссией МпК

Протокол №4 от 09.02.2022 г.

**Составитель:**
преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И.Носова» МпК
Форыкина Елена Витальевна

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика».
Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 44.02.06 Профессиональное обучение (по отраслям). Обработка металлов давлением (углубленной подготовки) и овладению профессиональными компетенциями.

**СОДЕРЖАНИЕ**

# 1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки обучающихся составляют практические занятия.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование профессиональных практических умений (умений выполнять определенные действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности) или учебных практических умений решать задачи по математике, необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

***уметь:***

- использовать математические методы при решении прикладных (профессиональных) задач;
- анализировать результаты измерения величин с допустимой погрешностью, представлять их графически;
- выполнять приближенные вычисления;
- проводить элементарную статистическую обработку информации и результатов исследований.

Содержание практических и лабораторных занятий ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению ***профессиональными компетенциями:***

ПК 1.3. Проводить лабораторно-практические занятия в аудиториях, учебно-производственных мастерских и в организациях.

ПК 3.1. Разрабатывать учебно-методические материалы (рабочие программы, учебно-тематические планы) на основе примерных.

ПК 4.2. Участвовать в разработке и внедрении технологических процессов.

ПК 4.3. Разрабатывать и оформлять техническую и технологическую документацию.

А также формированию ***общих компетенций***:

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы решения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Оценивать риски и принимать решения в нестандартных ситуациях.

ОК 4. Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, взаимодействовать с руководством, коллегами и социальными партнерами.

Выполнение обучающихся практических и работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

**Критерии оценки:**

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

# 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

## Раздел 2 Комплексные числа

### Практическая работа № 1

### Алгебраическая форма комплексных чисел. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

**Цель работы:** Научиться выполнять действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме.

**Выполнив работу, Вы будете:**

уметь:

- записывать комплексные числа в алгебраической форме;
- выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме.

**Материальное обеспечение:** индивидуальные задания, конспекты лекций.

**Задание:**

1. Даны комплексные числа: $z_1=(-3;-5)$, $z_2=(-7,2;7,2)$, $z_3=(2;6)$. Записать эти числа в алгебраической форме.

2. Вычислить:
   1) $z_1+z_2$;
   2) $z_2-z_3$;
   3) $z_1/z_3$;
   4) $z_2*z_3$;
   5) $z_1^5$.
3. Вычислить:

$$\frac{1-3i}{i-2}+\frac{1+4i}{1+3i}+i^{13}$$

**Порядок выполнения работы:**

1. Запишите комплексные числа в алгебраической форме $z = a + bi$

2. Выполните действия над комплексными числами в алгебраической форме, используя формулы: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$;

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

**Ход работы:**

1. Даны комплексные числа: $z_1$= (7;1), $z_2$=(-1,5;1,5), $z_3$=(4;-3). Записать эти числа в алгебраической форме.

Решение:

Т.к. алгебраическая форма комплексного числа имеет вид: $z = a + bi$, то числа в алгебраической форме будут записаны в виде:

$$z_1 = 7 + i;\ z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i;\ z_3 = 4 - 3i.$$

2. Вычислить:

$z_1 + z_2 = (7 - 1{,}5) + (1 + 1{,}5)i = 5{,}5 + 2{,}5i;$

$z_2 - z_3 = (-1{,}5 - 4) + (1{,}5 + 3)i = -5{,}5 + 4{,}5i;$

$\frac{z_1}{z_3} = \frac{7+i}{4-3i} = \frac{(7+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{28+4i+21i+3i^2}{16-9i^2} = \frac{28+25i-3}{16+9} = \frac{25+25i}{25} = 1 + i;$

$z_2 \cdot z_3 = (-1{,}5 + 1{,}5i)(4 - 3i) = -6 + 4{,}5i + 6i - 4{,}5i^2 = -6 + 10{,}5i + 4{,}5 = -1{,}5 + 10{,}5i;$

$z_1^5 = (7 + i)^5 = ((7 + i)^2)^2(7 + i) = (49 + 14i + i^2)^2(7 + i) = (48 + 14i)^2(7 + i) = (2304 + 1344i + 196i^2)(7 + i) = (2304 + 1344i -$
*1967+i=2108+1344i7+i=13412+11516i*;

3. Вычислить: $\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8$

Решение:

$\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8 = -2{,}1 - 2{,}7i;$

1) $\frac{1+3i}{i-3} = \frac{(1+3i)(-i-3)}{(i-3)(-i-3)} = \frac{-i-3-3i^2-9i}{-i^2+9} = \frac{-10i}{10} = -i$

2) $\frac{4-5i}{1+3i} = \frac{(4-5i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{4-12i-5i+15i^2}{1-9i^2} = \frac{-11-17i}{10} = -1{,}1 - 1{,}7i$

3) $i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$

4) $-i - 1{,}1 - 1{,}7i - 1 = -2{,}1 - 2{,}7i$

**Форма представления результата:** выполненная работа

## Раздел 2 Комплексные числа

## Практическая работа №2

### Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Переход из одной формы комплексных чисел к другой.

**Цель:** Научиться записывать комплексные числа в тригонометрической форме, выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

**Выполнив работу, Вы будете:**

уметь:

- записывать комплексные числа в тригонометрической форме;
- выполнять действия в тригонометрической форме;
- переходить из тригонометрической формы в алгебраическую.

**Материальное обеспечение:** индивидуальные задания, конспекты лекций.

**Задание:**

1. Даны комплексные числа: $z_1$=(-3;-5), $z_2$=(-7,2;7,2), $z_3$=(2;6). Записать эти числа в тригонометрической форме.

2.Вычислите:

1) $z_2 \cdot z_3$;
2) $\frac{z_1}{z_3}$;
3) $z_1^5$;
4) $\sqrt{z_2}$;

3. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

а) $(3\cdot(cos\frac{5\pi}{4}+isin\frac{5\pi}{4}))^2$ б) $\frac{24(cos\,75^0+isin\;75^0)}{3(\cos\;30^0+isin\;30^0)}$.

**Краткие теоретические сведения:**

Тригонометрической формой комплексных чисел называется запись их в виде:

$$z=r\cdot(cos\varphi+isin\varphi).$$

При выполнении действий над комплексными числами в тригонометрической форме используются следующие формулы:

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+isin(\varphi_1+\varphi_2))$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+isin(\varphi_1-\varphi_2))$$
$$z^n=r^n(cosn\varphi+isin\,n\varphi)$$

Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа в тригонометрической форме

z=r·(cos φ+isinφ) используется формула :

$\omega_k=\sqrt[n]{r}\cdot(cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+isin\frac{\varphi+2\pi k}{n})$, где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, k=0, 1, 2, …, n-1.

Алгоритм перехода от алгебраической формы к тригонометрической:
Пусть комплексное число задано в алгебраической форме $z=a+bi$.

1) Модуль $r=|z|$ однозначно определяется по формуле $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

2) Аргумент φ определяется из формул $\cos\varphi=\frac{a}{r}$, $\sin\varphi=\frac{b}{r}$.

Значения аргумента комплексного числа можно находить и так:

- Определить , в какой четверти находится точка (использовать геометрическую интерпретацию числа) $z=a+bi$
- Решив уравнение $tg\varphi=\frac{b}{a}$, получаем, что

$\arg z=\varphi=arctg\frac{b}{a}$ для внутренних точек 1 и 4 четвертей,

$\arg z = \varphi = arctg\frac{b}{a} + \pi$ для внутренних точек 2 четверти,

$\arg z = \varphi = arctg\frac{b}{a} - \pi$ для внутренних точек 3 четверти.

Если точка z лежит на действительной или мнимой оси, то arg z можно найти непосредственно.

3) Найдя модуль и аргумент комплексного числа, его можно записать в тригонометрической или показательной форме $z = r(cos\varphi + i\ sin\varphi)$ или $z = re^{i\varphi}$.

**Порядок выполнения работы:**

1. Запишите заданные числа в тригонометрической форме, используя алгоритм перехода к тригонометрической форме.

2. Выполните заданные действия.

**Ход работы:**

Даны комплексные числа: $z_1$=(7;1), $z_2$=(-1,5;1,5), $z_3$=(4;-3).

1. Записать числа $z_1$, $z_2$ и $z_3$ в тригонометрической форме.

Решение:

1) $z_1 = 7 + i$

$|z_1| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$,

Число находится в первой четверти, значит

$\varphi = arctg\frac{1}{7} = arctg0{,}1429.$

$z_1 = 7 + i = 5\sqrt{2}(\cos 8°8' + isin8°8').$

2) $z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i$

$|z_2| = \sqrt{(-1{,}5)^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{2{,}25 + 2{,}25} = \sqrt{4{,}5}$=2,1

Число находится во второй четверти, значит $\varphi = arctg\frac{b}{a} + \pi = arctg(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$;

$$z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i = 2{,}1(\cos\frac{3\pi}{4} + isin\ \frac{3\pi}{4}).$$

3) $z_3 = 4 - 3i$

$|z_3| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$

Число находится в четвертой четверти, значит

$\varphi = arctg\frac{-3}{4} = arctg(-0{,}75) = -36°°52'.$

$$z_3 = 4 - 3i = 5(\cos(-36°52' + isin(-36°52').$$

2. Вычислите:

1) $z_2 \cdot z_3$;

2) $\frac{z_1}{z_3}$;

3) $z_1^5$;

4) $\sqrt{z_2}$;

Решение:

$z_2 \cdot z_3 = 2{,}1 \cdot 5\left(\cos(135° - 36°52') + isin\ (135° - 36°52')\right) = 10{,}5(\cos 98°8' + isin\ 98°8');$

$\frac{z_1}{z_3} = \frac{5\sqrt{2}}{5}\left(\cos\left(8°8' - (-36°52')\right) + isin(8°8' + 36°52')\right) = \sqrt{2}(\cos 45° + isin45°);$

$z_1^5 = \left(5\sqrt{2}\right)^5(\cos 5 \cdot 8°8' + isin5 \cdot 8°8') = 12500\sqrt{2}(cos40°40' + isin40°40');$

Воспользуемся формулой:

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

В нашем примере n=2.

$$\sqrt{z_2} = \omega_k = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(cos\frac{135° + 360°k}{2} + isin\frac{135° + 360°k}{2}\right);$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(cos\frac{135° + 360°\cdot 0}{2} + isin\frac{135° + 360°\cdot 0}{2}\right) = \sqrt{2{,}1}(\cos 67°30' + isin\ 67°30');$

$\omega_1 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(cos\frac{135° + 360°\cdot 1}{2} + isin\frac{135° + 360°\cdot 1}{2}\right) = \sqrt{2{,}1}(\cos 247°30' + isin\ 247°30').$

3. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

$(2 \cdot (cos\frac{5\pi}{24} + isin\frac{5\pi}{24}))^6 = 2^6\left(cos\frac{5\pi}{24}\cdot 6 + isin\frac{5\pi}{24}\cdot 6\right) = 64\left(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right) = 64\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}i;$

$\frac{24(cos\,75^0 + isin\ 75^0)}{3(\cos\ 15^0 + isin\ 15^0)} = \frac{24}{3}(\cos(75° - 15°) + isin(75° - 15°) = 8(cos60° + isin60°) = 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4 + 4\sqrt{3}i;$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

## Раздел 3 Математический анализ
## Тема 3. 1 Теория пределов и непрерывность.

### Практическая работа №3
### Вычисление пределов.

**Цель:** Научиться вычислять пределы функций.

**Выполнив работу, Вы будете:**

уметь:

-вычислять пределы функций, используя теоремы о пределах;

- раскрывать неопределенности;
- находить пределы функций, используя формулы замечательных пределов.

**Материальное обеспечение:** индивидуальные задания, конспекты лекций.

**Задание:**

Вычислить пределы функций:

1. $\lim_{x\to -2}(-x^3+2x^2-4x-1)$
2. $\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{3x^3+24}$
3. $\lim_{x\to 2}\frac{4x^2-7x-2}{5x^2-9x-2}$
4. $\lim_{x\to \infty}\frac{2}{x^2+3x}$
5. $\lim_{x\to \infty}\frac{x^3+5x^2+10}{3x^3+4x^2-1}$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin 3x}{x}$
7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
8. $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{2x}{2x+1}\right)^x$

**Порядок выполнения работы:**

1. Найдите предел функции, используя теоремы о пределах.
2. Если получилась неопределенность, определите ее вид и способ раскрытия.

3. Преобразуйте функцию и раскройте неопределенность.
4. Вычислите предел.

**Ход работы:**

Найти предел функции:

1. $\lim_{x\to 2}(2x^3 - 10x^2 - 4x + 5)$

Используем теоремы о пределах:

$\lim_{x\to 2}(2x^3 - 10x^2 - 4x + 5) =$
$2(\lim_{x\to 2} x)^3 - 10(\lim_{x\to 2} x)^2 - 4\lim_{x\to 2} x + 5 = 16 - 40 -$
$8+5=-27$;

2. $\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$

Функция представляет собой отношение двух многочленов, обращающихся в нуль в точке $x = 3$.Поэтому сначала преобразуем данную функцию.
Любой квадратный трехчлен можно разложить на множители с помощью формулы
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где $x_1$ и $x_2$корни квадратного трехчлена.
Корнями квадратного трехчлена $3x^2 - 11x + 6$ являются числа $\frac{2}{3}$и 3; значит

$$3x^2 - 11x + 6 = 3(x - \frac{2}{3})(x - 3)$$

А корни квадратного трехчлена $2x^2 - 5x - 3$ равны $\frac{1}{2}$ и 3, следовательно
$2x^2 - 5x - 3 = 2(x + \frac{1}{2})(x - 3)$ .

Возвращаясь к пределу, имеем: $\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$

$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{3(x-\frac{2}{3})(x-3)}{2(x+\frac{1}{2})(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{3x-2}{2x+1} = \frac{9-2}{6+1} = \frac{7}{7} = 1.$

3. $\lim_{x\to\infty}\frac{11x^3-5x^2-6x+10}{6x^4-8x^2+2}$

Так как многочлены в числителе и знаменателе стремятся к $\infty$, то получаем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для ее раскрытия разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на $x^4$. Тогда получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{11x^3-5x^2-6x+10}{6x^4-8x^2+2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{11x^3}{x^4}-\frac{5x^2}{x^4}-\frac{6x}{x^4}+\frac{10}{x^4}}{\frac{6x^4}{x^4}-\frac{8x^2}{x^4}+\frac{2}{x^4}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{11}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{6}{x^3}+\frac{10}{x^4}}{6-\frac{8}{x^2}+\frac{2}{x^4}}=\frac{0}{6}=0$$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{x}$

Чтобы вычислить предел функции, нужно воспользоваться формулой первого замечательного предела: $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$.Умножим числитель и знаменатель дроби на $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}$$

.

4. $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}$

Преобразуем функцию так, чтобы можно было применить второй замечательный предел, формулу $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$
Введем новую переменную: $x=-3y, x\to\infty; y\to\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}=\lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{3}{-3y}\right)^{-15y}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-15y}=e^{-15}$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

## Раздел 3 Математический анализ

## Тема 3.2.Производная функции и её приложения.

### Практическая работа №4

### Дифференцирование сложных функций.

**Цель:** Научиться находить производные сложных функций.

**Выполнив работу, Вы будете:**

уметь:

- применять правила дифференцирования;
- находить производные сложных функций.

**Материальное обеспечение:** индивидуальные задания, конспекты лекций, таблица производных.

**Задание:**

Найти производные функций

1. $y = (5x^3 - 2x)^6$
2. $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3. $f(x) = arcsin4x + arccos^2 x$
4. $f(x) = log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$
5. $f(x) = ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

**Порядок выполнения работы:**

1. Определить вид функции. Ввести промежуточный аргумент.
   1. Определить, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Применить соответствующее правило.
   2. Используя таблицу производных, найти производные функций.
   3. Раскрыть скобки и привести подобные, если это упростит запись функции.

**Ход работы:**

Найти производные функций:

1. $g(x) = (1-4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u = 1-4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$y' = 10(1-4x^2)^9 \cdot (1-4x^2)' = 10\,(1-4x^2)^9(-8x) = -80x(1-$ *4x2)9*

2. $f(x) = \sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(\sin u)' = cosu \cdot u'$, $(cosu)' = -\sin u\, u'$.

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$
$$= cos\frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot cos2x + sin\frac{1}{2}x \cdot (-sin2x) \cdot (2x)'$$
$$= \frac{1}{2}cos\frac{1}{2}x \cdot cos2x - 2sin\frac{1}{2}x \cdot sin2x.$$

3. $y = \frac{2^{3x+5x^2}}{log_2(3+10x)}$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V-UV'}{V^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = 3x+5x^2$, для второй функции $u = 3+10x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(a^u)' = a^u lna \cdot u'$, $(\log_a u)' = \frac{1}{ulna} \cdot u'$ .

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} =$$

$$\frac{2^{3x+5x^2} ln2\,(3x+5x^2)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{1}{(3+10x) ln 2}(3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} =$$

$$\frac{2^{3x+5x^2} ln2(3+10x) \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{10}{(3+10x) ln 2}}{(\log_2(3+10x))^2}/$$

4. $f(x) = arcsin\frac{3}{5}x + arccos5x$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U+V)' = U' + V'$.

$$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = \frac{3}{5}x$, для второй функции $u = 5x$.
При дифференцировании используем следующие формулы: $(arcsinu)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ ; $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{5}x)^2}}\left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}(5x)' =$

$\frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25x^2}}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$

5. $f(x) = arccos\sqrt{1-e^{2x}}$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент $u = \sqrt{1-e^{2x}}$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot \left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'.$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент $u = 1 - e^{2x}$.

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}}\cdot\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-1+e^{2x}}}\cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}\cdot(1-e^{2x})' = -\frac{1}{e^x}\frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}(-2e^x) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

## Раздел 3 Математический анализ
## Тема 3.2. Производная функции и её приложения.

## Практическая работа №5

## Применение производной к исследованию функций.

**Цель работы:** Научиться исследовать функции и строить графики функций.

**Выполнив работу, Вы будете:**

уметь:

- проводить исследование функций с помощью производной;
- строить графики функций.

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций, учебники.

**Задание:**

Исследовать функцию по общей схеме и построить ее график:

1. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.
2. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.

**Краткие теоретические сведения:**

Общая схема исследования функций.

1. Найти область определения функции $D\ (y)$.

2. Найти (если это не вызывает затруднений) точки пересечения графика с осями координат (при $x = 0$ и при $y = 0$).

3. Исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность.

4. Найти интервалы монотонности, точки экстремумов и значения функции в этих точках.

5. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика функции.

6. Найти асимптоты графика функции.

7. Найти дополнительные точки и построить график по результатам исследования.

**Алгоритм нахождения экстремумов функции и интервалов ее монотонности с помощью первой производной**

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.

2. Найти производную функции $f'(x)$.

3. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.

4. Исследовать характер изменения функции $f(x)$ и знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$.

5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

Помни: критическая точка $x_0$ есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x)<0$, от промежутка, в котором $f'(x)>0$, и точка максимума - в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой $x_0$, знак производной не меняется, то в точке $x_0$ функция экстремума не имеет.

6. Вычислить значения функции в точках экстремума.

7. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

**Алгоритм нахождения выпуклостей функции и точек перегиба:**

1. Находим вторую производную.
2. Находим точки, в которых $f''(x) = 0$ или не существует.
3. Исследуем знак слева и справа от найденных точек и делаем вывод об интервалах выпуклости и о наличии точек перегиба.
4. Находим значение функции в точках перегиба.

**Асимптоты.**

**Асимптотой графика функции** $y = f(x)$называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x; f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim_{x\to a+0} f(x)$ равно $-\infty$или $+\infty$.

**Замечание.** Прямая $x = a$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = a$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Прямая $y = b$ называется **горизонтальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных ний $\lim_{x\to\infty} f(x)$ или $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ равно b.

**Замечание.** График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x\to\infty}|f(x) - kx - b| = 0$

Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to \infty$ .

**Порядок выполнения работы:**

1. Провести анализ заданной функции по общей схеме.
2. Построить график функции.

**Ход работы:**

Исследовать функцию и построить ее график.

$y = \frac{x^2}{2x-2}$.

1. Область определения функции $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$
2. При подстановке значения $x = 0$ получим $y(0) = 0$.

Такую же точку получим, если приравняем функцию к нулю. Точка $x = 0$ - единственная точка пересечения с осями координат.

3. Проверяем функцию на четность

$y(-x) = \frac{(-x)^2}{-2x-2} = -\frac{x^2}{2x+2}$.

$y(-x) \neq y(x); y(-x) \neq -y(x)$.

Итак, функция ни четная, ни нечетная, непериодическая.

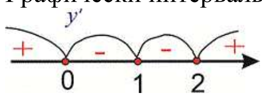
4.Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную функции

$$y' = \frac{2x(2x-2) - x^2 \cdot 2}{(2x-2)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2}{(2x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(2x-2)^2}$$

Приравнивая ее к нулю, получим критические точки $x = 0; x = 2$. Они разбивают область определения на следующие интервалы монотонности $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения.

Графически интервалы монотонности будут иметь вид




Исследуемая функция возрастает на интервалах $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ и убывает $(0; 1) \cup (1; 2)$.

5.Точка $x = 0$ точка локального максимума, $x = 2$ – локального минимума. Найдем значение функции $y_{max} = 0$; $y_{min} = 2$.

6.. Для отыскания интервалов выпуклости найдем вторую производную

$$y'' = \frac{(4x-4)(2x-2)^2 - (2x^2-4x) \cdot 2(2x-2) \cdot 2}{(2x-2)^4} = \frac{8}{(2x-2)^3}$$

$$= \frac{8}{8(x-1)^3} = \frac{1}{(x-1)^3}$$

Таких интервалов нет, поскольку вторая производная не принимает нулевых значений в области определения.

7. Прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$ .

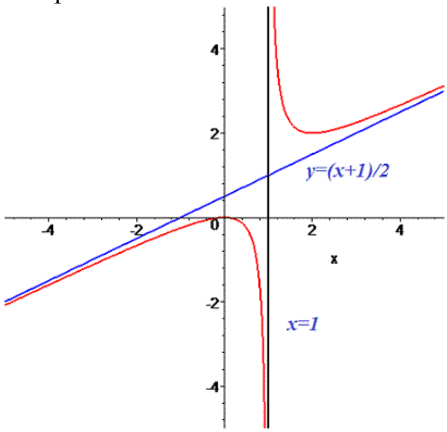
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(2x-2)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x-2}-\frac{1}{2}x\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x(x-1)}{2(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+x}{2(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2-\frac{2}{x}}=\frac{1}{2}$$

Конечный вид прямой следующий

$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

8.На основе проведенного анализа выполняем построение графика функции. Для этого сначала строим вертикальные и наклонные асимптоты, затем находим значение функции в нескольких точках и по них проводим построение.




**Форма представления результата:** выполненная работа.

## Раздел 3 Математический анализ
## Тема 3.3 Интеграл и его приложения

### Практическая работа №6

**Нахождение неопределенных интегралов с помощью преобразования подынтегрального выражения и подстановкой**

**Цель работы:** Научиться интегрировать функции, используя различные методы интегрирования.

**Выполнив работу, Вы будете:**

уметь:

- находить неопределенные интегралы методом подстановки;

- находить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

**Задание:**

**Найдите неопределенные интегралы:**

1) $\int(8x^4-6x^2+2x-3)dx$

2) $\int\frac{3x^4+2x^2-3x+7}{x^2}dx$

3) $\int\cos(10x-5)\,dx$

4) $\int 3^{4x^2}xdx$

5) $\int\frac{5dx}{25+16x^2}$

6) $\int\frac{x^2dx}{(1-2x^3)^2}$

7) $\int\frac{2x^4-4x^2-3x-1}{\sqrt[3]{x}}dx$

**Порядок выполнения работы:**

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать.
3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл. В случае неопределенного интеграла вернуться к старой переменной.

**Ход работы:** Найти интегралы:

Найти интегралы:

1) $\int \frac{3x^4+2x^2-3x+7}{x^2} dx$

Чтобы найти этот интеграл, нужно сначала привести подынтегральное выражение к табличному виду. Для этого применяем почленное деление: $\int \frac{6x^4-5x^2+3x+4}{x^2} dx = \int \left(\frac{6x^4}{x^2} - \frac{5x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{4}{x^2}\right) dx =$
$6x2-5+3x+4x-2dx=6x2dx-5dx+3dxx+4x-2dx=$
$6x33-5x+3\ln x+4x-1-1+C=2x3-5x+3\ln x-4x+C$

2) $\int \frac{15x^2 dx}{(1-x^3)^4}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int \frac{15x^2dx}{(1-x^3)^4} = \begin{bmatrix} 1-x^3 = t \\ d(1-x^3) = dt \\ -3x^2dx = dt \\ x^2dx = -\dfrac{dt}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \int \frac{15dt}{-3t^4}$$

$$= -5\int t^{-4}dt = -5\frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{5}{3t^3} + C = \frac{5}{3(1-x^3)^3} + C$$

**Форма предоставления результата:** выполненная работа.

## Раздел 3 Математический анализ
## Тема 3.3 Интеграл и его приложения

### Практическая работа № 7

### Определённый интеграл и его свойства

**Цель работы:** Научиться находить определенные интегралы, используя различные методы интегрирования, вычислять приближенные значения определенных интегралов.

**Выполнив работу, Вы будете:**

уметь:

- вычислять определенные интегралы различными методами;

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

**Задание:**

Вычислите определенные интегралы

1. $\int_{-2}^{3}(4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)dx$
2. $\int_{1}^{4}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

3. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{3\sqrt{1-x^2}}$
4. $\int_{-2}^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}$
5. $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} e^{sinx} cosxdx$
6. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{dx}{sin^2\frac{x}{3}}$

**Порядок выполнения работы:**

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать. Вычислить значение определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.

3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл.

**Ход работы:**

1) $\int_{-1}^{3}(4x^3 - 3x^2 + 2x + 5)dx = 4\int_{-1}^{3} x^3dx - 3\int_{-1}^{3} x^2dx +$ $2-13xdx+5-13dx=x4-x3+x2+5x-13=34-33+32+5\cdot3-1+1+1-5=81-27+9+15+2=80$

2) $\int_{0}^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{0,4}\frac{5dx}{4+25x^2}=\frac{5}{4}\int_0^{0,4}\frac{dx}{1+\frac{25}{4}x^2}==\frac{5}{4}\int_0^{0,4}\frac{dx}{1+\left(\frac{5}{2}x\right)^2}=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}x=t\\ \frac{5}{2}dx=dt\\ dx=\frac{2}{5}dt\\ x_H=0\;\;t_H=0\\ x_B=0,4\;\;t_B=1\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{5}{4}\cdot\frac{2}{5}\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}arctgt|_0^1=\frac{1}{2}(arctg1-arctg0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}.$$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{sinxdx}{cos^4x}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{sinxdx}{cos^3x}=\begin{bmatrix}cosx=t\\ dcosx=dt\\ -sinxdx=dt\\ sinxdx=-dt\\ x_H=0\;\;t_H=cos0=1\\ x_B=\frac{\pi}{3}\;\;t_B=cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\int_1^{0,5}\frac{-dt}{t^3}=-\frac{t^{-2}}{-2}|_1^{0,5}=\frac{1}{2t^2}|_1^{0,5}$$

$$=\frac{1}{2\cdot 0,25}-\frac{1}{2}=2-0,5=1,5$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

## Раздел 3 Математический анализ
## Тема 3.3 Интеграл и его приложения

### Практическая работа № 8

**Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур.**

**Цель работы:** научиться применять интегрирование для решения задач геометрии.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

- находить площади плоских фигур с помощью определенных интегралов;

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

**Задание:**

Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями:

а) $y = x^2 + 1,\ y = 0,\ x = 1, x = 4$;

б) $y = \ln x, y = 0,\ x = 1, x = e$;

в) $y^2 = x^3; x = 4$.

**Краткие теоретические сведения:**

*Геометрический смысл определенного интеграла*

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на этом отрезке неотрицательные значения, т.е. $f(x) > 0$ при $x \in [a;b]$. Фигура, образованная линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$, называется криволинейной трапецией (рис. 1). Определенный интеграл от неотрицательной функции имеет простой геометрический смысл: это площадь криволинейной трапеции.

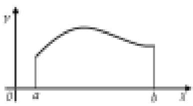


Рис. 1

Площади плоских фигур

1. Если функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то площадь $S$ под кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 2) численно равна определенному интегралу от $f(x)$ на данном отрезке: $S = \int_a^b f(x)dx$ (геометрический смысл определенного интеграла).

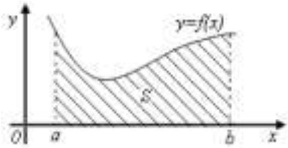



Рис. 2

2. Если функция $f(x)$ – неположительная на отрезке $[a;b]$, то площадь $S$ под кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 3) равна определенному интегралу от $f(x)$ на $[a;b]$, взятому со знаком «минус»: $S = -\int_a^b f(x)dx$ .

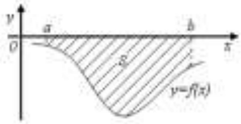



Рис. 3

3. Если функция $f_2(x) \geq f_1(x)$ на отрезке $[a;b]$, то площадь $S$ фигуры, заключенной между кривыми $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$ на $[a;b]$ (рис. 4) определяется формулой $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$ .

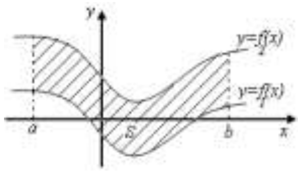



Рис. 4

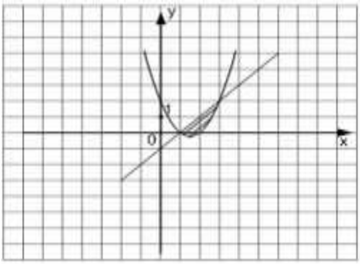
**Порядок выполнения работы:**

1. Изобразите фигуру на координатной плоскости;
2. Определите, является ли фигура криволинейной трапецией.
3. Вычислите площадь фигуры.

**Ход работы:**

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 3x + 2$ и $y = x - 1$.

Найдем пределы интегрирования - точки пересечения графиков функций, для этого приравняем правые части исходных функций и решим получившееся уравнение $x^2 - 3x + 2 = x - 1$. Корнями этого уравнения являются числа $x = 1$ и $x = 3$, следовательно, они и являются пределами интегрирования.




Значит, площадь фигуры равна:

$$S = \int_1^3 (x-1)dx - \int_1^3 (x^2 - 3x + 2)dx = \frac{x^2}{2} - x - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right) = \frac{9}{2} - 3 - \frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{27}{3} - \frac{3\cdot 9}{2} + 6 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2\right) = 1\frac{1}{3}$$

Получили, что площадь фигуры равна $1\frac{1}{3}$ (кв. ед.)

**Форма представления результата:** выполненная работа.

## Раздел 4. Основы численных методов

### Практическая работа №9

### Применение дифференциала к приближенным вычислениям

**Цель работы:** Научиться применять дифференциал для приближенного вычисления значений функции.

**Выполнив работу, Вы будете:**

**уметь:**

- находить приближенные значения функций.

**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций, учебники.

**Задание:**

Вычислить приближенные значения, используя дифференциал:

1) $ln1{,}01$;
2) $3{,}96^3$;
3) $\sqrt{16{,}004}$;
4) $\sqrt[3]{64{,}09}$;
5) $\sqrt[4]{15{,}8}$.

**Краткие теоретические сведения:**

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ называется произведение производной функции в этой точке на дифференциал аргумента $dx$.

$$dy = f^{'}(x_0) \cdot dx$$

Формула для приближенного вычисления значения функции:

$$f(x) \approx f(x_0) + f^{'}(x_0)\Delta x,\ \Delta x = x - x_0.$$

При практическом применении формулы надо понимать, что погрешность приближенного значения будет тем меньше, чем меньше $\Delta x$. Кроме того, точка $x_0$ должна быть «удобной» для вычисления значения функции в ней. Ну и, разумеется, функция $y = f(x)$ должна быть дифференцируемой в точке $x_0$.

**Порядок выполнения работы:**

1. Представьте аргумент в виде $x_0 + \Delta x$.
2. Примените формулу для вычисления приближенного значения функции.

**Ход работы:**
Вычислить приближенные значения, используя дифференциал:

1) $1{,}01^{10}$

В качестве «удобной» точки возьмем $x_0 = 1$. Тогда приращение аргумента $\Delta x = x - x_0 = 1{,}01 - 1 = 0{,}01$.

$f(x_0) = f(1) = 1^{10} = 1;$

$f'(x) = (x^{10})' = 10x^9; \quad f'(1) = 10.$

Подставляя найденные значения в формулу, получим:

$$1{,}01^{10} = (1 + 0{,}01)^{10} \approx 1 + 10 \cdot 0{,}01 = 1 + 0{,}1 = 1{,}1.$$

2) $\sqrt[3]{7{,}95}$

В качестве «удобной» точки возьмем $x_0 = 8$. Тогда приращение аргумента $\Delta x = x - x_0 = 7{,}95 - 8 = -0{,}05$.

$f(x_0) = \sqrt[3]{8} = 2; \; f'(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}};$

$f'(8) = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{12}.$

Подставляя найденные значения в формулу, получим:

$$\sqrt[3]{7{,}95} = \sqrt[3]{8 - 0{,}05} \approx 2 + \frac{1}{12}\cdot(-0{,}05) = 2 - \frac{1}{240} = 1\frac{239}{240}.$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

## Раздел 4. Основы численных методов

### Практическая работа №10

### Приближенное вычисление определенных интегралов.

**Цель работы:** Научиться вычислять приближенные значения определенных интегралов.

**Выполнив работу, Вы будете:**

уметь:

- находить приближенные значения определенных интегралов.

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

**Задание:**

Вычислите приближенно определенные интегралы:

1) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ по формуле прямоугольников (n = 10);

2) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ по формуле трапеций (n = 10).

**Краткие теоретические сведения:**

Для нахождения определенных интегралов применяется формула Ньютона - Лейбница. Формула Ньютона - Лейбница - основная формула интегрального исчисления: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Формулы приближенного вычисления определенного интеграла.

*Формула прямоугольников*:

Пусть на отрезке [a; b], a < b, задана непрерывная функция $f$(x). Требуется вычислить интеграл численно рав-

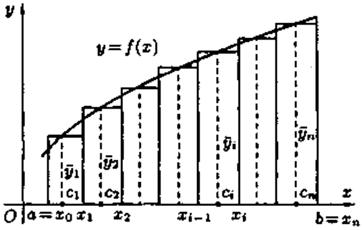


Рис. 200.

ный площади соответствующей криволинейной $\int_a^b f(x)dx$ трапеции. Разобьем основание этой трапеции, т. е. отрезок [a; b], на n равных частей (отрезков) длины $h = \frac{b-a}{n}$ (шаг разбиения) с помощью точек $x_0$= a, $x_1$, $x_2$,..., $x_n$ = b. Можно записать, что $x_i = x_0 + h\bullet i$, где i = 1,2,..., n.

В середине $c_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ каждого такого отрезка построим ту $\widetilde{y_i} = f(c_i)$ графика функции y = $f$(x). Приняв эту ординату за высоту, построим прямоугольник с площадью $h\widetilde{y_i}$

Тогда сумма площадей всех n прямоугольников дает площадь ступенчатой фигуры, представляющую собой приближенное значение искомого определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\widetilde{y_1} + \widetilde{y_2} + \cdots + \widetilde{y_n}\right) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}).$$

Формула называется формулой средних прямоугольников.

*Формула трапеций.*

Формулу трапеций получают аналогично формуле прямоугольников: на каждом частичном отрезке криволинейная трапеция заменяется обычной.

Разобьем отрезок [a; b] на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$. Абсциссы точек деления a = $x_0$, $x_1$,$x_2$,...,b = $x_n$ (рис. 201). Пусть $y_0$,$y_1$...,$y_n$ —

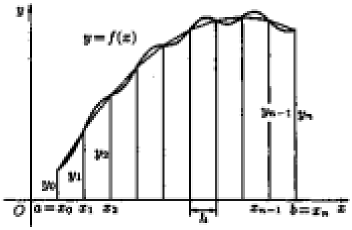



Рис. 201.

соответствующие им ординаты графика функции. Тогда расчетные формулы $h = \frac{b-a}{n}$ для этих значений примут вид $x_i = a + h*i$, $y_i = f(x_i)$, i= 0,1,2,..., n;

Заменим кривую $y = f(x)$ ломаной линией, звенья которой соединяют концы ординат $y_i$ и $y_{i+1}$ (i = 0,1,2,.. .,n). Тогда площадь криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей обычных трапеций с основаниями $y_i$, $y_{i+1}$ и высотой $h = \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0+y_1}{2} \cdot h + \frac{y_1+y_2}{2} \cdot h + \dots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2} \cdot h.$$

Формула называется формулой трапеций.

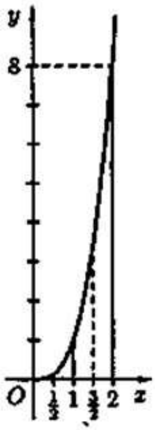
**Порядок выполнения работы:**

1) Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2) Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать.
3) Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл.

4) Если интеграл нельзя найти вышеуказанными способами, то применить формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$.

**Ход работы:**

Вычислить, разбив отрезок интегрирования [0; 2] на 4 части.




$\int_0^2 x^3 dx$ Имеем: $f(x) = x^3$.

$a = 0, b = 2, h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2};$

$x_0 = 0;\ y_0 = 0;\ x_1 = \frac{1}{2};\ y_1 = \frac{1}{8};$

$x_2 = 1;\ y_2 = 1;\ x_3 = \frac{3}{2};\ y_3 = \frac{27}{8};$

$x_4 = 2;\ y_4 = 8.$

а) по формуле прямоугольников:

$c_1 = \frac{1}{4};\ \widetilde{y_1} = \frac{1}{64};\quad c_2 = \frac{3}{4};\ \widetilde{y}_2 = \frac{27}{64};\quad c_3 = \frac{5}{4};\ \widetilde{y}_1 = \frac{125}{64};\ c_4 = \frac{7}{4};\ \widetilde{y}_1 = \frac{343}{64}.$

$$\int_0^2 x^3 dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{64} + \frac{27}{64} + \frac{125}{64} + \frac{343}{64}\right) = 3{,}875.$$

б) по формуле трапеции:

$$\int_0^2 x^3 dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{0+8}{2} + \frac{1}{8} + 1 + \frac{27}{8}\right) = 4{,}25.$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

## Раздел 5
## Элементы теории вероятностей и математической статистики

### Практическая работа № 11

**Решение задач на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики.**
**Цель работы:** Научиться находить вероятность событий, используя формулы комбинаторики.
**Выполнив работу, Вы будете:**
уметь:
-вычислять число исходов, благоприятствующих наступлению рассматриваемого события, используя формулы комбинаторики;
- вычислять вероятность события по классическому определению вероятности.
**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, конспекты лекций.

**Задание:**

**1.** Готовясь к докладу, студент выписал из книги цитату, но, забыв номер страницы, на которой она находилась, написал номер наудачу. Какова вероятность того, что студент записал нужный номер, если он помнит, что номер выражается двузначным числом?

**2.** В ящике 15 деталей, среди которых 10 окрашены. Сборщик наудачу выбрал 3 детали. Какова вероятность того, что выбранные детали оказались окрашенными?

**3.** Имеется 8 карточек. Одна сторона каждой из них чистая, а на другой написаны буквы :К,И,Р,Д, А,Н,З,П. Карточки кладут на стол чистой стороной вверх, перемешивают, а затем последовательно одну за другой переворачивают. Какова вероятность того, при последовательном появлении букв будет составлен слово ПРАЗДНИК?

**Краткие теоретические сведения:**
Вероятностью события А называется отношение числа m случаев, благоприятствующих его появлению, к общему числу всех несовместных равновозможных и образующих полную группу событий. Такое определение вероятности называют классическим. Вероятность события обозначается Р(А) и вычисляется по формуле: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Вероятность появления события заключена в пределах
от 0 до 1: $0 \leq P(A) \leq 1$

**Порядок выполнения работы:**

1. Определите событие А, вероятность которого нужно вычислить.
2. Просчитайте общее число(n) возможных исходов.
3. Просчитайте число исходов(m), благоприятствующих наступлению события $A$.
4. Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события. $P(A) = \frac{m}{n}$.

**Ход работы:** 1.Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры и набрал их наудачу, помня . что они различны. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение.

1. Событие А- «номер набран верно».
2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Всего имеется 10 цифр, т.е. число элементов равно 10; в каждое соединение входит по 3 цифры; порядок цифр (элементов) существенен при наборе номера, значит, нужно найти число размещений из 10 элементов по 3 по формуле $A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!}$=720. Итак, n=720
3. Число m=1, т.к. только один набор из трёх цифр является нужным.
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$

2.Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 чёрных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся чёрными?

Решение.

1. Событие А - «оба шара окажутся чёрными».
2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов (12+8) по два: n= $C_{20}^{2} = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20!}{2!\cdot 18!} = \frac{20\cdot 19\cdot 18!}{1\cdot 2\cdot 18!}$=190.

3. Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно числу сочетаний из 8 элементов ( 8 черных шаров) по два: n= $C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!}=\frac{8!}{2!\cdot 6!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6!}{1\cdot 2\cdot 16!}=28$

4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{28}{190} \approx 0{,}147$

2.На пяти карточках разрезной азбуки написаны буквы А,З,К,О,М. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того. Что получится слово ЗАМОК?

Решение.

1. Событие А - «получится слово ЗАМОК».
2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу перестановок из 5 элементов (букв): n=$P_5 = 5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$.
3. Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно 1, т.к. требуется составить слово с буквами, расставленными в определённом порядке. А эти буквы различны.
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

## Раздел 5
## Элементы теории вероятностей и математической статистики.

### Практическая работа№ 12

### Нахождение числовых характеристик выборки.

**Цель работы:** Рассмотреть отдельные примеры, характерные для выборочного метода.

**Выполнив работу, Вы будете:**

уметь:

1. Составлять распределение относительных частот.
2. Строить полигоны частот и относительных частот.
1. 3.Строить гистограмму по заданному статистическому распределению:
2. 4. Находить статистические оценки генеральной совокупности, заданной вариационным рядом:
3. 5.Находить статистические характеристики выборки.

**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, конспекты лекций.

**Задание:**

1**.** Построить полигоны частот и относительных частот по распределению выборки:

| $x_i$ | 2 | 4 | 7 | 8 | 9 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | $p_1^2$ | $2p_2$ | $p_2$ | $p_2^2$ | $p_3$ | $3p_3$ |

**2.** Постройте гистограммы частот и относительных частот по распределению выборки:

| № интервала | Интервал, $x_i - x_{i+1}$ | Сумма частот вариант интервала, $n_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 3 – 5 | $p_1$ |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 5 – 7 | $2p_2$ |
| 3 | 7 – 9 | $3p_3$ |
| 4 | 9 – 11 | $p_1^2$ |
| 5 | 11 – 13 | $2p_2^2$ |
| 6 | 13 – 15 | $3p_3^2$ |
| 7 | 15 – 17 | $p_1+p_2$ |

**3.** Для генеральной совокупности, заданной распределением:

| $x_i$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_i$ | $p_1$ | $3p_1$ | $p_2$ | $2p_2$ | $p_2^2$ | $2p_3$ | $2p_3^2$ |

.

Найдите генеральную среднюю, генеральную дисперсию, генеральное стандартное отклонение, моду, медиану и размах.

**4.** Из генеральной совокупности сделана выборка, заданная распределением:

| $x_i$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | $p_2$ | $2p_2$ | $p_1$ | $p_1^2$ | $p_3$ | $2p_3$ | $p_2+p_3$ |

.

Найти выборочную среднюю выборочные дисперсию и стандартное отклонение. Обратите внимание: $p_1$ = числу букв в Вашем имени; $p_2$= числу букв в Вашей фамилии; $p_3$ = числу букв в имени Вашего отца.

**Краткие теоретические сведения** в полном объёме имеются в лекции.

**Порядок выполнения работы:**

1 Прочитав условие предложенной задачи, по конспекту лекции найдите соответствующие формулы.

2.Примените лекционный теоретический материал для решения каждой задачи.

3 В случае необходимости представить геометрическую интерпретацию числовых характеристик выборки.

**Ход работы: 1.** Задано распределение частот выборки:

| $x_i$ | 2 | 6 | 12 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 3 | 10 | 7 | 5 |

Составить распределение относительных частот.
Определим сначала объем выборки:

$$n = 3 + 10 + 7 + 5 = 25.$$

Найдем относительные частоты по формуле $w_i = \dfrac{n_i}{n}$:

$$w_1 = \frac{3}{25} = 0{,}12\,;\ w_2 = \frac{10}{25} = 0{,}40\,;\ w_3 = \frac{7}{25} = 0{,}28\,;$$

$$w_4 = \frac{5}{25} = 0{,}20\,.$$

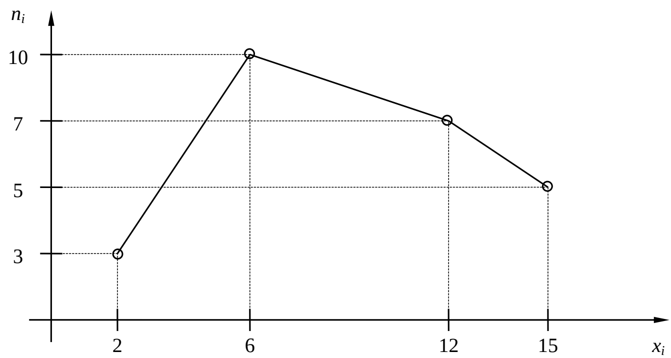
Следовательно,

| $x_i$ | 2 | 6 | 12 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| $w_i$ | 0,12 | 0,40 | 0,28 | 0,20 |

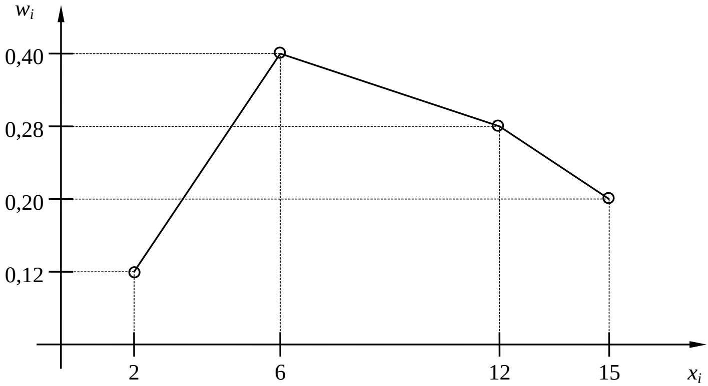
Контроль: $0{,}12 + 0{,}40 + 0{,}28 + 0{,}20 = 1$.

**2..** По результатам примера 1 построить полигоны частот и относительных частот.

Решение. Отобразив на плоскости точки с координатами $(x_i, n_i)$ и соединив их отрезками, получим полигон частот:



Аналогично построим полигон по точкам $(x_i, w_i)$:




3.Постройте гистограмму по следующему статистическому распределению:

| № интервала | Интервал длиной $h$=5 | Сумма частот вариант $n_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 5 – 10 | 4 |
| 2 | 10 – 15 | 6 |
| 3 | 15 – 20 | 16 |
| 4 | 20 – 25 | 36 |
| 5 | 25 – 30 | 24 |
| 6 | 30 – 35 | 10 |
| 7 | 35 – 40 | 4 |

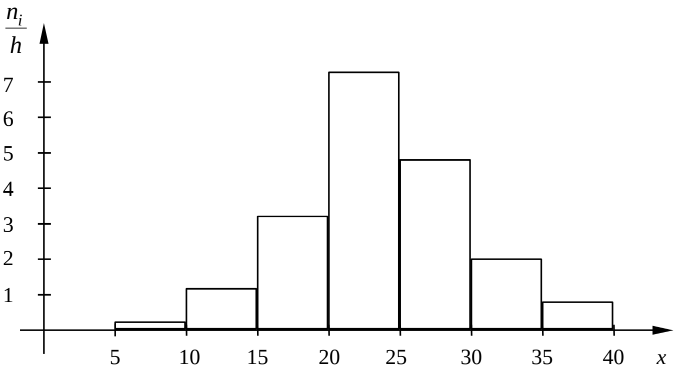
Решение. Прежде всего, определим объем выборки:

$$n = 4 + 6 + 16 + 36 + 24 + 10 + 4 = 100.$$

По известным суммам частот вариант рассчитаем плотность частоты по интервалам:

| № интервала | Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$ | № интервала | Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,2 | 5 | 4,8 |
| 2 | 1,2 | 6 | 2,0 |
| 3 | 3,2 | 7 | 0,8 |
| 4 | 7,2 | | |

Изобразим полученный результат:




4. Найдите статистические оценки генеральной совокупности, заданной следующим вариационным рядом:

| варианта $x_i$ | 2 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| частота $N_i$ | 8 | 9 | 10 | 3 |

Решение. Определим объем совокупности:

$$N_{\Gamma} = 8 + 9 + 10 + 3 = 30.$$

Найдем генеральную среднюю:

$$\overline{X}_Г = \frac{8\cdot 2+9\cdot 4+10\cdot 5+3\cdot 6}{30} = 4\cdot$$

Для вычисления генеральной дисперсии используем формулу $D_Г = \overline{X^2_г} - \left(\overline{X}_Г\right)^2$. Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X^2_Г} = \frac{8\cdot 2^2+9\cdot 4^2+10\cdot 5^2+3\cdot 6^2}{30} = 17{,}8\cdot$$

Таким образом, $D_Г = 17{,}8 - 4^2 = 1{,}8\cdot$

Генеральное стандартное отклонение: $\sigma_Г = \sqrt{D_Г} = \sqrt{1{,}8} \cong 1{,}34\cdot$

Обычно полученных результатов достаточно для практических задач. Однако можно получить дополнительные характеристики для более тонкой оценки генеральной совокупности. Приведем их:

Мода $Mo$ : наибольшая частота

$$Mo = 10\cdot$$

Медиана $Me$: вариационный ряд делится пополам в точке

$$Me = 4{,}5\cdot$$

Размах вариации R: в примере

$x_{max} = 6; x_{min} = 2$,

поэтому

$$R = 6 - 2 = 4\ .$$

5. Из генеральной совокупности извлечена выборка

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 92 | 94 | 103 | 105 | 106 |

Найдите статистические характеристики выборки.

Решение. Определим объем выборки:

$$n = 92+94+103+105+106 = 500\ .$$

Выборочная средняя:

$$\overline{X}_B = \frac{92\cdot 1+94\cdot 2+103\cdot 3+105\cdot 4+106\cdot 5}{500} = 1{,}82\ .$$

Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X^2_B} = \frac{92\cdot 1^2+94\cdot 2^2+103\cdot 3^2+105\cdot 4^2+106\cdot 5^2}{500} = 11{,}45\cdot$$

Выборочная дисперсия:

$$D_B = \overline{X_B^2} - \left(\overline{X}_B\right)^2 = 11{,}45 - 1{,}82^2 \cong 8{,}14.$$

Выборочное стандартное отклонение:

$$\sigma_B = \sqrt{8{,}14} \cong 2{,}85.$$

6.По данным таблицы (возраст студентов в группе из 20 человек) провести статистическое исследование.

| **№ п\п** | **Возраст (лет)** | **№ п\п** | **Возраст (лет)** | **№ п\п** | **Возраст (лет)** | **№ п\п** | **Возраст (лет)** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 18 | 6 | 20 | 11 | 22 | 16 | 21 |
| **2** | 18 | 7 | 19 | 12 | 19 | 17 | 19 |
| **3** | 19 | 8 | 19 | 13 | 19 | 18 | 19 |
| **4** | 20 | 9 | 19 | 14 | 20 | 19 | 19 |
| **5** | 19 | 10 | 20 | 15 | 20 | 20 | 19 |

**Форма представления результата:** выполненная работа.

## Тема 6.1.
## Матрицы и определители

### Практическая работа №13

### Действия над матрицами.

**Цель работы:** Научиться выполнять действия над матрицами.
**Выполнив работу, Вы будете:**
уметь:
- выполнять операции над матрицами;
- находить обратную матрицу.

**Материальное обеспечение:** индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

**Задание:**

**1.** Найти матрицу $C = A^2 + 3AB$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

**2.** Выяснить, является матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ обратной к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

**Краткие теоретические сведения:**

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел. Матрица записывается в виде: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2}\dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Действия над матрицами:

1.Сложение.
Операция сложения вводится только для матриц одинаковых размеров. При сложении матриц их соответствующие элементы складываются.

$$A + B = C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

2.Умножение на число.

При умножении матрицы на число каждый ее элемент умножается на это число.

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} \cdots & ka_{2n} \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

3.Умножение матриц.

Операция умножения матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Чтобы найти элемент матрицы, стоящий в $i$-той строке в $k$-том столбце, нужно вычислить сумму произведений элементов $i$-той строки первой матрицы на соответствующие элементы $k$-того столбца второй.

**Порядок выполнения работы:**

1. Запишите задание.
2. Определите, какие действия, и по каким правилам необходимо выполнить. Прочитайте конспект.
3. Выполните действия. Проверьте правильность вычислений.

**Ход работы:**

1) Найти матрицу $C = A^2 + 3AB$, если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

а**)** Найдем $A^2$, умножая матрицу саму на себя

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

б**)** Найдем матрицу *3A*, умножив все элементы матрицы *A* на 3.

$$3A = 3\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

в**)** Найдем произведение 3AB

$$3AB = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}$$

г) Найдем матрицу C, складывая соответствующие элементы

$$C = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 24 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}$$

**1.**

2) Найдем произведение $A \cdot A^{-1}$ и $A^{-1} \cdot A$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

В соответствии с определением данные матрицы являются взаимообратными.

**Форма предоставления результата:** выполненная работа.

## Тема 6.1.
## Матрицы и определители

### Практическая работа №14

### Вычисление определителей.

**Цель работы:** научиться вычислять определители второго и третьего порядков.

**Выполнив работу, Вы будете:**

уметь:

- вычислять определители второго порядка;
- вычислять определители третьего порядка.

**Материальное обеспечение:** индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

**Задание:**

Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$  2) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$  3) $\begin{vmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -15 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

**Краткие теоретические сведения:**
Определителем квадратной матрицы второго порядка (определителем второго порядка) называется число, равное разности произведений элементов главной диагонали и элементов побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Определителем квадратной матрицы третьего порядка (определителем третьего порядка) называется число, равное

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

**Порядок выполнения работы:**

1 Запишите определитель, определите какого он порядка.
2 Используя соответствующее определение, вычислите значение определителя.

**Ход работы:**
Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-4) = 12 + 12 = 24$

2) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$

$-6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = -15 + 48 - 6 - 18 =$

$= 48 - 39 = 9$

3) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -7 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-7) \cdot 1 + (-6) \cdot (-3) \cdot 5 -$

$$-5 \cdot 2 \cdot 1 - (-6) \cdot 0 \cdot 2 - (-3) \cdot (-7) = 16 + 0 + 90 - 10 - 0 - 84 = 12$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.

## Тема 6.2.
## Решение систем линейных алгебраических уравнений.

### Практическая работа № 15

### Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

**Цель работы:** научиться решать системы линейных уравнений, используя формулы Крамера.

**Выполнив работу, Вы будете:**

уметь:

- решать системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными методом Крамера;

решать системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Крамера;

**Материальное обеспечение:**

Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

**Задание:**

Решить системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 3x - 5y = 11 \\ 2x + 3y = 20 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 3y - 5z = -2 \\ x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + 7z = 27 \end{cases}$

**Краткие теоретические сведения:**

Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы:. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель $\Delta_1$ получается из определителя $\Delta$ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$

Определитель $\Delta_2$ получается из определителя $\Delta$ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы:. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель $\Delta_1$ получается из определителя $\Delta$ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определитель $\Delta_2$ получается из определителя $\Delta$ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель $\Delta_3$ получается из определителя $\Delta$ путем замены третьего столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Чтобы вычислить значения неизвестных, воспользуемся формулами Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

**Порядок выполнения работы:**

1. Запишите систему уравнений.
2.Запишите и вычислите определитель системы.
3.Вычислите определители каждой неизвестной.
4.Найдите значения неизвестных, используя формулы Крамера.

**Ход работы:**

Рассмотрим пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Вычислим определители каждой переменной:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 40 - 15 + 10 - 0 = 20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 30 + 0 + 45 - 0 - 20 = -10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 30 - 0 - 20 - 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{10} = -1;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0$$

Ответ: (2;-1;0).

**Форма представления результата:** выполненная работа.

**Тема 6.2.**
**Решение систем линейных алгебраических уравнений.**

## Практическая работа № 16

### Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

**Цель работы:** научиться решать системы линейных уравнений методом последовательного исключения переменных (методом Гаусса).

**Выполнив работу, Вы будете:**

уметь:

- решать системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными методом Гаусса;

решать системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса;

**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

**Задание:**

Решить системы линейных уравнений:

1. $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

**Краткие теоретические сведения:**

Метод Гаусса является одним из наиболее универсальных методов решения систем линейных уравнений. Он состоит в последовательном исключении неизвестных.

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому виду. На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

На практике удобнее работать не с системой уравнений, а с расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками.

Элементарными преобразованиями матрицы являются:

- перестановка строк местами;

-умножение некоторой строки на любое, не равное нулю число;
-прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число

**Порядок выполнения работы:**

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте расширенную матрицу.
3. Выполните элементарные преобразования строк матрицы, исключая последовательно переменные. В результате должна получиться ступенчатая матрица.
4. По ступенчатой матрице составьте систему.
5. Последовательно найдите значения всех неизвестных.
6. Запишите ответ.

**Ход работы:**

Рассмотрим пример:
Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Полученной матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ \qquad x_2 - 2x_3 = -1\,; \\ \qquad\quad -2x_3 = 0 \end{cases}$$

Начиная снизу вверх, находим значения неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 + 2\cdot(-1) = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1. \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Ответ: (2;-1;0).

**Форма представления результата:** выполненная работа.

## Тема 6.2.
## Решение систем линейных алгебраических уравнений.

### Практическая работа № 17

### Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

**Цель работы:** Научиться решать системы линейных уравнений матричным способом.

**Выполнив работу, Вы будете:**

уметь:

-находить обратную матрицу;

- решать систему линейных уравнений матричным способом.

**Материальное обеспечение:** Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

**Задание:**

Решить систему линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -7 \\ 6x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases};$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -25 \end{cases}$

### Краткие теоретические сведения:

Пусть задана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Составим матричное уравнение: $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Чтобы вычислить обратную матрицу, нужно:

а) вычислить определитель матрицы А $(\Delta\text{А} \neq 0)$;

б) найти алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы А;

в) транспонировать матрицу из алгебраических дополнений;

г) найти обратную матрицу: $\text{А}^{-1} = \frac{1}{\Delta\text{А}} \begin{pmatrix} \text{А}_{11} & \text{А}_{21} \cdots & \text{А}_{m1} \\ \text{А}_{12} & \text{А}_{22} \cdots & \text{А}_{m1} \\ \text{А}_{1n} & \text{А}_{2n} \cdots & \text{А}_{mn} \end{pmatrix}$

Чтобы найти неизвестную матрицу X, нужно умножить обратную матрицу $\text{А}^{-1}$ на матрицу В, состоящую из свободных членов.

**Порядок выполнения работы:**

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте матричное уравнение.
3. Вычислите обратную матрицу.
4. Найдите значения неизвестных.
5. Запишите ответ.

**Ход работы:**

Решить систему линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -7 \\ 6x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases}.$

Найдем

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 9 = -19 \neq 0 \Rightarrow$обратная матрица есть.

$A^{-1} = -\frac{1}{19}\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$

Решим уравнение:

$$X = A^{-1}C = -\frac{1}{19}\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{19}\begin{pmatrix} -20-18 \\ -12+12 \end{pmatrix} =$$

$$-\frac{1}{19}\begin{pmatrix} -38 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (2; 0).

2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -25 \end{cases}.$

Найдем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = -104.$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -12;$ $\quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -16;$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4;$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -31;$ $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 2;$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7;$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 13;$ $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 26;$ $\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13.$

Составим обратную матрицу: $\quad A^{-1} = -\frac{1}{104}\begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix}.$

Решим матричное уравнение:

$$X = A^{-1}C = -\frac{1}{104}\begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix} =$$

$$-\frac{1}{104}\begin{pmatrix} -120+64+56 \\ -310-8-98 \\ 130-104+182 \end{pmatrix} = -\frac{1}{104}\begin{pmatrix} 0 \\ -416 \\ 208 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (0;4;-2).

Сделаем проверку:

$$\begin{cases} 0 + 12 - 2 = 10 \\ 0 - 8 + 4 = -4 \\ 0 - 4 - 10 = -14 \end{cases}. \text{ (верно)}$$

**Форма представления результата:** выполненная работа.