

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет
им. Г. И. Носова»
Многопрофильный колледж



УТВЕРЖДАЮ
Директор
/ С.А. Махновский
29.06.2022г

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
ЕН.01 Математика**

для обучающихся специальности

22.02.05 Обработка металлов давлением

Магнитогорск, 2022

ОДОБРЕНО

Предметной комиссией
«Математических и естественнонаучных дисциплин»
Председатель Е.С.Корытникова
Протокол № 10 от 22.06.2022 г.

Методической комиссией МпК

Протокол № 6 от 29.06.2022 г.

Составитель:

преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И.Носова» МпК

Ю.Ф. Сивилькаева

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины ЕН.01 «Математика».

Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 22.02.05 Обработка металлов давлением и овладению профессиональными компетенциями.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ	4
2 ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ	5
3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ	8
Практическая работа № 1	8
Практическая работа №2	9
Практическая работа №3	12
Практическая работа №4	13
Практическая работа №5	15
Практическая работа №6	17
Практическая работа №7	19
Практическая работа № 8	20
Практическая работа № 9	22
Практическая работа № 10	23
Практическая работа № 11	25
Практическая работа № 12	29
Практическая работа № 13	30
Практическая работа № 14	32
Практическая работа № 15	34
Практическая работа № 16	36
Практическая работа № 17	38
Практическая работа №18	42
Практическая работа №19	43
Практическая работа № 20	44
Практическая работа № 21	46
Практическая работа № 22	48
Практическая работа № 23	50
Практическая работа № 24	51

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки обучающихся составляют практические занятия.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование профессиональных практических умений (умений выполнять определенные действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности) или учебных практических умений решать задачи по математике, необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

- анализировать сложные функции и строить их графики;
- выполнять действия над комплексными числами;
- вычислять значения геометрических величин;
- производить операции над матрицами и определителями;
- решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;
- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления;
- решать системы линейных уравнений различными методами;

Содержание практических и лабораторных занятий ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению **профессиональными компетенциями:**

ПК 2.6. Производить расчеты энергосиловых параметров оборудования.

А также формированию **общих компетенций:**

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

Выполнение обучающимися практических работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проективных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Содержание обучения	Темы практических/лабораторных занятий	Количество часов	в форме практической подготовки	Требования ФГОС СОО
Раздел 1. Комплексные числа		6		
1.1 Комплексные числа	Практическая работа 1 Алгебраическая форма комплексных чисел. Действия над комплексными числами в алгебраической форме	2		У2 Уо 01.02 Уо 02.04 3 3
	Практическая работа 2 Тригонометрическая форма комплексного числа. Переход от одной формы комплексных чисел к другой.	2		
	Практическая работа 3 Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.	2		
Раздел 2. Дифференциальное и интегральное исчисление		22		
2.1 Дифференциальное исчисление	Практическое занятие 4. Дифференцирование сложных функций	2		У1, У6, 31, 32, 33 Уо 01.02 Уо 02.04 Уо 01.05
	Практическое занятие 5. Применение производной к исследованию функций.	2		
	Практическое занятие 6. Применение производной к решению задач профессиональной направленности	2		
2.2 Интегральное исчисление	Практическое занятие 7. Нахождение неопределенных интегралов по таблице интегралов и методом замены.	2		У3, У6, 31, 32, 33 Уо 01.02 Уо 02.07 Уо 01.05
	Практическое занятие 8. Нахождение неопределенных интегралов методом	2		

	интегрирования по частям			
	Практическая работа 9. Нахождение определенных интегралов различными методами	2		
	Практическая работа 10. Нахождение площадей фигур и объемов тел	2		
	Практическое занятие 11. Применение определенных интегралов к решению прикладных задач.	2		
2.3 Дифференциальные уравнения	Практическая работа 12 Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными	2		У6, 32, 33 Уо 01.02 Уо 02.04
	Практическая работа 13 Решение однородных дифференциальных уравнений первого порядка	2		
	Практическая работа 14 Решение дифференциальных уравнений второго порядка	2		
Раздел 3. Элементы теории вероятностей и математической статистики		6		
3.1. Элементы комбинаторики	Практическая работа 15 Решение комбинаторных задач	2		Уо 01.02 Уо 02.07 Уо 01.05 У5, 32
3.2. Элементы теории вероятностей и математической статистики	Практическая работа 16 Решение задач на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики	2		У5, 32 Уо 01.02 Уо 02.04 Уо 02.07 Уо 01.05
	Практическая работа 17 Выборка. Числовые характеристики выборки.	2		

	Генеральная совокупность и выборочная совокупность. Определение статистических распределений			
Раздел 4. Линейная алгебра		12		
4.1. Матрицы и определители	Практическая работа 18 Действия с матрицами	2		У4, 32
	Практическая работа 19 Вычисление определителей 2-го и 3-го порядка	2		Уо 01.02 Уо 02.04 Уо 01.05
4.2. Системы линейных алгебраических уравнений	Практическая работа 20 Решение систем линейных уравнений методом Крамера	2		У7, 32
	Практическая работа 21 Нахождение обратной матрицы	2		Уо 01.02 Уо 02.04 Уо 01.05
	Практическая работа 22 Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы	2		
	Практическая работа 23 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса	1		
	Практическая работа 24 Решение систем линейных уравнений различными способами	1		
ИТОГО		48		

3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1 Комплексные числа

Практическая работа № 1

Алгебраическая форма комплексных чисел. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Цель работы: Научиться выполнять действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- записывать комплексные числа в алгебраической форме;
- выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Даны комплексные числа: $z_1 = (-3; -5)$, $z_2 = (-7, 2; 7, 2)$, $z_3 = (2; 6)$.
Записать эти числа в алгебраической форме.

2. Вычислить:

- 1) $z_1 + z_2$;
- 2) $z_2 - z_3$;
- 3) z_1 / z_3 ;
- 4) $z_2 * z_3$;
- 5) z_1^5 .

3. Вычислить:

$$\frac{1-3i}{i-2} + \frac{1+4i}{1+3i} + i^{13}$$

Порядок выполнения работы:

1. Запишите комплексные числа в алгебраической форме $z = a + bi$

2. Выполните действия над комплексными числами в алгебраической форме, используя формулы: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$;

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Ход работы:

1. Даны комплексные числа: $z_1 = (7; 1)$, $z_2 = (-1, 5; 1, 5)$, $z_3 = (4; -3)$.
Записать эти числа в алгебраической форме.

Решение:

Т.к. алгебраическая форма комплексного числа имеет вид: $z = a + bi$, то числа в алгебраической форме будут записаны в виде:

$$z_1 = 7 + i; \quad z_2 = -1,5 + 1,5i; \quad z_3 = 4 - 3i.$$

2. Вычислить:

$$z_1 + z_2 = (7 - 1,5) + (1 + 1,5)i = 5,5 + 2,5i;$$

$$z_2 - z_3 = (-1,5 - 4) + (1,5 + 3)i = -5,5 + 4,5i;$$

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{7+i}{4-3i} = \frac{(7+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{28+4i+21i+3i^2}{16-9i^2} = \frac{28+25i-3}{16+9} = \frac{25+25i}{25} = 1+i;$$

$$z_2 \cdot z_3 = (-1,5 + 1,5i)(4 - 3i) = -6 + 4,5i + 6i - 4,5i^2 = -6 + 10,5i + 4,5 = -1,5 + 10,5i;$$

$$z_1^5 = (7+i)^5 = ((7+i)^2(7+i))^2(7+i) = (49+14i+i^2)^2(7+i) = (48+14i)^2(7+i) = (2304+1344i+196i^2)(7+i) = 2304 \cdot 7 + 1344i \cdot 7 + i \cdot 2304 + 196i^2 \cdot 7 + i \cdot 196i^2 = 16128 + 9408i + 2304i + 1372i^2 + 196i^3 = 16128 + 11712i - 1372 + -196i = 14756 + 11516i;$$

$$3. \text{ Вычислить: } \frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8$$

Решение:

$$\frac{1+3i}{i-3} + \frac{4-5i}{1+3i} - i^8 = -2,1 - 2,7i;$$

$$1) \frac{1+3i}{i-3} = \frac{(1+3i)(-i-3)}{(i-3)(-i-3)} = \frac{-i-3-3i^2-9i}{-i^2+9} = \frac{-10i}{10} = -i$$

$$2) \frac{4-5i}{1+3i} = \frac{(4-5i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{4-12i-5i+15i^2}{1-9i^2} = \frac{-11-17i}{10} = -1,1 - 1,7i$$

$$3) i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$$

$$4) -i - 1,1 - 1,7i - 1 = -2,1 - 2,7i$$

Форма представления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Тема 1.1 Комплексные числа

Практическая работа №2

Тригонометрическая форма комплексного числа. Переход от одной формы комплексных чисел к другой

Цель: Научиться записывать комплексные числа в тригонометрической форме, выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- записывать комплексные числа в тригонометрической форме;
- выполнять действия в тригонометрической форме;
- переходить из тригонометрической формы в алгебраическую.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

- Даны комплексные числа: $z_1=(-3;-5)$, $z_2=(-7,2;7,2)$, $z_3=(2;6)$.

Записать эти числа в тригонометрической форме.

2. Вычислите:

$$1) z_2 \cdot z_3;$$

$$2) \frac{z_1}{z_3};$$

$$3) z_1^5;$$

$$4) \sqrt{z_2};$$

3. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

$$a) (3 \cdot (\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}))^2 \quad б) \frac{24(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)}{3(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)}.$$

Краткие теоретические сведения:

Тригонометрической формой комплексных чисел называется запись их в виде:

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

При выполнении действий над комплексными числами в тригонометрической форме используются следующие формулы:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \\ z^n &= r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \end{aligned}$$

Для извлечения корня n -й степени из комплексного числа в тригонометрической форме

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ используется формула :

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \text{ где } \sqrt[n]{r} - \text{арифметический корень, } k=0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Алгоритм перехода от алгебраической формы к тригонометрической:

Пусть комплексное число задано в алгебраической форме $z = a + bi$.

1) Модуль $r = |z|$ однозначно определяется по формуле $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2) Аргумент φ определяется из формул $\cos \varphi = \frac{a}{r}$, $\sin \varphi = \frac{b}{r}$.

Значения аргумента комплексного числа можно находить и так:

• Определить, в какой четверти находится точка (использовать геометрическую интерпретацию числа)
 $z = a + bi$

• Решив уравнение $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$, получаем, что

$\arg z = \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ для внутренних точек 1 и 4 четвертей,

$\arg z = \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi$ для внутренних точек 2 четверти,

$\arg z = \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \pi$ для внутренних точек 3 четверти.

Если точка z лежит на действительной или мнимой оси, то $\arg z$ можно найти непосредственно.

3) Найдя модуль и аргумент комплексного числа, его можно записать в тригонометрической или показательной форме $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ или $z = re^{i\varphi}$.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите заданные числа в тригонометрической форме, используя алгоритм перехода к тригонометрической форме.
2. Выполните заданные действия.

Ход работы:

Даны комплексные числа: $z_1=(7;1)$, $z_2=(-1,5;1,5)$, $z_3=(4;-3)$.

1. Записать числа z_1 , z_2 и z_3 в тригонометрической форме.

Решение:

$$1) \quad z_1 = 7 + i$$

$$|z_1| = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2},$$

Число находится в первой четверти, значит

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{7} = \operatorname{arctg} 0,1429.$$

$$z_1 = 7 + i = 5\sqrt{2}(\cos 8^\circ 8' + i \sin 8^\circ 8').$$

$$2) \quad z_2 = -1,5 + 1,5i$$

$$|z_2| = \sqrt{(-1,5)^2 + 1,5^2} = \sqrt{2,25 + 2,25} = \sqrt{4,5} = 2,1$$

Число находится во второй четверти, значит $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi = \operatorname{arctg}(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$;

$$z_2 = -1,5 + 1,5i = 2,1(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}).$$

$$3) \quad z_3 = 4 - 3i$$

$$|z_3| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Число находится в четвертой четверти, значит

$$\varphi = \arctg \frac{-3}{4} = \arctg(-0,75) = -36^\circ 52'.$$

$$z_3 = 4 - 3i = 5(\cos(-36^\circ 52' + i \sin(-36^\circ 52')).$$

2. Вычислите:

$$1) \quad z_2 \cdot z_3;$$

$$2) \quad \frac{z_1}{z_3};$$

$$3) \quad z_1^5;$$

$$4) \quad \sqrt{z_2};$$

Решение:

$$z_2 \cdot z_3 = 2,1 \cdot 5(\cos(135^\circ - 36^\circ 52') + i \sin(135^\circ - 36^\circ 52')) = 10,5(\cos 98^\circ 8' + i \sin 98^\circ 8');$$

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{5\sqrt{2}}{5}(\cos(8^\circ 8' - (-36^\circ 52')) + i \sin(8^\circ 8' + 36^\circ 52')) = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ);$$

$$z_1^5 = (5\sqrt{2})^5(\cos 5 \cdot 8^\circ 8' + i \sin 5 \cdot 8^\circ 8') = 12500\sqrt{2}(\cos 40^\circ 40' + i \sin 40^\circ 40');$$

Воспользуемся формулой:

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n})$$

В нашем примере $n=2$.

$$\sqrt{z_2} = \omega_k = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}(\cos \frac{135^\circ + 360^\circ k}{2} + i \sin \frac{135^\circ + 360^\circ k}{2});$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}(\cos \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 0}{2} + i \sin \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 0}{2}) = \sqrt{2,1}(\cos 67^\circ 30' + i \sin 67^\circ 30');$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}(\cos \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 1}{2} + i \sin \frac{135^\circ + 360^\circ \cdot 1}{2}) = \sqrt{2,1}(\cos 247^\circ 30' + i \sin 247^\circ 30').$$

3. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

$$(2 \cdot (\cos \frac{5\pi}{24} + i \sin \frac{5\pi}{24}))^6 = 2^6 (\cos \frac{5\pi}{24} \cdot 6 + i \sin \frac{5\pi}{24} \cdot 6) = 64 (\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}) = 64 (-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}) = -32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}i;$$

$$\frac{24(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)}{3(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)} = \frac{24}{3}(\cos(75^\circ - 15^\circ) + i \sin(75^\circ - 15^\circ)) = 8(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 8(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}) = 4 + 4\sqrt{3}i;$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Практическая работа №3

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Цель работы: Научиться выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

уметь:

- выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической форме;

- переходить из тригонометрической формы в алгебраическую.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций

Задание:

1. Даны комплексные числа в тригонометрической форме:

$$z_1 = 5 \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right) \quad \text{и} \quad z_2 = 8 \left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \right).$$

Вычислите: $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_2}{z_1}$; z_1^3 ; $\sqrt[3]{z_2}$

2. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

$$\text{а) } \left(3 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \right)^2 \quad \text{б) } \frac{24(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)}{3(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)}$$

Краткие теоретические сведения:

Тригонометрической формой комплексных чисел называется запись их в виде: $z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

При выполнении действий над комплексными числами в тригонометрической форме используются следующие формулы:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа в тригонометрической форме $z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ используется формула:

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \text{ где } \sqrt[n]{r} - \text{арифметический корень, } k=0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Порядок выполнения работы:

4. Запишите заданные в тригонометрической форме числа.

5. Используя конспект, выясните, как выполняются действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

6. Выполните заданные действия.

Ход работы:

Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

$$\begin{aligned} & \left(2 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{24} + i \sin \frac{5\pi}{24} \right) \right)^6 = 2^6 \left(\cos \frac{5\pi}{24} \cdot 6 + i \sin \frac{5\pi}{24} \cdot 6 \right) = \\ & 1) \quad 64 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = 64 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}i \\ & 2) \quad \frac{24(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)}{3(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)} = \frac{24}{3} (\cos(75^\circ - 15^\circ) + i \sin(75^\circ - 15^\circ)) = \\ & 8(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 8 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 4 + 4\sqrt{3}i \end{aligned}$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Раздел 2 Дифференциальное и интегральное исчисление

Тема 2.1. Производная функции и ее приложения

Практическая работа №4

Дифференцирование сложных функций.

Цель: Научиться находить производные сложных функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- применять правила дифференцирования;
- находить производные сложных функций.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций, таблица производных.

Задание:

Найти производные функций

1. $y = (5x^3 - 2x)^6$
2. $f(x) = 3 \sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3. $f(x) = \arcsin 4x + \arccos^2 x$
4. $f(x) = \log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$
5. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Порядок выполнения работы:

1. Определить вид функции. Ввести промежуточный аргумент.
 1. Определить, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Применить соответствующее правило.
 2. Используя таблицу производных, найти производные функций.
 3. Раскрыть скобки и привести подобные, если это упростит запись функции.

Ход работы:

Найти производные функций:

1. $g(x) = (1 - 4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u = 1 - 4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$
 $y' = 10(1 - 4x^2)^9 \cdot (1 - 4x^2)' = 10(1 - 4x^2)^9(-8x) = -80x(1 - 4x^2)^9$

2. $f(x) = \sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = (\sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (\sin \frac{1}{2}x)' \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x (\cos 2x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$, $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

$$f'(x) = \left(\sin \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x\right)' = \left(\sin \frac{1}{2}x\right)' \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x (\cos 2x)' = \cos \frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot \cos 2x + \sin \frac{1}{2}x \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)' \\ = \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x - 2 \sin \frac{1}{2}x \cdot \sin 2x.$$

$$3. y = \frac{2^{3x+5x^2}}{\log_2(3+10x)}$$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = 3x + 5x^2$, для второй функции $u = 3 + 10x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$.

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} = \frac{2^{3x+5x^2} \ln 2 (3x+5x^2)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{1}{(3+10x) \ln 2} (3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} =$$

$$\frac{2^{3x+5x^2} \ln 2 (3+10x) \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{10}{(3+10x) \ln 2}}{(\log_2(3+10x))^2}$$

$$4. f(x) = \arcsin \frac{3}{5}x + \arccos 5x$$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U + V)' = U' + V'$.

$$f'(x) = \left(\arcsin \frac{3}{5}x\right)' + (\arccos 5x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = \frac{3}{5}x$, для второй функции $u = 5x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$$f'(x) = \left(\arcsin \frac{3}{5}x\right)' + (\arccos 5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{5}x)^2}} \left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}} (5x)' = \frac{3}{5 \sqrt{1-\frac{9}{25}x^2}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

$$5. f(x) = \arccos \sqrt{1 - e^{2x}}$$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент $u = \sqrt{1 - e^{2x}}$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f'(x) = (\arccos \sqrt{1 - e^{2x}})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1 - e^{2x}})'$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент $u = 1 - e^{2x}$.

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$f'(x) = (\arccos \sqrt{1 - e^{2x}})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1 - e^{2x}})' = -\frac{1}{\sqrt{1-1+e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot (1 - e^{2x})' = -\frac{1}{e^x} \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} (-2e^x) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Раздел 2 Дифференциальное и интегральное исчисление

Тема 2.1. Производная функции и ее приложения

Практическая работа №5

Применение производной к исследованию функций

Цель работы: Научиться исследовать функции и строить графики функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- проводить исследование функций с помощью производной;
- строить графики функций.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Исследовать функцию по общей схеме и построить ее график:

1. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.

2. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$.

Краткие теоретические сведения:

Общая схема исследования функций.

1. Найти область определения функции $D(y)$.
2. Найти (если это не вызывает затруднений) точки пересечения графика с осями координат (при $x = 0$ и при $y = 0$).
3. Исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность.
4. Найти интервалы монотонности, точки экстремумов и значения функции в этих точках.
5. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика функции.
6. Найти асимптоты графика функции.
7. Найти дополнительные точки и построить график по результатам исследования.

Алгоритм нахождения экстремумов функции и интервалов ее монотонности с помощью первой производной

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.
2. Найти производную функции $f'(x)$.
3. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.
4. Исследовать характер изменения функции $f(x)$ и знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$.
5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

Помни: критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежутков, в котором $f'(x) < 0$, от промежутка, в котором $f'(x) > 0$, и точка максимума - в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0 , знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

6. Вычислить значения функции в точках экстремума.

7. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

Алгоритм нахождения выпуклостей функции и точек перегиба:

1. Находим вторую производную.
2. Находим точки, в которых $f''(x) = 0$ или не существует.

- Исследуем знак слева и справа от найденных точек и делаем вывод об интервалах выпуклости и о наличии точек перегиба.
- Находим значение функции в точках перегиба.

Асимптоты.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x; f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ равно $-\infty$ или $+\infty$.

Замечание. Прямая $x = a$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = a$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Прямая $y = b$ называется **горизонтальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ равно b .

Замечание. График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - kx - b| = 0$.

Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \rightarrow \infty$.

Порядок выполнения работы:

- Провести анализ заданной функции по общей схеме.
- Построить график функции.

Ход работы:

Исследовать функцию и построить ее график.

$$y = \frac{x^2}{2x-2}$$

- Область определения функции $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

- При подстановке значения $x = 0$ получим $y(0) = 0$.

Такую же точку получим, если приравняем функцию к нулю. Точка $x = 0$ - единственная точка пересечения с осями координат.

- Проверяем функцию на четность

$$y(-x) = \frac{(-x)^2}{-2x-2} = -\frac{x^2}{2x+2}$$

$$y(-x) \neq y(x); y(-x) \neq -y(x).$$

Итак, функция ни четная, ни нечетная, непериодическая.

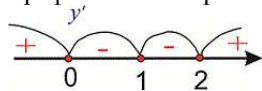
- Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную функции

$$y' = \frac{2x(2x-2) - x^2 \cdot 2}{(2x-2)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2}{(2x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(2x-2)^2}$$

Приравняв ее к нулю, получим критические точки $x = 0$; $x = 2$. Они разбивают область определения на следующие интервалы монотонности $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения.

Графически интервалы монотонности будут иметь вид



Исследуемая функция возрастает на интервалах $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ и убывает $(0; 1) \cup (1; 2)$.

5. Точка $x = 0$ точка локального максимума, $x = 2$ - локального минимума. Найдем значение функции $y_{\max} = 0$; $y_{\min} = 2$.

- Для отыскания интервалов выпуклости найдем вторую производную

$$y'' = \frac{(4x-4)(2x-2)^2 - (2x^2-4x) \cdot 2(2x-2) \cdot 2}{(2x-2)^4} = \frac{8}{(2x-2)^3} = \frac{8}{8(x-1)^3} = \frac{1}{(x-1)^3}$$

Таких интервалов нет, поскольку вторая производная не принимает нулевых значений в области определения.

7. Прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$.

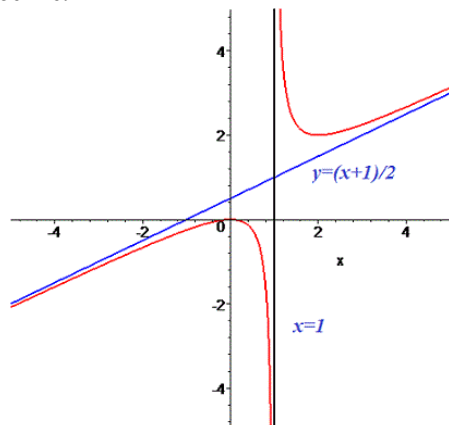
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2x-2)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{2x-2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

Конечный вид прямой следующий

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

8. На основе проведенного анализа выполняем построение графика функции. Для этого сначала строим вертикальные и наклонные асимптоты, затем находим значение функции в нескольких точках и по ним проводим построение.



Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Раздел 2 Дифференциальное и интегральное исчисление

Тема 2.1. Производная функции и ее приложения

Практическая работа №6

Применение производной к решению задач профессиональной направленности

Цель работы: Научиться применять дифференциал для приближенного вычисления значений функции.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить приближенные значения функций.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Вычислить приближенные значения, используя дифференциал:

1) $\ln 1,01$;

- 2) $3,96^3$;
- 3) $\sqrt{16,004}$;
- 4) $\sqrt[3]{64,09}$;
- 5) $\sqrt[4]{15,8}$.

Краткие теоретические сведения:

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется произведение производной функции в этой точке на дифференциал аргумента dx .

$$dy = f'(x_0) \cdot dx$$

Формула для приближенного вычисления значения функции:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \Delta x = x - x_0.$$

При практическом применении формулы надо понимать, что погрешность приближенного значения будет тем меньше, чем меньше Δx . Кроме того, точка x_0 должна быть «удобной» для вычисления значения функции в ней.

Ну и, разумеется, функция $y = f(x)$ должна быть дифференцируемой в точке x_0 .

Порядок выполнения работы:

1. Представьте аргумент в виде $x_0 + \Delta x$.
2. Примените формулу для вычисления приближенного значения функции.

Ход работы:

Вычислить приближенные значения, используя дифференциал:

$$1) 1,01^{10}$$

В качестве «удобной» точки возьмем $x_0 = 1$. Тогда приращение аргумента $\Delta x = x - x_0 = 1,01 - 1 = 0,01$.

$$f(x_0) = f(1) = 1^{10} = 1;$$

$$f'(x) = (x^{10})' = 10x^9; \quad f'(1) = 10.$$

Подставляя найденные значения в формулу, получим:

$$1,01^{10} = (1 + 0,01)^{10} \approx 1 + 10 \cdot 0,01 = 1 + 0,1 = 1,1.$$

$$2) \sqrt[3]{7,95}$$

В качестве «удобной» точки возьмем $x_0 = 8$. Тогда приращение аргумента $\Delta x = x - x_0 = 7,95 - 8 = -0,05$.

$$f(x_0) = \sqrt[3]{8} = 2; \quad f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}};$$

$$f'(8) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{64}} = \frac{1}{12}.$$

Подставляя найденные значения в формулу, получим:

$$\sqrt[3]{7,95} = \sqrt[3]{8 - 0,05} \approx 2 + \frac{1}{12} \cdot (-0,05) = 2 - \frac{1}{240} = 1 \frac{239}{240}.$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Раздел 2 Дифференциальное и интегральное исчисление
Тема 2.2 Интеграл и его приложения

Практическая работа №7

Нахождение неопределенных интегралов по таблице интегралов и методом замены

Цель работы: Научиться интегрировать функции, используя различные методы интегрирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить неопределенные интегралы методом подстановки;
- находить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Найдите неопределенные интегралы:

1) $\int (8x^4 - 6x^2 + 2x - 3)dx$

2) $\int \frac{3x^4 + 2x^2 - 3x + 7}{x^2} dx$

3) $\int \cos(10x - 5) dx$

4) $\int 3^{4x^2} x dx$

5) $\int \frac{5dx}{25 + 16x^2}$

6) $\int \frac{x^2 dx}{(1 - 2x^3)^2}$

7) $\int \frac{2x^4 - 4x^2 - 3x - 1}{\sqrt[3]{x}} dx$

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать.
3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл. В случае неопределенного интеграла вернуться к старой переменной.

Ход работы: Найти интегралы:

1) $\int \frac{3x^4 + 2x^2 - 3x + 7}{x^2} dx$

Чтобы найти этот интеграл, нужно сначала привести подынтегральное выражение к табличному виду. Для этого применяем почленное деление:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{6x^4 - 5x^2 + 3x + 4}{x^2} dx \\
&= \int \left(\frac{6x^4}{x^2} - \frac{5x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{4}{x^2} \right) dx \\
&= \int \left(6x^2 - 5 + \frac{3}{x} + 4x^{-2} \right) dx \\
&= 6 \int x^2 dx - 5 \int dx \\
&+ 3 \int \frac{dx}{x} + 4 \int x^{-2} dx = \frac{6x^3}{3} - 5x + 3 \ln|x| + \frac{4x^{-1}}{-1} + C = 2x^3 - 5x + 3 \ln|x| - \frac{4}{x} + C
\end{aligned}$$

2) $\int \frac{15x^2 dx}{(1-x^3)^4}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int \frac{15x^2 dx}{(1-x^3)^4} = \left[\begin{array}{l} 1-x^3 = t \\ d(1-x^3) = dt \\ -3x^2 dx = dt \\ x^2 dx = -\frac{dt}{3} \end{array} \right] = \int \frac{15dt}{-3t^4} = -5 \int t^{-4} dt = -5 \frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{5}{3t^3} + C = \frac{5}{3(1-x^3)^3} + C$$

Форма предоставления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Раздел 2 Дифференциальное и интегральное исчисление
Тема 2.2 Интеграл и его приложения

Практическая работа № 8

Нахождение неопределенных интегралов методом интегрирования по частям

Цель работы: Научиться интегрировать функции, используя различные методы интегрирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

1) $\int (x^2 + 5x + 7) \cdot \ln x dx;$

2) $\int e^{2x} \cos 3x dx;$

3) $\int (x^2 + 4x + 3)e^{2x} dx$.

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл нельзя найти другими способами, то примените формулу интегрирования по частям $\int U dv = UV - \int V du$. Этот метод заключается в том, что подынтегральное выражение представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей U и dV . Затем, после нахождения dU и V , используйте формулу интегрирования по частям.

Виды интегралов, берущихся по частям:

-Интегралы вида $\int P(x)e^{kx} dx$, $\int P(x)\sin kx dx$, $\int P(x)\cos kx dx$, где $P(x)$ - многочлен, k - число.

Удобно положить $U = P(x)$, а все остальные множители принять за dV .

-Интегралы вида $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$, $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arctg x dx$
 $\int P(x)\operatorname{arccotg} x dx$.

Удобно положить $P(x)dx = dV$, а остальные множители принять за U .

- Интегралы вида $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$, где a и b числа. За U можно принять функцию $U = e^{ax}$.

Ход работы: Найти интегралы:

1) $\int (x^3 - 4x)\ln x \cdot dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится ко второму виду, поэтому $U = \ln x$, $dV = (x^3 - 4x)dx$.

$$dU = \frac{1}{x}dx, \quad V = \int (x^3 - 4x)dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int (x^3 - 4x)\ln x \cdot dx &= \ln x \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) - \int \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \frac{1}{x} dx = \\ \ln x \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) - \int \left(\frac{x^3}{4} - 2x \right) dx &= \ln x \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) - \frac{x^4}{16} + x^2 + C \end{aligned}$$

2) $\int (x^2 - 2x)\cos 4x dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится к первому виду, поэтому $U = x^2 - 2x$, $dV = \cos 4x dx$.

$$dU = (2x - 2)dx, \quad V = \int \cos 4x dx = \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 2x) \cos 4x dx &= (x^2 - 2x) \frac{1}{4} \sin 4x - \int \frac{1}{4} \sin 4x (2x - 2) dx = \\ (x^2 - 2x) \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} \int \sin 4x (2x - 2) dx &= \frac{1}{4} (x^2 - 2x) \sin 4x - \frac{1}{2} \int \sin 4x (x - 1) dx = \end{aligned}$$

Чтобы найти оставшийся интеграл, снова применяем формулу интегрирования по частям.

$U = x - 1$, $dV = \sin 4x dx$.

$$\begin{aligned} dU &= dx, \quad V = \int \sin 4x dx = -\frac{1}{4} \cos 4x \\ &= \frac{1}{4} (x^2 - 2x) \sin 4x - \frac{1}{2} ((x - 1) \left(-\frac{1}{4} \cos 4x \right) - \int -\frac{1}{4} \cos 4x dx = \\ &\frac{1}{4} (x^2 - 2x) \sin 4x - \frac{1}{2} ((x - 1) \left(-\frac{1}{4} \cos 4x \right) + \frac{1}{4} \int \cos 4x dx = \\ &= \frac{1}{4} (x^2 - 2x) \sin 4x + \frac{1}{8} ((x - 1) (\cos 4x) - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \\ &\frac{1}{4} (x^2 - 2x) \sin 4x + \frac{1}{8} ((x - 1) (\cos 4x) - \frac{1}{32} \sin 4x + C \end{aligned}$$

Форма предоставления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

- «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Раздел 2 Дифференциальное и интегральное исчисление

Тема 2.2 Интеграл и его приложения

Практическая работа № 9

Нахождение определенных интегралов различными методами

Цель работы: Научиться находить определенные интегралы, используя различные методы интегрирования, вычислять приближенные значения определенных интегралов.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять определенные интегралы различными методами;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Вычислите определенные интегралы

2. $\int_{-2}^3 (4x^3 + 3x^2 + 2x + 1) dx$

3. $\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

4. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{3\sqrt{1-x^2}}$

5. $\int_{-2}^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x} \cos x dx$

7. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать. Вычислить значение определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.
3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл.
4. Если интеграл нельзя найти вышеуказанными способами, то применить формулу интегрирования по частям $\int U dV = UV - \int V dU$.

Ход работы:

- 1) $\int_{-1}^3 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 5) dx = 4 \int_{-1}^3 x^3 dx - 3 \int_{-1}^3 x^2 dx + 2 \int_{-1}^3 x dx + 5 \int_{-1}^3 dx = x^4 - x^3 + x^2 + 5x \Big|_{-1}^3 = 3^4 - (-1)^4 - (-1)^3 + (-1)^2 + 5 \cdot 3 - (-(-1)^4 - (-1)^3 + (-1)^2 + 5 \cdot (-1)) = 81 - 1 + 1 + 1 - 5 = 81 - 27 + 9 + 15 + 2 = 80$
- 2) $\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2} = \frac{5}{4} \int_0^{0,4} \frac{dx}{1+\frac{25}{4}x^2} = \frac{5}{4} \int_0^{0,4} \frac{dx}{1+(\frac{5}{2}x)^2} = \left[\begin{array}{l} \frac{5}{2}x = t \\ \frac{5}{2}dx = dt \\ dx = \frac{2}{5}dt \\ x_H = 0 \quad t_H = 0 \\ x_B = 0,4 \quad t_B = 1 \end{array} \right] =$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{5} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \arctgt|_0^1 = \frac{1}{2} (\arctg 1 - \arctg 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos^4 x}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos^4 x} = \left[\begin{array}{l} \cos x = t \\ d\cos x = dt \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \\ x_H = 0 \quad t_H = \cos 0 = 1 \\ x_B = \frac{\pi}{3} \quad t_B = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{array} \right] = \int_1^{0,5} \frac{-dt}{t^3} = -\frac{t^{-2}}{-2} \Big|_1^{0,5} = \frac{1}{2t^2} \Big|_1^{0,5} = \frac{1}{2 \cdot 0,25} - \frac{1}{2} = 2 - 0,5 = 1,5$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Раздел 2 Дифференциальное и интегральное исчисление

Тема 2.2 Интеграл и его приложения

Практическая работа № 10

Нахождение площадей фигур и объемов тел

Цель работы: научиться применять интегрирование для решения задач геометрии.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить площади плоских фигур с помощью определенных интегралов;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями:

а) $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$;

б) $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$;

в) $y^2 = x^3$; $x = 4$.

Краткие теоретические сведения:

Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на этом отрезке неотрицательные значения, т.е. $f(x) > 0$ при $x \in [a; b]$. Фигура, образованная линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$, называется

криволинейной трапецией (рис. 1). Определенный интеграл от неотрицательной функции имеет простой геометрический смысл: это площадь криволинейной трапеции.

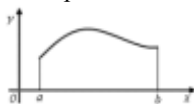


Рис. 1

Площади плоских фигур

1. Если функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a; b]$, то площадь S под кривой $y = f(x)$ на $[a; b]$ (рис. 2) численно равна определенному интегралу от $f(x)$ на данном отрезке: $S = \int_a^b f(x)dx$ (геометрический смысл определенного интеграла).

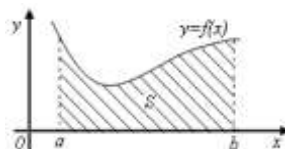


Рис. 2

2. Если функция $f(x)$ – неположительная на отрезке $[a; b]$, то площадь S под кривой $y = f(x)$ на $[a; b]$ (рис. 3) равна определенному интегралу от $f(x)$ на $[a; b]$, взятому со знаком «минус»: $S = -\int_a^b f(x)dx$.

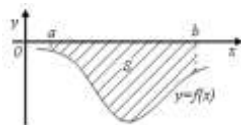


Рис. 3

3. Если функция $f_2(x) \geq f_1(x)$ на отрезке $[a; b]$, то площадь S фигуры, заключенной между кривыми $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$ на $[a; b]$ (рис. 4) определяется формулой $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

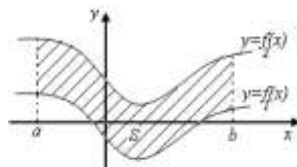


Рис. 4

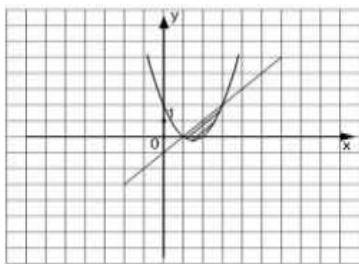
Порядок выполнения работы:

1. Изобразите фигуру на координатной плоскости;
2. Определите, является ли фигура криволинейной трапецией.
3. Вычислите площадь фигуры.

Ход работы:

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 3x + 2$ и $y = x - 1$.

Найдем пределы интегрирования - точки пересечения графиков функций, для этого приравняем правые части исходных функций и решим получившееся уравнение $x^2 - 3x + 2 = x - 1$. Корнями этого уравнения являются числа $x = 1$ и $x = 3$, следовательно, они и являются пределами интегрирования.



Значит, площадь фигуры равна:

$$S = \int_1^3 (x - 1) dx - \int_1^3 (x^2 - 3x + 2) dx = \frac{x^2}{2} - x - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) = \frac{9}{2} - 3 - \frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{27}{3} - \frac{3 \cdot 9}{2} + 6 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2 \right) = 1 \frac{1}{3}$$

Получили, что площадь фигуры равна $1 \frac{1}{3}$ (кв. ед.)

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Раздел 2 Дифференциальное и интегральное исчисление

Тема 2.2 Интеграл и его приложения

Практическая работа № 11

Применение определенных интегралов к решению прикладных задач

Цель работы: научиться решать физические и технические задачи с применением дифференциального и интегрального исчисления.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- анализировать задачу или проблему и выделять ее составные части
- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями), таблицы интегралов.

Задание:

1. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 18t - 6t^2$.
2. Найдите путь, пройденный точкой за четвертую секунду, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 3t^2 - 2t - 3$.
3. Сила упругости пружины, растянутой на 0,05 м, равна 3Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,05м?
4. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05м, если сила 100Н растягивает пружину на 0,01м.
5. Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 20 м, а высота 5 м (считая шлюз доверху заполненным водой).

Краткие теоретические сведения:

Путь, пройденный телом

Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью $v=v(t)$. Найдем путь S , пройденный ею за промежуток времени от t_1 до t_2 .

Из физического смысла производной известно, что при движении точки в одном направлении «скорость прямолинейного движения равна производной от пути по времени», т. е. $v(t) = \frac{dS}{dt}$. Отсюда следует, что $dS =$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

$v(t)dt$. Интегрируя полученное равенство в пределах от t_1 до t_2 , получаем

Пусть материальная точка перемещается вдоль оси ox под действием переменной силы $F = F(x)$, направленной параллельно оси. Тогда работа, произведённая силой F при перемещении точки из положения $X = a$ в положение $x = b$ ($a < b$) вычисляется по формуле:

$$A = \int_a^b F(x) dx$$

Вычисление работы с помощью определённого интеграла.

Пусть под действием некоторой силы $f(x)$ материальная точка M движется по прямой в направлении оси ox . Требуется найти работу, произведённую силой $f(x)$ при перемещении точки M из положения $x = x_1$ в положение $x = x_2$.

- 1) Если сила постоянна $f(x) = C$, то работа выражается следующим образом $A = C(x_2 - x_1)$.

- 2) Если сила переменная величина, то $A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$.

Определение силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку.

Из физики известно, что сила P давления жидкости на горизонтально расположенную площадку S , глубина погружения которой равна h , определяется по формуле:

$$P = 9,81\gamma h S \quad (4), \text{ где } \gamma - \text{плотность жидкости.}$$

$$P = 9,81\gamma \int_a^b xy \, dx \quad (5).$$

Если верхний край пластинки совпадает с поверхностью жидкости, то $a=0$ и формула (5) примет вид

$$P = 9,81\gamma \int_a^b xy \, dx \quad (5).$$

Ширина каждой полосы зависит от формы пластинки и является функцией глубины x погружения данной полосы.

Для пластинки постоянной ширины формула (5) упрощается, т.к. эту постоянную можно вынести за знак интеграла:

$$P = 9,81\gamma \int_a^b xy \, dx = 9,81\gamma y \int_a^b x \, dx = 9,81\gamma y \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = 9,81\gamma y \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Порядок выполнения работы:

1. Прочитать задачу и определить способ ее решения.
2. Применить формулу интегрального исчисления для решения задачи.

3. Записать ответ.

Ход работы:

Пример 1. Задание. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела $v(t) = 10t + 2$ (м/с).

Решение: Если $v(t) = 10t + 2$ (м/с), то путь, пройденный телом от начала движения ($t=0$) до конца 4-й секунды, равен

$$S = \int_0^4 (10t + 2) dt = 5t^2 \Big|_0^4 + 2t \Big|_0^4 = 80 + 8 = 88 \text{ (м)}.$$

Ответ: $S = 88$ (м).

Пример 2. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

Решение: По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x , т. е. $F = kx$, где k — коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила $F = 100$ Н растягивает пружину на $x = 0,01$ м; следовательно, $100 = k \cdot 0,01$, откуда $k = 10000$; следовательно, $F = 10000x$.

Искомая работа на основании формулы равна

$$A = \int_0^{0,05} 10000x dx = 5000x^2 \Big|_0^{0,05} = 12,5 \text{ (Дж)}.$$

Пример 3. В воду опущена прямоугольная пластинка, расположенная вертикально. Ее горизонтальная сторона равна 1 м, вертикальная 2 м. Верхняя сторона находится на глубине 0,5 м. Определить силу давления воды на пластинку.

Решение:

Здесь $y = 1$, $a = 0,5$, $b = 2 + 0,5 = 2,5$ (м), $\gamma = 1000 \text{ кг/м}^3$. Следовательно,

$$P = 9810 \int_a^b xy dx = 9810 \int_a^b x dx = 9810 \frac{x^2}{2} \Big|_{0,5}^{2,5} = 9810 \frac{2,5^2 - 0,5^2}{2} = 29430 \text{ (Н)}.$$

Выполнить задания:

1. Найти работу производимую при сжатии пружины на 0,03 м, если для сжатия её на 0,005 м нужно приложить силу в 10 Н.

Ответ: 0,9 Дж.

2. Сила упругости пружины, растянутой на 0,05 м, равна 3 Н. Найти работу, которую надо произвести, чтобы растянуть эту пружину на 0,05 м

Ответ: 0,075 Дж.

3. Масса стержня, расположенного на отрезке $[0; 3]$, если плотность задается функцией $\rho(x) = x^4 - 3x$, равна ...

4. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м

Ответ: 125 Дж.

5. Вычислить работу, совершаемую при сжатии пружины на 15 см, если известно, что для сжатия пружины на 1 см необходима сила в 30 Н.

Ответ: 33,75 Дж.

6. Вычислить работу, совершаемую при сжатии пружины а 0,08 м, если для сжатия её на 0,01 м нужна Сиды в 25 Н.

Ответ: 8 Дж.

7. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 2t^2 - t + 1$ (м/с). Найти путь, пройденный за первые 3 с.

Ответ: 16,5 м.

8. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 2t + a$ (м/с). найти значение параметра a , если известно, что за промежутки времени от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2$ (с) тело прошло путь длиной 40 м.

Ответ: $a = 18$.

9. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 12t - t^2$ (м/с). Найти длину пути, пройденного телом от начала пути, до его остановки.

Указание: в моменты начала и остановки скорость тела равна нулю.

Ответ: 288 м.

10. Найти путь, пройденный точкой за третью секунду, зная скорость её прямолинейного движения $v(t) = 3t^2 - 2t - 3$ (м/с).

Ответ: 11 м.

11. Два тела начали двигаться по прямой в один и тот же момент из одной точки в одном направлении. одно тело двигалось со скоростью $v_1(t) = 3t^2 + 2t$ (м/с), другое со скоростью $v_2(t) = 2t$ (м/с). определить расстояние между телами через 2 секунды.

Ответ: 8м.

12. Масса стержня, расположенного на отрезке $[0; 2]$, если плотность задается функцией $\rho(x) = 6x^2 - 3x$, равна ...
13. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = (3t^2 + 8t)$. Тогда путь, пройденный телом за промежуток времени от $t = 1$ до $t = 4$, равен ...
14. Скорость тела, движущегося прямолинейно, задается формулой $v(t) = (12t - 3t^2)$ (м/с). Тогда длина пути, пройденного телом от начала его движения до остановки, равна ...

Пример 4.1. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м

По закону Гука упругая сила F , растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x , т.е. $F = kx$, где k – коэффициент пропорциональности. По условию сила $F = 100$ Н растягивает пружину на $x = 0,01$ м, т.е. $100 = k \cdot 0,01 \Rightarrow k = 10000$. Тогда $F = kx = 10000x$.

Вычислим работу:

$$A = \int_0^{0,05} 10000x dx = 10000 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,05} = 5000x^2 \Big|_0^{0,05} = 5000 \cdot 0,05^2 = 12,5 \text{ (Дж)}$$

Определённый интеграл применяют для вычисления пути S прямолинейного движения.

Путь S , пройденный материальной точкой за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$, равен определённому интегралу от скорости $v(t)$:

$$S = \int_a^b v(t) dt$$

Пример 4.2. Вычислить путь, пройденный точкой за 4 секунды от начала движения, если скорость точки $v = 2t + 4$ (м/с).

По условию: $v(t) = 2t + 4, a = 0, b = 4$.

$$\text{Тогда } S = \int_0^4 (2t + 4) dt = 2 \frac{t^2}{2} \Big|_0^4 + 4t \Big|_0^4 = 4^2 + 4 \cdot 4 = 32 \text{ (м/с)}.$$

Пример 4.3. Масса стержня, расположенного на отрезке $[0; 6]$, если плотность задается функцией $\rho(x) = 2x^2 + 3$, равна ...

В качестве модели стержня принимается отрезок $[a; b]$ на оси OX , длина которого совпадает с длиной стержня и в каждой точке которого задано значение плотности $\rho(x)$. Тогда массу стержня можно вычислить по формуле

$$m = \int_a^b \rho(x) dx$$

$$m = \int_0^6 (2x^2 + 3) dx = \left(\frac{2x^3}{3} + 3x \right) \Big|_0^6 = \frac{2 \cdot 6^3}{3} + 18 =$$

Используя условие задачи, получим $= 144 + 18 = 162$.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
$90 \div 100$	5	отлично
$80 \div 89$	4	хорошо
$60 \div 79$	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Раздел 2 Дифференциальное и интегральное исчисление

Тема 2.3 Дифференциальные уравнения

Практическая работа № 12

Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными

Цель работы: Научиться решать дифференциальные уравнения I порядка с разделяющимися переменными. Научиться находить общие и частные решения.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- разделять переменные для решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными;
- находить общее решение дифференциального уравнения;
- выделять из общего решения частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (решать задачу Коши).

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $\frac{dy}{\sqrt{x}} = \frac{3dx}{\sqrt{y}}$

б) $(y-1)^2 dx + (1-x^3) dy = 0$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$dy = (3x^2 - 2x)dx$, если $y=4$ при $x=$

Порядок выполнения работы:

1) Привести данное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными, т. е. произвести разделение переменных, для этого:

а) Производные функции заменить её дифференциалами;

б) Сгруппировать члены с одинаковыми дифференциалами и записать их в разных частях равенства, вынеся дифференциалы за скобки;

в) Поделить или умножить обе части равенства на такие выражения, чтобы все функции стояли при „своих” дифференциалах, т. е. привести к виду: $\varphi(y)dy = \varphi(x)dx$

2) Проинтегрировать обе части равенства и найти общее решение.

3) Для выделения частного решения из общего задается точка $(x_0; y_0)$, через которую должна проходить интегральная кривая. Находим значение постоянной C , а затем C подставляем в общее решение и записываем частное решение.

Ход работы:

1) Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(6x dx + 3xy^2 dx) - (6y dy + 2x^2 y dy) = 0$$

Сгруппируем члены с dx и dy

$$3x(2 + y^2)dx - 2y(3 + x^2)dy = 0$$

-Разделим переменные

$$\frac{3xdx}{3+x^2} = \frac{2ydy}{2+y^2}$$

-Интегрируем

$$3 \int \frac{xdx}{3+x^2} = 2 \int \frac{ydy}{2+y^2}$$

-Решаем по отдельности каждый интеграл методом подстановки

$$\frac{3}{2} \ln(3+x^2) = \ln(2+y^2) + \ln c$$

$$\ln(3+x^2)^{\frac{3}{2}} = \ln(2+y^2) \cdot c$$

-Потенцируем это уравнение

$$\sqrt{(3+x^2)^3} = (2+y^2) \cdot c$$

-Записываем общее решение:

$$\frac{(3+x^2)\sqrt{3+x^2}}{2+y^2} = c$$

2) Найти частные решение дифференциальных уравнений

$$2(y-3)dx - dy = 0 \text{ при } x=0, y=4$$

-Разделим переменные

$$dy = 2(y-3)dx$$

$$\frac{dy}{y-3} = 2dx$$

-Проинтегрируем обе части уравнения

$$\int \frac{dy}{y-3} = \int 2dx$$

$$\ln(y-3) = 2x + \ln c$$

-По определению логарифма $2x = \ln e^{2x}$

$$\ln(y-3) = \ln(e^{2x} \cdot c)$$

-Запишем общее решение

$$y = e^{2x} \cdot c + 3$$

-Подставим в это уравнение начальные условия $x=0, y=4$

$$4 = e^0 \cdot c + 3 \Rightarrow c=1$$

-Запишем частное решение

$$y = e^{2x} + 3$$

Форма представления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Раздел 2 Дифференциальное и интегральное исчисление

Тема 2.3 Дифференциальные уравнения

Практическая работа № 13

Решение однородных дифференциальных уравнений первого порядка

Цель работы: Научиться определять вид дифференциальных уравнений, находить общее и частное решение однородных и линейных дифференциальных уравнений I порядка.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- определять вид дифференциального уравнения первого порядка;
- находить общее и частное решение однородного дифференциального уравнения первого порядка;
- находить общее и частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти общее решение дифференциального уравнения

a) $y' = \frac{x+y}{x-y}$

b) $xy' - y = -x$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения

a) $y^2 + x^2 y' = xy \cdot y'$ при $y(1) = 1$

b) $y' \sin x - y \cos x = 1$ при $x = \frac{\pi}{2}, y=1$

Порядок выполнения работы:

1. Для решения однородного дифференциального уравнения I порядка данное уравнение путем введения новой переменной нужно привести к уравнению с разделяющимися переменными. Заменим $y = z \cdot x$, $\frac{dy}{dx} = x \frac{dz}{dx} + z$, где Z-новая неизвестная функция от x.

Получилось уравнение с разделяющимися переменными относительно Z.

Решив его, надо Z заменить на $\frac{y}{x}$ и выразить y.

2. Линейное дифференциальное уравнение I порядка решается путем подстановки

$$y = u \cdot \vartheta; \quad \frac{dy}{dx} = u \frac{d\vartheta}{dx} + \vartheta \frac{du}{dx}$$

Дифференциальное уравнение сводится к решению двух дифференциальных уравнений, с разделяющимися переменными, сначала относительно u, потом - ϑ , где u и ϑ неизвестные функции от x.

Ход работы:

1) Найти частное решение однородного дифференциального уравнения I порядка

$$y' = \frac{2x+y}{2x}, \text{ если } y=0 \text{ при } x=1$$

-Заменим y' на $\frac{dy}{dx}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{2x}$

-Произведем подстановку $y = zx$; $\frac{dy}{dx} = x \frac{dz}{dx} + z$

$$x \frac{dz}{dx} + z = \frac{2x+zx}{2x}; \quad x \frac{dz}{dx} + z = \frac{x(2+z)}{2x}$$

$$x \frac{dz}{dx} = \frac{2+z}{2} - z$$

$$x \frac{dz}{dx} = \frac{2-z}{2}$$

-Разделим переменные $\frac{2}{2-z} dz = \frac{dx}{x}$

-Проинтегрируем выражение: $2 \int \frac{dz}{2-z} = \int \frac{dx}{x}$

-Решаем данное уравнение $-2 \ln|2-z| = \ln|x| + \ln c$

$$\ln \frac{1}{(2-z)^2} = \ln(xc)$$

-Пропотенцируем выражение $\frac{1}{(2-z)^2} = xc$

-Выразим z: $(2-z)^2 = \frac{1}{xc}$

$$2-z = \frac{1}{\sqrt{xc}}$$

$$z = 2 - \frac{1}{\sqrt{xc}}$$

-Заменим $z = \frac{y}{x}$ и выразим y $y = \frac{2x\sqrt{xc}-x}{\sqrt{xc}}$ - общее решение

-Подставим начальные условия $y=0, x=1$

$$0 = \frac{2\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}}; 2\sqrt{c}-1=0, 2\sqrt{c}=1, \sqrt{c}=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{4}$$

-Подставим c в общее решение $y = 2(x - \sqrt{x})$ частное решение.

2) Найти частное решение линейного дифференциального уравнения I порядка

$xy' + y = 3$, если $y=0$, при $x=1$

-Приведем уравнение к виду по определению

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{3}{x}$$

-Сделаем замену

$$y = u\vartheta; \quad \frac{dy}{dx} = u \frac{d\vartheta}{dx} + \vartheta \frac{du}{dx}$$

-Сгруппируем члены с ϑ , получим

$$\vartheta \left(\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} \right) = 0, \text{ т.к. } \vartheta \neq 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{u}{x}$$

-Разделим переменные

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}$$

-Проинтегрируем

$$\int \frac{du}{u} = - \int \frac{dx}{x}$$
$$\ln|u| = -\ln|x|$$

-Пропотенцируем

$$u = \frac{1}{x}$$

-Подставим u в оставшееся уравнение

$$\frac{1}{x} \frac{d\vartheta}{dx} = \frac{3}{x}$$
$$d\vartheta = 3dx$$

-Проинтегрируем

$$\vartheta = 3x + c$$

-Подставим $y = u\vartheta$

$$y = \frac{1}{x}(3x + c) - \text{общее решение}$$

-Подставим начальные условия

$$0 = 3 + c \Rightarrow c = -3$$

$$y = \frac{3}{x}(x - 1) - \text{частное решение}$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Раздел 2 Дифференциальное и интегральное исчисление

Тема 2.3 Дифференциальные уравнения

Практическая работа № 14

Решение дифференциальных уравнений второго порядка

Цель работы: Научиться решать дифференциальные уравнения II порядка и линейные однородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка;
- находить общее и частное решение простейших дифференциальных уравнений второго порядка;
- находить общее и частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания , таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Решить дифференциальные уравнения II порядка:

a) $\frac{d^2y}{dx^2} = 5$

b) $y' = x, A(1; 0); B(1; 1)$

2. Найти частное решение однородного дифференциального уравнения II порядка.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0 \text{ при } x = 0; y = 0; \frac{dy}{dx} = 0$$

Порядок выполнения работы:

1) Дифференциальные уравнения II порядка решаются двукратным интегрированием, путём введения новой переменной $p = \frac{dy}{dx}$

Приводим к уравнению с разделяющимися переменными и решаем относительно p .

Подставляем p и решаем уравнение разделением переменных относительно y .

Если даны начальные условия, то подставляем в общее решение, составляем систему линейных уравнений и решаем относительно C_1 и C_2 . Подставляя C_1 и C_2 в общее решение, находим частные решения.

2) Однородное дифференциальное уравнение II порядка.

Путем замены $y = e^{kx}$

$$y' = ke^{kx}$$

$$y'' = k^2 e^{kx}$$

Составляем характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$ из которого находим k_1 и k_2 .

Общее решение при $D > 0$ будет:

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$$

При $D = 0$ будет: $y = e^{kx} (c_1 + c_2 x)$

При $D < 0$ будет: $y = e^{ax} (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$

При заданных начальных условиях составляем систему линейных уравнений и решаем её относительно C_1 и C_2 .

Ход работы:

I. Решить дифференциальное уравнение порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - 2x$$

-Заменим $p = \frac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}; \quad \frac{dp}{dx} = 1 - 2x$$

-Разделим переменные

$$dp = (1 - 2x)dx$$

-Проинтегрируем

$$\int dp = \int (1 - 2x)dx$$

$$p = x - x^2 + c_1$$

-Заменим p на $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = x - x^2 + c_1$$

-Разделим переменные

$$dy = (x - x^2 + c_1)dx$$

-Проинтегрируем и получим общее решение

$$\int dy = \int (x - x^2 + c_1)dx$$

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2$$

II. Решить однородное дифференциальное уравнение II порядка

a) $y'' - 5y' + 6 = 0$

-Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 5k + 6 = 0, \text{ решаем квадратное уравнение, получим } k_1 = 2, k_2 = 3$$

-Общее решение будет:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

b) $y'' + 4y' + 4y = 0$

-Составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 4k + 4 = 0, \quad (k + 2)^2 = 0 \quad k = -2$$

-Запишем общее решение для $D=0$

$$y = e^{-2x}(c_1 + c_2 x)$$

с) $y'' - 6y' + 13y = 0$

-Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 6k + 12 = 0; D = 36 - 4 \cdot 13 = -16 D < 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{16i^2}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i \quad a = 3; b = 2$$

-Запишем общее решение

$$y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

Форма предоставления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Раздел 3. Элементы теории вероятностей и математической статистики

Тема 3.1 Элементы теории вероятностей и математической статистики

Практическая работа № 15

Решение комбинаторных задач

Цель работы: Осмыслить основные понятия комбинаторики, научиться отличать одну выборку от другой, применять формулы для их нахождения.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Находить отличия одной выборки от другой;
- Применять формулы для подсчета выборок без повторений.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. В соревнованиях участвует 10 человек, трое из них займут 1-е, 2-е и 3-е место. Сколько существует различных вариантов ?
2. Из группы, в которой учится 12 человек, необходимо выбрать 3 человека в совет колледжа. Сколько существует различных способов такого выбора.
3. На книжной полке выставлены 8 книг различных авторов. Сколько способов имеется для расстановки этих книг в разном порядке?

Краткие теоретические сведения:

В основе решения задач на комбинаторику лежат два правила:

1.Правило сложения. Если некоторый элемент A можно выбрать m способами, а другой элемент $B - n$ способами, исключаящими друг друга, то выбор какого-нибудь одного из этих элементов (либо A , либо B) можно осуществить $m + n$ способами.

2.Правило умножения. Если некоторый элемент A можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора элемент B можно выбрать n способами, то выбор пары элементов (A, B) в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Задача1. При формировании экипажа космического корабля имеется: 10 претендентов на пост командира, 20 претендентов на пост бортинженера, 25 претендентов на пост космонавта-исследователя. Сколькими способами можно выбрать одну из кандидатур на пост командира, или бортинженера, или космонавта-исследователя?

Решение. По правилу суммы существует $10+20+25=55$ способов выбора одной из кандидатур.

Задача2. В столовой предлагают два различных первых : a_1 и a_2 ; три различных вторых блюда: b_1, b_2, b_3 и два различных десерта: c_1 и c_2 . Сколько различных обедов из трех блюд может выбрать покупатель?

Решение. Первое блюдо можно выбрать двумя способами, второе блюдо можно выбрать тремя способами, третье блюдо можно двумя способами. По правилу умножения существует $2 \times 3 \times 2 = 12$ способов выбрать обед из трех блюд.

3. Подмножества n - множества(соединения).

Для нахождения k – подмножеств некоторого n – множества нужно выбрать k из n его элементов (поэтому часто говорят о *выборке k элементов из n – элементов*). Про выбранные k из n различных элементов принято говорить, что они образуют соединение из n элементов по k . *Соединение* – собирательный термин комбинаторики. В зависимости от того, имеет ли значение порядок элементов в соединении или нет, а также от того, входят в соединение все n элементов или только часть их, различают три вида соединений: **перестановки, размещения, сочетания**.

Перестановки.

Перестановками из n – элементов называются такие соединения из n – элементов, которые отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Обозначение: $P_n = n!$

Размещения.

Размещениями из n – элементов называются такие соединения, каждое из которых содержит m элементов, выбранных из числа данных n – элементов, отличающихся либо составом, либо порядком их расположения, либо и тем, и другим.

$$\text{Обозначение } A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Замечание. Рассмотренные ранее перестановки – частный случай размещений из n – элементов по n – элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$$

55440.

Сочетания.

Сочетаниями из n - элементов называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

$$\text{Обозначение: } C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Порядок выполнения работы:

1. Определите вид выборки без повторения.
2. Выберете соответствующую формулу для вычисления возможных комбинаций.
3. Произведите вычисления, используя понятие факториала.

Ход работы:

1. Кодовый замок открывается последовательным набором четырёх разных цифр. Требуется определить число возможных кодов, которые можно подобрать для этого замка.

Решение.

1. Возможных цифр всего десять (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0). Каждая набранная комбинация кода отличается от другой комбинации хотя бы одной цифрой (1, 4, 5, 7 $\neq$ 2, 4, 5, 7), либо порядком набора одинаковых цифр (1, 4, 5, 7 $\neq$ 4, 5, 7, 1), поэтому для подсчёта числа возможных комбинаций кодов используем формулу числа размещений.

2. Формула размещений имеет вид: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$. В нашем случае $n = 4$, $m = 10$.

3. Производим расчёт: $A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

2. Сколько существует способов выбора трёх человек из десяти?
Решение.

1. В данном случае при выборе для нас важен только состав по три человека, порядок выбора роли не играет, поэтому в отличие от первого примера число способов подсчитаем по формуле сочетаний.

2. Формула сочетаний имеет вид: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. В нашем случае $n=10$, $m=3$.

3. Производим расчёт: $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = 120$.

3. Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 9 (цифры не повторяются)?
Решение.

1. По условию дано множество из четырёх элементов, которые требуется расположить в определённом порядке. Значит, требуется найти количество перестановок из четырёх элементов.

2. Формула перестановок из n – элементов имеет вид: $P_n = n!$. В нашем случае $n=4$.

3. Произведём расчёт: $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
$90 \div 100$	5	отлично
$80 \div 89$	4	хорошо
$60 \div 79$	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Раздел 3. Элементы теории вероятностей и математической статистики

Тема 3.1 Элементы теории вероятностей и математической статистики

Практическая работа № 16

Решение задач на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики

Цель работы: Научиться находить вероятность событий, используя формулы комбинаторики.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-вычислять число исходов, благоприятствующих наступлению рассматриваемого события, используя формулы комбинаторики;

- вычислять вероятность события по классическому определению вероятности.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Готовясь к докладу, студент выписал из книги цитату, но, забыв номер страницы, на которой она находилась, написал номер наудачу. Какова вероятность того, что студент записал нужный номер, если он помнит, что номер выражается двузначным числом?

2. В ящике 15 деталей, среди которых 10 окрашены. Сборщик наудачу выбрал 3 детали. Какова вероятность того, что выбранные детали оказались окрашенными?

3. Имеется 8 карточек. Одна сторона каждой из них чистая, а на другой написаны буквы :К,И,Р,Д,А,Н,З,П. Карточки кладут на стол чистой стороной вверх, перемешивают, а затем последовательно одну за другой переворачивают. Какова вероятность того, при последовательном появлении букв будет составлено слово ПРАЗДНИК?

Краткие теоретические сведения:

Вероятностью события A называется отношение числа m случаев, благоприятствующих его появлению, к общему числу всех несовместных равновозможных и образующих полную группу событий. Такое определение вероятности называют классическим. Вероятность события обозначается $P(A)$ и вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Вероятность появления события заключена в пределах от 0 до 1: $0 \leq P(A) \leq 1$

Порядок выполнения работы:

1. Определите событие A , вероятность которого нужно вычислить.
2. Просчитайте общее число(n) возможных исходов.
3. Просчитайте число исходов(m), благоприятствующих наступлению события A .
4. Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Ход работы: 1. Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры и набрал их наудачу, помня, что они различны. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение.

1. Событие A – «номер набран верно».
2. Число n – общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Всего имеется 10 цифр, т.е. число элементов равно 10; в каждое соединение входит по 3 цифры; порядок цифр (элементов) существен при наборе номера, значит, нужно найти число размещений из 10 элементов по 3 по формуле $A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1} = 720$. Итак, $n = 720$
3. Число $m = 1$, т.к. только один набор из трёх цифр является нужным.
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$

2. Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 чёрных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся чёрными?

Решение.

1. Событие A – «оба шара окажутся чёрными».
2. Число n – общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов (12+8) по два: $n = C_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{1 \cdot 2 \cdot 18!} = 190$.
3. Число случаев m , благоприятствующих событию A , равно числу сочетаний из 8 элементов (8 черных шаров) по два: $n = C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{1 \cdot 2 \cdot 6!} = 28$
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{28}{190} \approx 0,147$

2. На пяти карточках разрезной азбуки написаны буквы А,З,К,О,М. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ЗАМОК?

Решение.

1. Событие A – «получится слово ЗАМОК».
2. Число n – общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу перестановок из 5 элементов (букв): $n = P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.
3. Число случаев m , благоприятствующих событию A , равно 1, т.к. требуется составить слово с буквами, расставленными в определённом порядке. А эти буквы различны.
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений
--	--

	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Раздел 3. Элементы теории вероятностей и математической статистики
Тема 3.1 Элементы теории вероятностей и математической статистики

Практическая работа № 17

Выборка. Числовые характеристики выборки. Генеральная совокупность и выборочная совокупность.
Определение статистических распределений

Цель работы: Рассмотреть отдельные примеры, характерные для выборочного метода.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

1. Составлять распределение относительных частот.
2. Строить полигоны частот и относительных частот.
1. 3. Строить гистограмму по заданному статистическому распределению:
2. 4. Находить статистические оценки генеральной совокупности, заданной вариационным рядом:
3. 5. Находить статистические характеристики выборки.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Построить полигоны частот и относительных частот по распределению выборки:

x_i	2	4	7	8	9	12
n_i	p_1^2	$2p_2$	p_2	p_2^2	p_3	$3p_3$

2. Постройте гистограммы частот и относительных частот по распределению выборки:

№ интервала	Интервал, $X_i - X_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала, n_i
1	3 – 5	p_1
2	5 – 7	$2p_2$
3	7 – 9	$3p_3$
4	9 – 11	p_1^2
5	11 – 13	$2p_2^2$
6	13 – 15	$3p_3^2$
7	15 – 17	$p_1 + p_2$

3. Для генеральной совокупности, заданной распределением:

x_i	5	10	15	20	25	30	35
N_i	p_1	$3p_1$	p_2	$2p_2$	p_2^2	$2p_3$	$2p_3^2$

Найдите генеральную среднюю, генеральную дисперсию, генеральное стандартное отклонение, моду, медиану и размах.

4. Из генеральной совокупности сделана выборка, заданная распределением:

x_i	2	4	6	8	10	12	14
n_i	p_2	$2p_2$	p_1	p_1^2	p_3	$2p_3$	p_2+p_3

Найти выборочную среднюю, выборочные дисперсию и стандартное отклонение. Обратите внимание: p_1 = числу букв в Вашем имени; p_2 = числу букв в Вашей фамилии; p_3 = числу букв в имени Вашего отца.

Краткие теоретические сведения в полном объеме имеются в лекции.

Порядок выполнения работы:

1 Прочитав условие предложенной задачи, по конспекту лекции найдите соответствующие формулы.

2. Примените лекционный теоретический материал для решения каждой задачи.

3 В случае необходимости представить геометрическую интерпретацию числовых характеристик выборки.

Ход работы: 1. Задано распределение частот выборки:

x_i	2	6	12	15
n_i	3	10	7	5

Составить распределение относительных частот.

Определим сначала объем выборки:

$$n = 3 + 10 + 7 + 5 = 25.$$

Найдем относительные частоты по формуле $w_i = \frac{n_i}{n}$:

$$w_1 = \frac{3}{25} = 0,12; w_2 = \frac{10}{25} = 0,40; w_3 = \frac{7}{25} = 0,28; w_4 = \frac{5}{25} = 0,20.$$

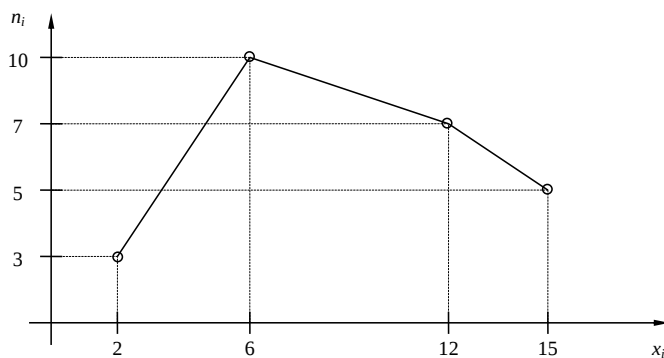
Следовательно,

x_i	2	6	12	15
w_i	0,12	0,40	0,28	0,20

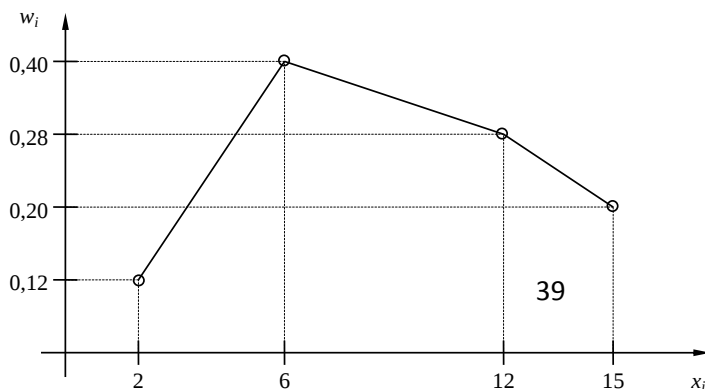
Контроль: $0,12 + 0,40 + 0,28 + 0,20 = 1$.

2.. По результатам примера 1 построить полигоны частот и относительных частот.

Решение. Отобразив на плоскости точки с координатами (x_i, n_i) и соединив их отрезками, получим полигон частот:



Аналогично построим полигон по точкам (x_i, w_i) :



3. Постройте гистограмму по следующему статистическому распределению:

№ интервала	Интервал длиной $h=5$	Сумма частот вариант n_i
1	5 – 10	4
2	10 – 15	6
3	15 – 20	16
4	20 – 25	36
5	25 – 30	24
6	30 – 35	10
7	35 – 40	4

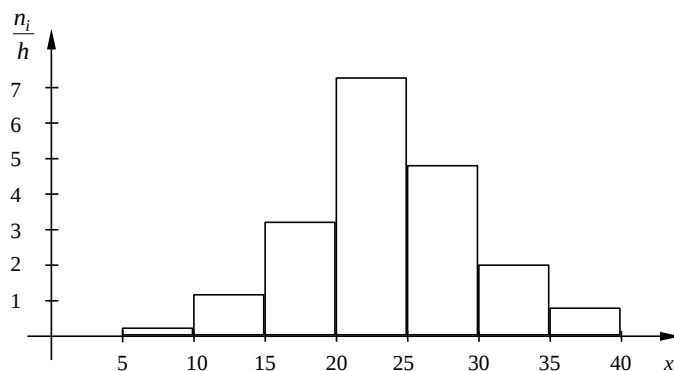
Решение. Прежде всего, определим объем выборки:

$$n = 4 + 6 + 16 + 36 + 24 + 10 + 4 = 100.$$

По известным суммам частот вариант рассчитаем плотность частоты по интервалам:

№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$	№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$
1	0,2	5	4,8
2	1,2	6	2,0
3	3,2	7	0,8
4	7,2		

Изобразим полученный результат:



4. Найдите статистические оценки генеральной совокупности, заданной следующим вариационным рядом:

варианта x_i	2	4	5	6
частота N_i	8	9	10	3

Решение. Определим объем совокупности:

$$N_{\Gamma} = 8 + 9 + 10 + 3 = 30.$$

Найдем генеральную среднюю:

$$\bar{X}_{\Gamma} = \frac{8 \cdot 2 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{30} = 4.$$

Для вычисления генеральной дисперсии используем формулу $D_{\Gamma} = \overline{X^2} - (\bar{X}_{\Gamma})^2$. Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X^2} = \frac{8 \cdot 2^2 + 9 \cdot 4^2 + 10 \cdot 5^2 + 3 \cdot 6^2}{30} = 17,8.$$

Таким образом, $D_r = 17,8 - 4^2 = 1,8$.

Генеральное стандартное отклонение: $\sigma_r = \sqrt{D_r} = \sqrt{1,8} \cong 1,34$.

Обычно полученных результатов достаточно для практических задач. Однако можно получить дополнительные характеристики для более тонкой оценки генеральной совокупности. Приведем их:

Мода Mo : наибольшая частота

$$Mo = 10.$$

Медиана Me : вариационный ряд делится пополам в точке

$$Me = 4,5.$$

Размах вариации R : в примере

$$x_{\max} = 6; x_{\min} = 2,$$

поэтому

$$R = 6 - 2 = 4.$$

5. Из генеральной совокупности извлечена выборка

x_i	1	2	3	4	5
n_i	92	94	103	105	106

Найдите статистические характеристики выборки.

Решение. Определим объем выборки:

$$n = 92 + 94 + 103 + 105 + 106 = 500.$$

Выборочная средняя:

$$\bar{X}_B = \frac{92 \cdot 1 + 94 \cdot 2 + 103 \cdot 3 + 105 \cdot 4 + 106 \cdot 5}{500} = 1,82.$$

Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X_B^2} = \frac{92 \cdot 1^2 + 94 \cdot 2^2 + 103 \cdot 3^2 + 105 \cdot 4^2 + 106 \cdot 5^2}{500} = 11,45.$$

Выборочная дисперсия:

$$D_B = \overline{X_B^2} - (\bar{X}_B)^2 = 11,45 - 1,82^2 \cong 8,14.$$

Выборочное стандартное отклонение:

$$\sigma_B = \sqrt{8,14} \cong 2,85.$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Тема 4.1. Матрицы и определители

Практическая работа №18

Действия с матрицами

Цель работы: Научиться выполнять действия над матрицами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- выполнять операции над матрицами;
- находить обратную матрицу.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти матрицу $C = A^2 + 3AB$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Выяснить, является ли матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ обратной к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Краткие теоретические сведения:

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел. Матрица записывается в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Действия над матрицами:

1. Сложение.

Операция сложения вводится только для матриц одинаковых размеров. При сложении матриц их соответствующие элементы складываются.

$$A + B = C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Умножение на число.

При умножении матрицы на число каждый ее элемент умножается на это число.

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. Умножение матриц.

Операция умножения матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Чтобы найти элемент матрицы, стоящий в i -той строке в k -том столбце, нужно вычислить сумму произведений элементов i -той строки первой матрицы на соответствующие элементы k -того столбца второй.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите задание.
2. Определите, какие действия, и по каким правилам необходимо выполнить. Прочитайте конспект.
3. Выполните действия. Проверьте правильность вычислений.

Ход работы:

1. Найти матрицу $C = A^2 + 3AB$, если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

а) Найдем A^2 , умножая матрицу саму на себя

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

б) Найдем матрицу $3A$, умножив все элементы матрицы A на 3.

$$3A = 3 \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

в) Найдем произведение $3AB$

$$3AB = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}$$

г) Найдем матрицу C , складывая соответствующие элементы

$$C = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 24 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}$$

2. Найдем произведение $A \cdot A^{-1}$ и $A^{-1} \cdot A$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

В соответствии с определением данные матрицы являются взаимнообратными.

Форма предоставления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Тема 4.1. Матрицы и определители

Практическая работа №19

Вычисление определителей второго и третьего порядков

Цель работы: научиться вычислять определители второго и третьего порядков.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять определители второго порядка;
- вычислять определители третьего порядка.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -15 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

Краткие теоретические сведения:

Определителем квадратной матрицы второго порядка (определителем второго порядка) называется число, равное разности произведений элементов главной диагонали и элементов побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Определителем квадратной матрицы третьего порядка (определителем третьего порядка) называется число, равное

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Порядок выполнения работы:

- 1) Запишите определитель, определите какого он порядка.
- 2) Используя соответствующее определение, вычислите значение определителя.

Ход работы:

Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-4) = 12 + 12 = 24$$

$$2) \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$$

$$-6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = -15 + 48 - 6 - 18 =$$

$$= 48 - 39 = 9$$

$$3) \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -7 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-7) \cdot 1 + (-6) \cdot (-3) \cdot 5 -$$

$$-5 \cdot 2 \cdot 1 - (-6) \cdot 0 \cdot 2 - (-3) \cdot (-7) = 16 + 0 + 90 - 10 - 0 - 84 = 12$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Тема 4.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений.**Практическая работа № 20****Решение систем линейных уравнений методом Крамера**

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений, используя формулы Крамера.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными методом Крамера;
- решать системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Крамера;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Решить системы линейных уравнений:

$$1) \begin{cases} 3x - 5y = 11 \\ 2x + 3y = 20 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 3y - 5z = -2 \\ x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + 7z = 27 \end{cases}$$

Краткие теоретические сведения:

Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель Δ_3 получается из определителя Δ путем замены третьего столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Чтобы вычислить значения неизвестных, воспользуемся формулами Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему уравнений.
2. Запишите и вычислите определитель системы.
3. Вычислите определители каждой неизвестной.
4. Найдите значения неизвестных, используя формулы Крамера.

Ход работы:

Рассмотрим пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Вычислим определители каждой переменной:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 40 - 15 + 10 - 0 = 20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 30 + 0 + 45 - 0 - 20 = -10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 30 - 0 - 20 - 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{10} = -1; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0$$

Ответ: (2; -1; 0).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Тема 4.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений.

Практическая работа № 21

Нахождение обратной матрицы

Цель работы: Научиться находить обратную матрицу.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-находить обратную матрицу;

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Найти обратную матрицу к данной:

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 4 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Краткие теоретические сведения:

Чтобы найти неизвестную матрицу X, нужно $A^{-1} \cdot B$

Чтобы вычислить обратную матрицу, нужно:

а) вычислить определитель матрицы A ($\Delta A \neq 0$);

б) найти алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы A и составить из них союзную матрицу A^* .

в) транспонировать матрицу A^* из алгебраических дополнений $A^{*T} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix};$

г) найти обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$

Чтобы найти неизвестную матрицу X, нужно умножить обратную матрицу A^{-1} на матрицу B, состоящую из свободных членов.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте матричное уравнение.
3. Вычислите обратную матрицу.
4. Найдите значения неизвестных.
5. Запишите ответ.

Ход работы:

Пусть задана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Найдем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = -104.$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -12; \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -16;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -31; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 13; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 26; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13.$$

Составим обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix}.$$

Форма представления результата: выполненная работа.

— «Отлично»

- «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.
- «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.
- «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.
- «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 4.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений.

Практическая работа № 22

Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы

Цель работы: Научиться решать системы линейных уравнений матричным способом.

Выполнив работу, Вы будете:

УМЕТЬ:

- находить обратную матрицу;
- решать систему линейных уравнений матричным способом.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Решить систему линейных уравнений:

$$2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -7; \\ 6x_1 + 2x_2 = 12; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -25 \end{cases}.$$

Краткие теоретические сведения:

Пусть задана система линейных уравнений:

[illegible]

Составим матричное уравнение: $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Чтобы вычислить обратную матрицу, нужно:

- вычислить определитель матрицы A ($\Delta A \neq 0$);
- найти алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы A ;
- транспонировать матрицу из алгебраических дополнений;

г) найти обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$

Чтобы найти неизвестную матрицу X, нужно умножить обратную матрицу A^{-1} на матрицу B, состоящую из свободных членов.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте матричное уравнение.
3. Вычислите обратную матрицу.
4. Найдите значения неизвестных.
5. Запишите ответ.

Ход работы:

Решить систему линейных уравнений:

$$1) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -7 \\ 6x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases}$$

Найдем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 9 = -19 \neq 0 \Rightarrow \text{обратная матрица есть.}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решим уравнение:

$$X = A^{-1}C = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} -20 - 18 \\ -12 + 12 \end{pmatrix} = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} -38 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (2; 0).

$$2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -25 \end{cases}.$$

Найдем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = -104.$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -12; \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -16;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -31; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 13; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 26; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13.$$

Составим обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix}.$$

Решим матричное уравнение:

$$X = A^{-1}C = -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} -12 & -16 & -4 \\ -31 & 2 & 7 \\ 13 & 26 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix} = -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} -120 + 64 + 56 \\ -310 - 8 - 98 \\ 130 - 104 + 182 \end{pmatrix} = -\frac{1}{104} \begin{pmatrix} 0 \\ -416 \\ 208 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (0; 4; -2).

Сделаем проверку:

$$\begin{cases} 0 + 12 - 2 = 10 \\ 0 - 8 + 4 = -4 \quad . \text{ (верно)} \\ 0 - 4 - 10 = -14 \end{cases}$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично

80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Тема 4.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений.

Практическая работа № 23

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений методом последовательного исключения переменных (методом Гаусса).

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными методом Гаусса;

решать системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса;

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Решить системы линейных уравнений:

$$1. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

Краткие теоретические сведения:

Метод Гаусса является одним из наиболее универсальных методов решения систем линейных уравнений. Он состоит в последовательном исключении неизвестных.

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому виду. На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

На практике удобнее работать не с системой уравнений, а с расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками.

Элементарными преобразованиями матрицы являются:

- перестановка строк местами;

-умножение некоторой строки на любое, не равное нулю число;

-прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте расширенную матрицу.
3. Выполните элементарные преобразования строк матрицы, исключая последовательно переменные. В результате должна получиться ступенчатая матрица.
4. По ступенчатой матрице составьте систему.
5. Последовательно найдите значения всех неизвестных.
6. Запишите ответ.

Ход работы:

Рассмотрим пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

Полученной матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1; \\ -2x_3 = 0 \end{cases}$$

Начиная снизу вверх, находим значения неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x_1 + 2 \cdot (-1) = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Ответ: (2;-1;0).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Каждое правильно выполненное действие -1 балл

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

Тема 4.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений.

Практическая работа № 24

Решение систем линейных уравнений различными способами

Цель работы: Научиться решать системы линейных уравнений различными методами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать систему линейных уравнений методом Крамера;
- решать систему уравнений методом Гаусса;
- решать систему линейных уравнений матричным способом.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Решить системы линейных уравнений:

$$1) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 7x_3 = -1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -25 \end{cases}$$

Краткие теоретические сведения:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

Чтобы решить систему методом Крамера, составим определитель из коэффициентов при неизвестных.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Этот определитель называется определителем системы:

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель Δ_3 получается из определителя Δ путем замены третьего столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Чтобы вычислить значения неизвестных, воспользуемся формулами Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

Для решения системы методом Гаусса используйте алгоритм:

- 1) Запишите систему линейных уравнений.
- 2) Составьте расширенную матрицу.
- 3) Выполните элементарные преобразования строк матрицы, исключая последовательно переменные. В результате должна получиться ступенчатая матрица.
- 4) По ступенчатой матрице составьте систему.
- 5) Последовательно найдите значения всех неизвестных.
- 6) Запишите ответ.

Для решения системы матричным методом:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте матричное уравнение.
3. Вычислите обратную матрицу.

Чтобы вычислить обратную матрицу, нужно:

- а) вычислить определитель матрицы A ($\Delta A \neq 0$);
- б) найти алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы A ;
- в) транспонировать матрицу из алгебраических дополнений;

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

- г) найти обратную матрицу:

Чтобы найти неизвестную матрицу X , нужно умножить обратную матрицу A^{-1} на матрицу B , состоящую из свободных членов.

4. Найдите значения неизвестных.

5. Запишите ответ.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно