Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет
им. Г.И. Носова»
Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор
/ С.А. Маховский
«09» февраля 2022 г.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**

**по учебной дисциплине
ЕН.01 Математика**

**для студентов специальности
38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)**

Магнитогорск, 2022

ОДОБРЕНО

Предметной комиссией
«Математических и естественнонаучных дисциплин»
Председатель Е.С.Корытникова
Протокол № 5 от 19.01.2022

Методической комиссией МпК

Протокол № 4 от 9.02.2022

.

Составитель:
преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И.Носова» МпК Ю.Ф. Сивилькаева

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины ЕН.01«Математика».

Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям) и овладению профессиональными компетенциями.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование профессиональных практических умений (умений выполнять определенные действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности) или учебных практических умений решать задачи по математике, необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено проведение практических занятий. В рамках практического занятия обучающиеся могут выполнять одну или несколько практических работ.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план;
- структурировать получаемую информацию;
- выделять наиболее значимое в перечне информации;
- оценивать практическую значимость результатов поиска;
- оформлять результаты поиска.

Содержание практических ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению ***профессиональными компетенциями:***

ПК 4.6 Анализировать финансово-хозяйственную деятельность, осуществлять анализ информации, полученной в ходе проведения контрольных процедур, выявление и оценку рисков;

А также формированию ***общих компетенций***:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02 Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

Выполнение обучающихся практических работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1 Алгебраическая форма комплексного числа

Практическое занятие № 1

Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Цель: научиться выполнять действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план;
- структурировать получаемую информацию;
- оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Даны комплексные числа: z1=(-3;-5), z2=(-7,2;7,2), z3=(2;6).
   Записать эти числа в алгебраической форме.

2. Вычислить:
   1) z1+ z2;
   2) z2 - z3;
   3) z1 ⁄ z3;
   4) z2 * z3;
   5) z15.
3. Вычислить:

$$\frac{1-3i}{i-2}+\frac{1+4i}{1+3i}+i^{13}$$

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектом лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

1.Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.

2.В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

1.Даны комплексные числа : z_1=(7;1), z_2=(-1,5;1,5), z_3=(4;-3).

Записать эти числа в алгебраической форме.

Решение:

Т.к. алгебраическая форма комплексного числа имеет вид $z=x+iy$, то

$z_1 = 7+i$; $z_2 = -1{,}5+1{,}5i$; $z_3 = 4-3i$

2. Выполнить действия в алгебраической форме:

1) z_1+z_2;
2) $z_2 - z_3$;
3) z_1/z_3;
4) $z_2 \cdot z_3$;
5) z_1^5.

Решение:

1) $z_1+z_2=(7-1{,}5)+(1+1{,}5)i=5{,}5+2{,}5i$;

2) $z_1-z_3=(7-4)+(1+3)i=3+4i$;

3) $\frac{z_1}{z_3}=\frac{7+i}{4-3i}=\frac{(7+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=\frac{28+21i+4i+3i^2}{16-(3i)^2}=\frac{28+25i-3}{16+9}=\frac{25+25i}{25}=1+i$

4) $z_2 \cdot z_3=(-1{,}5+1{,}5i)(4-3i)=-6+4{,}5i+6i-4{,}5i^2=-6+10{,}5i+4{,}5=-2{,}5+10{,}5i$;

5) $z_1^5=(7+i)^5=((7+i)^2)^2(7+i)=(49+14i+i^2)^2(7+i)=(48+14i)^2(7+i)=$
$(2304+1344i+196i^2)(7+i)=$
$=(2108+1344i)(7+i)=14756+2108i+9408i+1344i^2=13412+11516i$

3. Вычислить:

$$\frac{1+3i}{i-3}+\frac{4-5i}{1+3i}-i^8$$

Решение:

$\frac{1+3i}{i-3}+\frac{4-5i}{1+3i}-i^8$=-2,1-2,8i

1) $\frac{1+3i}{i-3}=\frac{(1+3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)}=\frac{-3-i-9i-3i^2}{(-3)^2-i^2}=\frac{-10i}{10}=-i$;

2) $\frac{4-5i}{1+3i}=\frac{(4-5i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{4-12i-5i+15i^2}{1-(3i)^2}=\frac{-11-17i}{10}=-1{,}1-1{,}7i$

3) $i^8=(i^2)^4=(-1)^4=1$

4) $-i+(-1{,}1-1{,}7i)-1=-i-1{,}1-1{,}7i-1=-2{,}1-2{,}8i$

Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.2 Тригонометрическая форма комплексного числа

Практическое занятие № 2

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Цель: научиться записывать комплексные числа в тригонометрической форме, выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план;
- структурировать получаемую информацию;
- оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. 1 Даны комплексные числа: z1=(-3;-5), z2=(-7,2;7,2), z3=(2;6).
   Записать эти числа в тригонометрической форме.

2.Вычислите:

1) $z_2 \cdot z_3$;
2) $\frac{z_1}{z_3}$;
3) z_1^5;
4) $\sqrt{z_2}$;

3. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

а) $(3 \cdot (cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}))^2$ б) $\frac{24(cos75^0+isin\ 75^0)}{3(\cos 30^0+isin\ 30^0)}$.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите заданные числа в тригонометрической форме, используя алгоритм перехода к тригонометрической форме.

2. Выполните заданные действия.

Ход работы:

1.Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.
2.В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

Даны комплексные числа: z_1=(7;1), z_2=(-1,5;1,5), z_3=(4;-3).
1. Записать числа z_1, z_2 и z_3 в тригонометрической форме.
Решение:
1) $z_1 = 7 + i$
$|z_1| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$,
Число находится в первой четверти, значит
$\varphi = arctg\frac{1}{7} = arctg0{,}1429.$
$z_1 = 7 + i = 5\sqrt{2}(\cos 8°8' + isin8°8').$
2) $z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i$
$|z_2| = \sqrt{(-1{,}5)^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{2{,}25 + 2{,}25} = \sqrt{4{,}5}$=2,1
Число находится во второй четверти, значит $\varphi = arctg\frac{b}{a} + \pi = arctg(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$;
$z_2 = -1{,}5 + 1{,}5i = 2{,}1(\cos\frac{3\pi}{4} + isin\ \frac{3\pi}{4}).$
3) $z_3 = 4 - 3i$
$|z_3| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$
Число находится в четвертой четверти, значит
$\varphi = arctg\frac{-3}{4} = arctg(-0{,}75) = -36°°52'.$
$z_3 = 4 - 3i = 5(\cos(-36°52^{'} + isin(-36°52^{'}).$
2. Вычислите:
1) $z_2 \cdot z_3$;
2) $\frac{z_1}{z_3}$;
3) z_1^5;
4) $\sqrt{z_2}$;
Решение:
$z_2 \cdot z_3 = 2{,}1 \cdot 5\big(\cos(135° - 36°52') + isin\ (135° - 36°52')\big) = 10{,}5(\cos 98°8' + isin\ 98°8');$
$\frac{z_1}{z_3} = \frac{5\sqrt{2}}{5}\Big(\cos\big(8°8' - (-36°52')\big) + isin(8°8' + 36°52')\Big) = \sqrt{2}(\cos 45° + isin45°);$
$z_1^5 = \big(5\sqrt{2}\big)^5(\cos 5\cdot 8°8' + isin5\cdot 8°8') = 12500\sqrt{2}(cos40°40' + isin40°40');$
Воспользуемся формулой:
$\omega_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$
В нашем примере n=2.
$\sqrt{z_2} = \omega_k = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}(cos\frac{135°+360°k}{2} + isin\frac{135°+360°k}{2});$
$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(cos\frac{135°+360°\cdot 0}{2} + isin\frac{135°+360°\cdot 0}{2}\right) = \sqrt{2{,}1}(\cos 67°30' + isin\ 67°30');$
$\omega_1 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(cos\frac{135°+360°\cdot 1}{2} + isin\frac{135°+360°\cdot 1}{2}\right) = \sqrt{2{,}1}(\cos 247°30' + isin\ 247°30').$

1. Выполните действия и запишите результат в алгебраической форме:

$$(2\cdot(cos\frac{5\pi}{24} + isin\frac{5\pi}{24}))^6 = 2^6\left(cos\frac{5\pi}{24}\cdot 6 + isin\frac{5\pi}{24}\cdot 6\right) = 64\left(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right) = 64\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}i$$

$$\frac{24(cos75^0 + isin\ 75^0)}{3(\cos 15^0 + isin\ 15^0)} = \frac{24}{3}(\cos(75° - 15°) + isin(75° - 15°) = 8(cos60° + isin60°) = 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4 + 4\sqrt{3}i$$

Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:
Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.
Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.
Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.
Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 2.1 Матрицы и определители

Практическое занятие № 3
Действия над матрицами.

Цель: научиться выполнять действия над матрицами.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план;
- структурировать получаемую информацию;
- оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
1. Даны матрицы
$A = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$,
найти $2A - B =$.
2.Даны матрицы
$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
Найти матрицу $A \times B - B \times A$.
3. Вычислите матрицу $X = 2CB + 3A^T$, если
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.

2. Пользуясь конспектом лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

1.Повторите правила и формулы.

2.Определите порядок действия в задании.

3.Для каждого действия примените соответствующую формулу.

4.Оформите решение.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

1. Дано уравнение $A+X=B$. Здесь $A=\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$ Найти X.

Если $A + X=B$, то $X=B - A$. Каждый элемент разности двух матриц B и A равен разности соответствующих элементов данных матриц B и A. Тогда

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 7 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$ Найти матрицу $B\times A - A\times B$.

Пусть $C = A\times B.$ Тогда элемент c_{ij} матрицы C равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B

$$(c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}).$$

$$B\times A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot(-1) & 1\cdot(-3)+2\cdot 1 \\ 0\cdot 2+1\cdot(-1) & 0\cdot(-3)+1\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично имеем:

$$A\times B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+(-3)\cdot 0 & 2\cdot 2+(-3)\cdot 1 \\ -1\cdot 1+1\cdot 0 & -1\cdot 2+1\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица

$$B\times A - A\times B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0-2 & -1-1 \\ -1-(-1) & 1-(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите матрицу $X = 2CB + 3A^T$, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{B}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{C}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

Выполним задание по действиям:

1) $2xC = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

2) 2CB=

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + 2(-1) & 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ 0 \cdot 2 + (-6) \cdot (-1) & 0 \cdot (-1) + (-6) \cdot 2 & 0 \cdot 2 + (-6) \cdot 0 \\ 6 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & 6 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & 6 \cdot 2 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 6 & -12 & 0 \\ 8 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу, транспонированную к А:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) $3\,A^T = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

2) $2CB + 3A^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 6 & -12 & 0 \\ 8 & 2 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 11 \\ 6 & -9 & 3 \\ 2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$

Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 2.1 Матрицы и определители

Практическое занятие № 4

Вычисление определителей.

Цель: научиться вычислять определители.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план;

- структурировать получаемую информацию;
- оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
1. Известно, что определитель второго порядка
$\begin{vmatrix} 4 & -3x \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$ равен шести. Найти значение x.
2. Найти значение определителя третьего порядка
$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix}$.

Порядок выполнения работы:
1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Определите порядок определителя.
3. Для вычисления определителя примените соответствующую формулу.

Ход работы:
1.Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.
2.В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

1.Вычислить определитель второго порядка
$\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$.

Определитель равен

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 7 - 5\cdot(-4) = -14 + 20 = 6.$$

2. Вычислить определитель третьего порядка
$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$.

Тогда

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 3\cdot 7\cdot 8 + 8\cdot(-1)\cdot(-5) + 4\cdot(-2)\cdot 2 -$$
$$-2\cdot 7\cdot(-5) - (-1)\cdot(-2)\cdot 3 - 8\cdot 4\cdot 8 = 168 + 40 - 16 + 70 - 6 - 256 = 0.$$

Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 2.2 Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 5

Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

Цель: научиться решать системы линейных уравнений методом Крамера.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план;
- структурировать получаемую информацию;
- оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Систему $\begin{cases} 9x+2y=8, \\ 4x+y=3 \end{cases}$

решить по правилу Крамера.

2. Найти решение СЛАУ $\begin{cases} 5x_1+2x_2=7 \\ 2x_1+x_2=9 \end{cases}$ при помощи метода Крамера.

Форма представления результата:

Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 2.2 Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 6

Решение систем линейных уравнений матричным способом.

Цель: научиться приводить матрицу к ступенчатому виду, решать систему линейных уравнений матричным способом.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план;
- структурировать получаемую информацию;
- оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти решение СЛАУ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$ матричным методом.

2. Решить систему : $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 27 \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 11 \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 3 \end{cases}$ матричным методом.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектом лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

1.Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.

2.В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

Решить с помощью обратной матрицы систему $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

Решение:

Запишем данную систему в матричной форме:

$AX = B,$

где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ - матрица системы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ - столбец правых частей. Тогда

$X = A^{-1}B$

Найдем обратную матрицу A^{-1} к матрице A с помощью союзной матрицы:

$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \widetilde{A}^T$

Здесь $\Delta = |A|$ - определитель матрицы A ; матрица $\widetilde{A}$ - союзная матрица, она получена из исходной матрицы A заменой ее элементов их алгебраическими дополнениями. Найдем $\widetilde{A}$, для этого вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы A :

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$

Таким образом,

$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Определитель матрицы A

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 3 -$

$-3 \cdot (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = -4 \neq 0$

А тогда

$\widetilde{A} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

Отсюда искомая матрица

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

Форма представления результата:

Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 2.2 Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 7

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Цель: научиться приводить матрицу к ступенчатому виду, решать систему линейных уравнений методом Гаусса.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план;
- структурировать получаемую информацию;
- оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1.Решить СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ методом Гаусса.

2. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 - x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$$

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектом лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

1.Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.

2.В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

1) Решить систему : $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 27 \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 11 \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 3 \end{cases}$

методом Гаусса.

Для заданной системы уравнений запишем расширенную матрицу и, выполняя элементарные преобразования, приведем ее к диагональному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 13 & 27 \\ 3 & 14 & 12 & 11 \\ 5 & 25 & 16 & 3 \end{array}\right)$$

Умножим 1-ую строку на (-2)и прибавим полученную строку ко 2-ой и 3-ей, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 13 & 27 \\ -1 & 0 & -14 & -43 \\ 1 & 11 & -10 & -51 \end{array}\right)$$

Поменяем местами 1-ую строку со 2-ой, 2-ую с 3-ей, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -14 & -48 \\ 1 & 11 & -10 & -51 \\ 2 & 7 & 13 & 27 \end{array}\right)$$

Умножим 1-ую строку на (1) и прибавим полученную ко 2-ой, затем 1-ую умножим на (2) и

прибавим полученную к 3-ей, получим $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 43 \\ 0 & 11 & -24 & -94 \\ 0 & 7 & -15 & -59 \end{array}\right)$

Умножим 2-ую строку на (-7),а 3-ью на (11) и прибавим полученную 2-ую строку к 3-ьей, получим $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 43 \\ 0 & 11 & -24 & -94 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$

Умножим 3-ью строку на(8) и полученную прибавим ко 2-ой, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 43 \\ 0 & 11 & 0 & -22 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

Разделим 3-ью строку на 3, затем умножим полученную на (-14) и прибавим к 1-ой,

получим матрицу $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$E , которая соответствует системе уравнений $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

Ответ: X = $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему четырех линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Выпишем расширенную матрицу для данной системы

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & -8 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 3 & 5 & 1 & 4 & 0\\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Сведем ее к треугольному виду с помощью элементарных преобразований.

1.Поменяем местами первый и второй строки.

2. Добавим к элементам второго, третьего и четвертого строк элементы первой строки, умноженные соответственно на $-5;-3;-4.$

3. Поменяем местами второй и третий строки. Добавим к элементам третьего и четвертого строк элементы второй строки, умноженные соответственно на $4;1.$

4. От четвертого уравнения умноженного на 11 вычитаем третье уравнение умноженное на $-3.$

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & -8 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 3 & 5 & 1 & 4 & 0\\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right]\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 5 & -3 & 2 & -8 & 1\\ 3 & 5 & 1 & 4 & 0\\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right]\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -8 & -3 & -13 & 1\\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right]\overset{(3)}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -11 & -9 & 1\\ 0 & 0 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right]\overset{(4)}{\Leftrightarrow}\overset{(4)}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -11 & -9 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 30 \end{array}\right].$$

Такой расширенной матрицы соответствует следующая система уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0;\\ 2x_2-2x_3+x_4=0;\\ -11x_3-9x_4=1;\\ 5x_4=30. \end{cases}$$

С четвертого уравнения находим $x_4=30/5=6$ и подставляем в третье уравнение

$-11x_3=1+9x_4=1+9\cdot 6=55\rightarrow x_3=-55/11=-5.$

Найденные значения подставляем во второе уравнение

$2x_2=2x_3-x_4=2\cdot(-5)-6=-16\rightarrow x_2=-16/2=8.$

Из первого уравнения находим первую неизвестную

$x_1=-x_2-x_3-x_4=8+5-6=7.$

Система полностью решена и $x_1=7;x_2=-8;x_3=-5;x_4=6$ – ее решение.

Форма представления результата:

Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы;

в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 2.2 Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 8

Решение систем линейных уравнений различными методами

Цель: научиться решать системы линейных уравнений, используя различные методы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план;
- структурировать получаемую информацию;
- оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Решить системы линейных уравнений методом Крамера и Гаусса:

1) $\begin{cases} 3x-5y=11 \\ 2x+3y=20 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+3y-5z=-2 \\ x+y+2z=3 \\ 2x-y+7z=27 \end{cases}$

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему уравнений.
2. Запишите и вычислите определитель системы.
3. Вычислите определители каждой неизвестной.
4. Найдите значения неизвестных, используя формулы Крамера.
5. решить систему уравнений методом Гаусса

Ход работы:

1.Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.

2.В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

Решить систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0; \\ 2x_1-x_2+4x_3=5; \\ 3x_1+x_2-x_3=5 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Вычислим определители каждой переменной:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 40 - 15 + 10 - 0 = 20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 30 + 0 + 45 - 0 - 20 = -10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 30 - 0 - 20 - 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{10} = -1;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0$$

Ответ: (2;-1;0).

Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Полученной матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ -2x_3 = 0 \end{cases};$$

Начиная снизу вверх, находим значения неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_1 + 2 \cdot (-1) = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1. \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Ответ: (2;-1;0).

Форма представления результата:

Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 3.1 Теория пределов

Практическое занятие № 9

Вычисление пределов.

Цель: научиться вычислять пределы функций с помощью раскрытия неопределённостей.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Найти предел функции:

1.) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-16}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-25}$;

5) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-25}$;

6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9}$;

8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$;

9) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$;

10) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.

2. Повторите правила и формулы.
3.Вычислите предел.

Ход работы:
1.Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.
2.В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 7}(x+3)=\lim_{x\to 7}x+\lim_{x\to 7}3=7+3=10.$$

Комментарий. Здесь была использована теорема о пределе суммы.

Пример 2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x+2}{2x-7}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x-7)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x)+\lim\limits_{x\to 1}2}{\lim\limits_{x\to 1}(2x)+\lim\limits_{x\to 1}(-7)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}3\cdot\lim\limits_{x\to 1}x+2}{\lim\limits_{x\to 1}2\cdot\lim\limits_{x\to 1}x-7}==\frac{3\cdot 1+2}{2\cdot 1-7}=5/(-5)=-1.$$

Комментарий. На первом шаге была применена теорема о пределе частного, так как предел знаменателя не равен нулю. На втором шаге использовалась теорема о пределе суммы для числителя и знаменателя дроби. После была применена теорема о пределе произведения.

Пример 3. Найти предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}.$$

Знаменатель и числитель дроби при x стремящемся к 2 стремятся к нулю, поэтому теорема о пределе частного здесь неприменима. В таких случаях нужно попытаться упростить дробь. Имеем

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2.$$

Это преобразование справедливо при всех значениях x, отличных от 2, поэтому в соответствии с определением предела можем написать

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}2=$$
$$=2+2=4.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ О ПЕРВОМ ЗАМЕЧАТЕЛЬНОМ ПРЕДЕЛЕ

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}=$$
$$=1\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)}=1\cdot\frac{1}{1}=1.$$

Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 3.1 Теория пределов
Практическое занятие № 10
Вычисление пределов. Избавление от неопределенностей.

Цель: научиться вычислять пределы функций с помощью раскрытия неопределённостей.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:

- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
Найти предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4+3x^2-1}{4x^5+2x-9}$.
2. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{3x^3-75x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{10x}{\sin 30x}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{6x}$.

Порядок выполнения работы:
1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Определите вид неопределенности.
3. Преобразуйте выражение, стоящее под знаком предела, с целью избавления от неопределенности.
4. Вычислите предел.

Ход работы:

1.Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.

2.В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$.

Функция $f(x)=\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$ представляет собой отношение двух многочленов, обращающихся в нуль в предельной точке $x=3$. Поэтому сначала преобразуем данную функцию. Любой квадратный трехчлен можно разложить на множители с помощью формулы

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$,

где x_1 и x_2 –корни квадратного трехчлена.

Корнями квадратного трехчлена $3x^2-11x+6$ являются числа $\frac{2}{3}$ и 3; значит

$3x^2-11x+6=3(x-\frac{2}{3})(x-3)$.

А корни квадратного трехчлена $2x^2-5x-3$ равны $-\frac{1}{2}$ и 3,

следовательно $2x^2-5x-3=2(x+\frac{1}{2})(x-3)$.

Возвращаясь к пределу, имеем:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3(x-\frac{2}{3})(x-3)}{2(x+\frac{1}{2})(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{3x-2}{2x+1}.$$

Подставим предельное значение аргумента в оставшееся выражение, получим:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x-2}{2x+1}=\frac{9-2}{6+1}=\frac{7}{7}=1.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{150x-1000}{2x^2-3x+4}$

Так как

$\lim\limits_{x\to\infty}(150x-1000)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2-3x+4)=\infty$,

то здесь имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^2 (наивысшую степень x в данной дроби).

Тогда, зная, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{150x-1000}{2x^2-3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{150x}{x^2}-\frac{1000}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{150}{x}-\frac{1000}{x^2}}{2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{0}{2}=0.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}$.

Чтобы вычислить предел функции, нужно воспользоваться первым замечательным пределом

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

и соотношением

$$\lim_{x\to a}k\cdot f(x)=k\cdot\lim_{x\to a}f(x).$$

Для этого необходимо выполнить замену переменной: $\frac{x}{2}=t$, откуда $x=2t$. Учитывая, что $t\to 0$ при $x\to 0$, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2t}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{5x}$.

Преобразуем функцию $f(x)$ так, чтобы можно было применить второй замечательный предел, формулу

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Для этого числитель и знаменатель дроби разделим на число -3, имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/(-3)}\right)^{5x}.$$

Далее выполним замену переменной, полагая $-\frac{x}{3}=t$. Тогда если $x\to\infty$, то $t\to\infty$, $x=-3t$ и, следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/(-3)}\right)^{5x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{5\cdot(-3t)}=\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{-15}=e^{-15}.$$

Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 3.2 Производная функции и ее применение

Практическое занятие № 11

Дифференцирование сложных функций.

Цель: научиться находить производные сложных функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план;
- выделять наиболее значимое в перечне информации;
- оценивать практическую значимость результатов поиска.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Найти производные функций

1. $y = (5x^3 - 2x)^6$
2. $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3. $f(x) = arcsin4x + arccos^2x$
4. $f(x) = log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$
5. $f(x) = ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектом лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

1. Определить вид функции. Ввести промежуточный аргумент.
2. Определить, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Применить соответствующее правило.
3. Используя таблицу производных, найти производные функций.
4. Раскрыть скобки и привести подобные, если это упростит запись функции

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

Найти производные функций:

1. $g(x) = (1 - 4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u = 1 - 4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$$y' = 10(1 - 4x^2)^9 \cdot (1 - 4x^2)' = 10\,(1 - 4x^2)^9(-8x) = -80x(1 - 4x^2)^9$$

2. $f(x) = \sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы:

$$(\sin u)' = cosu \cdot u', (cosu)' = -\sin u\, u'.$$

$$f'(x) = (\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x)' = (sin\frac{1}{2}x)'cos2x + sin\frac{1}{2}x(cos2x)'$$

$$= cos\frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot cos2x + sin\frac{1}{2}x \cdot (-sin2x) \cdot (2x)'$$

$$= \frac{1}{2}cos\frac{1}{2}x \cdot cos2x - 2sin\frac{1}{2}x \cdot sin2x.$$

3. $y = \frac{2^{3x+5x^2}}{log_2(3+10x)}$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3 + 10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3 + 10x))'}{(\log_2(3 + 10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = 3x + 5x^2$, для второй функции $u = 3 + 10x$.

При дифференцировании используем следующие формулы:

$(a^u)' = a^u lna \cdot u', (\log_a u)' = \frac{1}{ulna} \cdot u'$.

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

$$= \frac{2^{3x+5x^2} ln2\,(3x+5x^2)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{1}{(3+10x)ln2}(3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

$$= \frac{2^{3x+5x^2} ln2(3+10x) \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot \frac{10}{(3+10x)ln2}}{(\log_2(3+10x))^2}$$

4. $f(x) = arcsin\frac{3}{5}x + arccos5x$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U+V)' = U' + V'$.

$$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)'$$

Введем промежуточный аргумент : для первой функции $u = \frac{3}{5}x,$ для второй функции $u = 5x$.

При дифференцировании используем следующие формулы:

$$(arcsinu)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\ ; (arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$f'(x) = \left(arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (arccos5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{5}x)^2}}\left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}(5x)' = \frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25x^2}}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$

5. $f(x) = arccos\sqrt{1-e^{2x}}$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент $u = \sqrt{1-e^{2x}}$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(arccosu)' = -\frac{u\prime}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot (\sqrt{1-e^{2x}})'$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент

$$u = 1 - e^{2x}$$

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot \left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-1+e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot (1-e^{2x})' = -\frac{1}{e^x}\frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}(-2e^x) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$

Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:
Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все

записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 3.2 Производная функции и ее применение

Практическое занятие № 12

Исследование функций на монотонность, экстремумы, выпуклость - вогнутость, перегиб.

Цель: научиться исследовать функции на монотонность, экстремумы, выпуклость-вогнутость, перегиб и строить графики функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план;
- выделять наиболее значимое в перечне информации;
- оценивать практическую значимость результатов поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

Исследовать функцию по общей схеме и построить ее график:

1. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.
2. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектом лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

1. Провести анализ заданной функции по общей схеме.
2. Построить график функции.

Исследовать функцию и построить ее график.

$$y = \frac{x^2}{2(x-1)}.$$

1. Область определения функции $D(y): (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

2. При подстановке значения $x=0$ получим $y(0)=\frac{0}{2(0-1)}=0.$

Такую же точку получим если приравняем функцию к нулю. Точка $x=0$ - единственная точка пересечения с осями координат.

3. Проверяем функцию на четность

$$y(-x)=\frac{(-x)^2}{2(-x-1)}=-\frac{x^2}{2(x+1)};$$

$$y(-x)\neq y(x),\quad y(-x)\neq -y(x).$$

Итак функция ни четная, ни нечетная, непериодическая.

4. Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную функции $y'=\frac{2x\cdot(x-1)-x^2}{2(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}.$

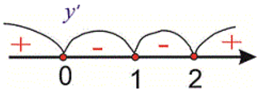
Приравнивая ее к нулю получим точки подозрительные на экстремум $x=0, x=2$. Они разбивают область определения на следующие интервалы монотонности $(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty).$

Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения

$$y'(-1)=\frac{-1(-1-2)}{2(-1-1)^2}=\frac{1}{4}>0;\ y'(0,5)=\frac{0,5(0,5-2)}{2(0,5-1)^2}=-1,5<0;$$

$$y'(1,5)=\frac{1,5(1,5-2)}{2(1,5-1)^2}=-1,5<0;\ y'(3)=\frac{3(3-2)}{2(3-1)^2}=\frac{3}{8}>0.$$

Графически интервалы монотонности будут иметь вид



Исследуемая функция возрастает на интервалах $(-\infty;0),(2;+\infty)$ и убывает $(0;1),(1;2)$.

Точка $x=0$ – точка локального максимума, $x=2$ – локального минимума. Найдем значение функции $y_{\max}=0,\ y_{\min}=\frac{2^2}{2(2-1)}=2.$

5. Для отыскания интервалов выпуклости найдем вторую производную

$$y''=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2x(x-2)(x-1)}{2(x-1)^4}=\frac{1}{(x-1)^3}.$$

Таких интервалов нет, поскольку вторая производная не принимает нулевых значений в области определения.

6. Точка $x=1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y=kx+b$.

Находим нужные границы

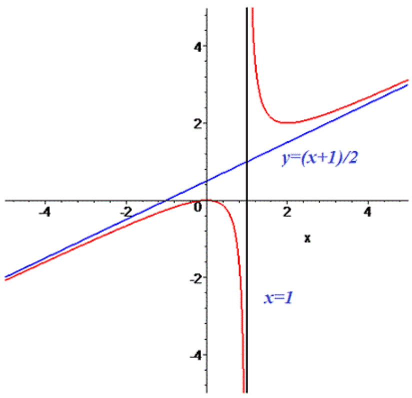
$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x(x-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{2};$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{2(x-1)}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x(x-1)}{2(x-1)}==\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{2(x-1)}=\frac{1}{2}.$$

Конечный вид прямой следующий

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$$

7. На основе проведенного анализа выполняем построение графика функции. Для этого сначала строим вертикальные и наклонные асимптоты, затем находим значение функции в нескольких точках и по ним проводим построение.



Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 3.2 Производная функции и ее применение

Практическое занятие № 13

Решение физических задач.

Цель: научиться решать физические задачи с применением дифференциального исчисления.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план;
- выделять наиболее значимое в перечне информации;
- оценивать практическую значимость результатов поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Точка движется по закону $x(t) = 2t^3 - 3t$. Чему равна скорость в момент времени $t = 1$?

2. Уравнение движения материальной точки вдоль оси имеет вид $s(t) = -0,5t^3 + t + 2$ (м). Найти ускорение $a(t)$точки в момент времени $t = 2$ с.

3. Закон изменения температуры Т тела в зависимости от времени t задан уравнением $T = 0{,}2t^2$. Скакой скоростью нагревается тело в момент времени 10 с?

4. Маховик, задерживаемый тормозом, за t с поворачивается на угол $\varphi = 5t - 0{,}4t^2$ (рад). Определить угловую скорость ω маховика в момент времени t = 2 си найти момент остановки вращения.

Порядок выполнения работы:

1. Прочитать задачу и определить способ ее решения.
2. Применить формулу дифференциального исчисления для решения задачи.
3. Записать ответ.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектом лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи.

Ход работы:

1. Задание. Тело движется прямолинейно по закону $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$ (м). Определить скорость его движения в момент $t = 10$ с.

Решение. Искомая скорость - это производная от пути, то есть

$$v(t) = s'(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t\right)' = \left(\frac{2}{3}t^3\right)' - (2t^2)' + (4t)' =$$

$$= \frac{2}{3}(t^3)' - 2(t^2)' + 4(t)' = \frac{2}{3} \cdot 3t^2 - 2 \cdot 2t + 4 \cdot 1 = 2t^2 - 4t + 4$$

В заданный момент времени

$v(10) = 2 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 + 4 = 200 - 40 + 4 = 164$ (м/с).

Ответ. $v(10) = 164$ (м/с).

2. Закон изменения температуры Т тела в зависимости от времени t задан уравнением $T = 0{,}2t^2$. С какой скоростью нагревается тело в момент времени 10 с?

Скорость нагревания тела есть производная температуры Т по времени t: $\frac{dT}{dt} = (0{,}2t^2)' = 0{,}4t$.

Скорость нагревания тела при t =10 с:

$(\frac{dT}{dt})_{t=10} = 0{,}4 \cdot 10 = 4$ (град/с).

3. Маховик за время ворачивается на угол $\varphi = 8t - 0{,}5t^2$. Определить угловую скорость ω в конце 3-й секунды. Найти момент, когда прекратится вращение.

Имеем $\varphi' = 8 - t$. Так как $\omega = (8 - t)$ рад/с, то при t = 3 получим $\omega = 5$ (рад/с). Вращение прекратится в момент, когда $\omega = 8 - t = 0$, т.е. при t = 8 с.

Форма представления результата:

Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 3.3 Интеграл и его приложения

Практическое занятие № 14

Нахождение неопределенных интегралов различными методами интегрирования.

Цель: научиться интегрировать функции, используя различные методы интегрирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план;
- выделять наиболее значимое в перечне информации;
- оценивать практическую значимость результатов поиска.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти неопределенные интегралы, используя метод замены переменной: а) $\int \frac{dx}{e^{2x-1}}$; б) $\int \frac{dx}{(4x+3)^5}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$; г) $\int \sqrt[5]{3x+2}dx$.
2. Найти неопределенные интегралы, используя метод интегрирования по частям: а) $\int xe^{5x}dx$; б) $\int \ln(1-x)dx$; в) $\int x\sin 3x dx$.

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.

2. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным.

3. Если интеграл нельзя найти вышеуказанным способом, то применить формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$

Ход работы:

1.Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.

2.В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

Пример. Найти интегралы:

1) $\int \frac{15x^2dx}{(1-x^3)^4}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int \frac{15x^2dx}{(1-x^3)^4} = \begin{bmatrix} 1-x^3=t \\ d(1-x^3)=dt \\ -3x^2dx=dt \\ x^2dx=-\dfrac{dt}{3} \end{bmatrix} = \int \frac{15dt}{-3t^4} = -5\int t^{-4}dt = -5\frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{5}{3t^3} + C = \frac{5}{3(1-x^3)^3} + C$$

2. $\int (x^3 - 4x)lnx \cdot dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится ко второму виду, поэтому $U = lnx,\ dV = (x^3 - 4x)dx$.

$$dU = \frac{1}{x}dx, \qquad V = \int (x^3 - 4x)dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int (x^3 - 4x)lnx \cdot dx = lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \int \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\frac{1}{x}dx =$$

$$lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \int \left(\frac{x^3}{4} - 2x\right)dx = lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \frac{x^4}{16} + x^2 + C$$

Форма представления результата:

Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 3.3 Интеграл и его приложения

Практическое занятие № 15
Вычисление площадей плоских фигур и объёмов тел.

Цель: формирование умений применять интегрирование для решения задач геометрии.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план;
- выделять наиболее значимое в перечне информации;
- оценивать практическую значимость результатов поиска.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
1. Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями:
   a) $y = x^2 + 1,\ y = 0,\ x = 1, x = 4$;
   b) $y = \ln x, y = 0,\ x = 1, x = e$;
   c) $y^2 = x^3; x = 4$.

2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг указанной оси фигуры, ограниченной линиями: $y = \sqrt{x}; y = 0; x = 4$ (ось вращения ось Ох).

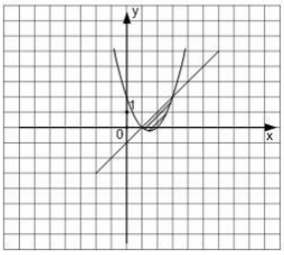
Порядок выполнения работы:
1. Прочитать задачу и определить способ ее решения.
2. Применить формулу интегрального исчисления для решения задачи.
3. Записать ответ.

Ход работы:
1.Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.
2.В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 3x + 2$ и $y = x - 1$.

Площадь фигуры, ограниченной непрерывными кривыми $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, где $f_1(x) \geq f_2(x)$ на данном отрезке,находится по формуле $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$.



Найдем пределы интегрирования - точки пересечения графиков функций, для этого приравняем правые части исходных функций и решим получившееся уравнение $x^2-3x+2=x-1$. Корнями этого уравнения являются числа $x=1$ и $x=3$, следовательно, они и являются пределами интегрирования. Значит, площадь фигуры равна:

$$S=\int_1^3((x-1)-(x^2-3x+2))dx=\int_1^3(4x-x^2-3)dx=$$

$$=(2x^2-\frac{x^3}{3}-3x)\Big|_1^3=18-9-9-(2-\frac{1}{3}-3)=$$

$$=-2+\frac{1}{3}+3=1\frac{1}{3}.$$

Получили, что площадь фигуры равна $1\frac{1}{3}$ (кв. ед.)

Пример 2. Найти объем тела, получаемого вращением вокруг оси ординат криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $x^2+y^2=64$, $y=-5$, $y=5$, $x=0$.

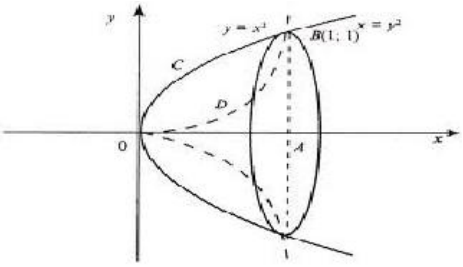
Решение.

$$V=\pi\int_{-5}^{5}\left(64-y^2\right)dy=\pi\left(64y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-5}^{5}=556\frac{2}{3}\pi\approx1163см^3$$

Ответ : 1163 cm^3.

Пример 3. Вычислить объем тела, образованного вращением лепестка, вокруг оси абсцисс $y=x^2$, $y^2=x$.

Решение .



Построим графики функции. $y=x^2$, $y^2=x$. График $y^2=x$ преобразуем к виду $y=\sqrt{x}$.

Имеем $V=V_1-V_2$ Вычислим объем каждой функции

$$V_1=\pi\int_0^1 xdx=\pi\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{2}$$

$$V_2=\pi\int_0^1 x^4dx=\pi\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{5}$$

$$V=V_1-V_2=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=0{,}3\pi$$

Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:
Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.
Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.
Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.
Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 3.3 Интеграл и его приложения

Практическое занятие № 16
Решение физических и технических задач.

Цель: научиться решать физические и технические задачи с применением дифференциального и интегрального исчисления.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план;
- выделять наиболее значимое в перечне информации;
- оценивать практическую значимость результатов поиска.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:
1. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 18t - 6t^2$.
2. Найдите путь, пройденный точкой за четвертую секунду, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 3t^2 - 2t - 3$.
3. Сила упругости пружины, растянутой на 0,05 м, равна 3Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,05м?
4. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05м, если сила 100Н растягивает пружину на 0,01м.

5. Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 20 м, а высота 5 м (считая шлюз доверху заполненным водой).

Порядок выполнения работы:

1. Прочитать задачу и определить способ ее решения.
2. Применить формулу интегрального исчисления для решения задачи.
3. Записать ответ.

Ход работы:

1.Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.
2.В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

На основании изложенного материала рассмотрим примеры решения задач.

Пример 1.Задание. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела v(t) = 10t + 2 (м/с).

Решение: Если v(t)=10t+2 (м/с), то путь, пройденный телом от начала движения (t=0) до конца 4-й секунды, равен

$$S = \int_0^4 (10t+2)\,dt = 5t^2\Big|_0^4 + 2t\Big|_0^4 = 80 + 8 = 88 \quad (\text{м}).$$

Ответ. S = 88(м).

Пример 2. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

Решение: По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x, т. е. F = kx, где k — коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила F = 100 Н растягивает пружину на x = 0,01 м; следовательно, 100 = k*0,01, откуда k = 10000; следовательно,F = 10000x.

Искомая работа на основании формулы равна

$$A = \int_0^{0,05} 10000x\,dx = 5000x^2\Big|_0^{0,05} = 12,5 \ (\text{Дж}).$$

Пример 3. В воду опущена прямоугольная пластинка, расположенная вертикально. Ее горизонтальная сторона равна 1 м, вертикальная 2 м. Верхняя сторона находится на глубине 0,5 м. Определить силу давления воды на пластинку.

Решение:

Здесь y = 1, a = 0,5, b = 2 + 0,5 = 2,5 (м), γ = 1000 кг/м^3. Следовательно,

$$P = 9810\int_a^b xy\,dx = 9810\int_a^b x\ dx = 9810\,\frac{x^2}{2}\Big|_{0,5}^{2,5} = 9810\,\frac{2,5^2 - 0,5^2}{2} = 29430\ (H).$$

Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов

Тема 4.1 Элементы теории вероятностей и математической статистики

Практическое занятие № 17

Решение задач на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики

Цель: научиться находить вероятность событий, используя формулы комбинаторики.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:

-решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- реализовать составленный план.
- структурировать получаемую информацию;
- оформлять результаты поиска.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Готовясь к докладу, студент выписал из книги цитату, но, забыв номер страницы, на которой она находилась, написал номер наудачу. Какова вероятность того, что студент записал нужный номер, если он помнит, что номер выражается двузначным числом?
2. В ящике 15 деталей, среди которых 10 окрашены. Сборщик наудачу выбрал 3 детали. Какова вероятность того, что выбранные детали оказались окрашенными?
3. Имеется 8 карточек. Одна сторона каждой из них чистая, а на другой написаны буквы :К,И,Р,Д, А,Н,З,П. Карточки кладут на стол чистой стороной вверх, перемешивают, а затем последовательно одну за другой переворачивают. Какова вероятность того, при последовательном появлении букв будет составлен слово ПРАЗДНИК?

Порядок выполнения работы:

1.Определите событие А, вероятность которого нужно вычислить.
2.Просчитайте общее число(n) возможных исходов.

3.Просчитайте число исходов(m), благоприятствующих наступлению события A.
4.Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Ход работы:
1.Прочитать материал конспекта лекций; На основании изложенного материала рассмотрите примеры решения задач.
2.В тетради для практических работ решить предложенные преподавателем задачи.

1.Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры и набрал их наудачу, помня . что они различны. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.
Решение.
1. Событие А-«номер набран верно».
2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Всего имеется 10 цифр, т.е.. число элементов равно 10; в каждое соединение входит по 3 цифры; порядок цифр(элементов) существенен при наборе номера, значит, нужно найти число размещений из 10 элементов по 3 по формуле$A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!}=\frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!}$=720. Итак, n=720
3. Число m=1, т.к. только один набор из трёх цифр является нужным.
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$

2.Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 чёрных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся чёрными?
Решение.
1. Событие А-«оба шара окажутся чёрными».
2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов (12+8) по два: n= $C_{20}^{2} = \frac{20!}{2!(20-2)!}=\frac{20!}{2!\cdot 18!}=\frac{20\cdot 19\cdot 18!}{1\cdot 2\cdot 18!}$=190.
3. Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно числу сочетаний из 8 элементов (8 черных шаров) по два: n= $C_{8}^{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!}=\frac{8!}{2!\cdot 6!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6!}{1\cdot 2\cdot 16!}$=28
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{28}{190} \approx 0{,}147$

2.На пяти карточках разрезной азбуки написаны буквы А,З,К,О,М. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того. Что получится слово ЗАМОК ?
Решение.
1. Событие А-«получится слово ЗАМОК».
2. Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу перестановок из 5 элементов (букв): n=$P_5 = 5!$=5·4· $3 \cdot 2 \cdot 1$=120.
3. Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно 1, т.к. требуется составить слово с буквами, расставленными в определённом порядке. А эти буквы различны.
4. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$

Форма представления результата:
Выполненное задание.

Критерии оценки:
Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением

необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов