Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет
им. Г.И. Носова»
Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор
________ / С.А. Махновский
«24» февраля 2021 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по учебной дисциплине
ЕН.01 Математика

для студентов специальности

08.02.01 «Строительство и эксплуатация зданий и сооружений»

Магнитогорск, 2021

ОДОБРЕНО

Предметной комиссией «Математических и естественнонаучных дисциплин»
Председатель ________ /Е.С. Корытникова

Протокол № 6 от 17.02.2021г.

Методической комиссией МпК

Протокол № 3 от 24.02.2021г.

Составитель:
преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова» МпК Ю.Н. Садчикова

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика».

Содержание практических работ ориентировано на формирование общих и профессиональных компетенций по программе подготовки специалистов среднего звена по специальности 08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование учебных практических умений (умений решать задачи по математике) необходимых в последующей учебной деятельности.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено проведение практических занятий. В рамках практического занятия обучающиеся могут выполнять одну или несколько практических работ.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

У1. выполнять необходимые измерения и связанные с ними расчеты;

У2. вычислять площади и объемы деталей строительных конструкций, объемы земляных работ;

У3. применять математические методы для решения профессиональных задач;

У01.2 анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;

У01.3 определять этапы решения задачи;

У01.9 реализовать составленный план;

У02.4 структурировать получаемую информацию;

У02.7 оформлять результаты поиска.

Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению ***профессиональными компетенциями:***

- ПМ 01. Участие в проектировании зданий и сооружений;
- ПМ 02. Выполнение технологических процессов на объекте капитального строительства.

А также формированию *общих компетенций*:

ОК 01	Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.
ОК 02	Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

Выполнение обучающихся практических работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- формирование и развитие умений: наблюдать, сравнивать, сопоставлять, анализировать, делать выводы и обобщения;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Разделы/темы	Темы практических/лабораторных занятий	Количество часов	Требования ФГОС СПО (уметь)
Раздел 1. Элементы аналитической геометрии		**4**	
1.1 Координаты и векторы	***Практическая работа № 1.*** Применение векторов для решения геометрических и практических задач	2	У1, У01.2, У01.3,У01.9
1.2 Прямая на плоскости и в пространстве	***Практическая работа № 2*** Решение задач на расположение прямых на плоскости и в пространстве	2	У1, У01.2, У01.3,У01.9
Раздел 2. Практическая геометрия		**4**	
2.1 Площади плоских фигур и поверхностей тел	***Практическая работа 3.*** Расчет площадей строительных конструкций	2	У1, У2
2.2 Объёмы тел	***Практическая работа 4.*** Вычисление объёмов деталей строительных конструкций, определение объема земляных работ	2	У1, У2
Раздел 3. Линейная алгебра		**8**	
3.1 Матрицы и определители	***Практическая работа 5***. Действия над матрицами	2	У3
	Практическая работа 6. Вычисление определителей второго и третьего порядка	2	У 3
3.2 Системы линейных уравнений	***Практическая работа 7***. Решение систем линейных уравнений методом Крамера	2	У3
	Практическая работа 8. Решение систем линейных равнений методом Гаусса	2	У3
Раздел 4. Элементы математического анализа		**14**	

4.1 Последовательности и пределы	***Практическая работа 9***. Вычисление пределов последовательностей и функций с применением различных методов. Исследование функции на непрерывность, определение точек разрыва	2	У3
4.2 Производная и её приложения	***Практическая работа 10***. Вычисление производной функции. Применение производной к приближенным вычислениям	2	У3, У01.2, У01.3, У01.9
	Практическая работа 11. Составление уравнения касательной и нормали. Определение экстремумов функции. Вычисление наибольшего и наименьшего значений функции на заданном отрезке	2	У1, У3, У01.2, У01.3, У01.9
	Практическая работа 12. Применение производной к исследованию функции и для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах	2	У1, У3, У01.2, У01.3, У01.9
4.3 Интеграл и его приложения	***Практическая работа 13***. Вычисление неопределённых интегралов методом замены переменных и с помощью интегрирования по частям	2	У3, У01.2, У01.3, У01.9
	Практическая работа 14. Вычисление определённых интегралов различными методами	2	У3, У01.2, У01.3, У01.9
	Практическая работа 15. Построение криволинейной трапеции. Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур и вычислению объёмов	2	У1, У2, У3, У01.2, У01.3, У01.9
Раздел 5. Основы теории вероятностей и математической статистики		**4**	
5.1 Вероятность.	***Практическая работа 16***.	2	У3, У01.2,

Основные теоремы теории вероятностей	Вычисление вероятностей сложных событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности и формула Бернулли		У02.4, У02.7
5.2 Основы математической статистики	***Практическая работа 17***. Составление статистического распределения выборки, построение полигона и гистограммы	2	У3, У01.2, У02.4, У02.7
ИТОГО		**34**	

При заочной форме обучения практические занятия № 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17 прорабатываются обучающимися самостоятельно.

3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1 Координаты и векторы

Практическое занятие № 1
Применение векторов для решения геометрических и практических задач

Цель: формирование умений решать геометрические задачи с координатами и векторами.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
- выполнять действия с векторами;
- применять метод координат при решении геометрических задач.

Материальное обеспечение:
Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:
Решите задачи:
m- количество букв в имени
n- количество букв в фамилии
p- месяц рождения

1. Даны две точки: $A(m; -n; 0)$ и $B(p; -n;\ 2)$.Разложите вектор $\overrightarrow{AB}$ по векторам базиса и найдите его длину.

2. Даны векторы $\vec{a} = p\,\vec{i} - \vec{j} + m\,\vec{k}$ и $\vec{b} = n\,\vec{i} + p\,\vec{k}$ Найдите координаты вектора $\vec{c} = m\,\vec{a} - n\,\vec{b}$.

3. Вычислите скалярное произведение векторов $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{a}$, если $\vec{a} = \{-m; n; p\}$ и $\vec{b} = \{0; -p; n\}$.

4. При каком значении *«x»* векторы $\vec{a} = \{m; -n; x\}$ и $\vec{b} = \{-2m; 2n; p\}$ будут коллинеарными?

Порядок выполнения работы:
1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектами лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи

Ход работы:
Задача № 1. Даны точки $A(-3; 1; -1)$ и $B\ (2; -4; 1)$.

Разложите вектор $\overrightarrow{AB}$ по векторам базиса и найдите его длину.
Решение.

1) $\overrightarrow{AB} = \{2-(-3); -4-1; 1-(-1)\} = \{5; -5; 2\}$ - координаты вектора.

2) Разложим $\overrightarrow{AB}$ по векторам базиса:
$\overrightarrow{AB} = 5\,\vec{i} - 5\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$.

3) Длину $|AB|$ найдем по формуле:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{5^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = 3\sqrt{6}.$$

Задача № 2.

Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 2i + \vec{k}$.Найдите координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$.Решение

$\vec{a} = \{1;-3;1\}$.

$\vec{b} = \{-2;0;1\}$; $2\vec{b} = \{-4;0;2\}$.

$\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b} = \{1;-3;1\} - \{-4;0;2\} = \{1-(-4);-3-0;1-2\} = \{5;-3;-1\}$.

Задача № 3

Вычислите скалярное произведение $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}$, если $\vec{a} = \{1;0;3\}$ и $\vec{b} = \{2;-1;1\}$.

Решение

1) Найдём координаты $2\vec{a}$:

$2\vec{a} = \{2;0;6\}$

2). Найдём координаты $2\vec{a} + \vec{b}$:

$2\vec{a} + b = \{2;0;6\} + \{2;-1;1\} = \{4;-1;7\}$.

3). Найдём скалярное произведение:

$(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = 4 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 7 = 25$.

Ответ: 25

Задача № 4.

4. При каком значении *«x»* векторы $\vec{a} = \{4;-6;x\}$ и $\vec{b} = \left\{-\frac{1}{2};\frac{3}{4};3\right\}$ будут коллинеарными?

Условие коллинеарности векторов:

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

Получим:

$$\frac{4}{-\frac{1}{2}} = \frac{-6}{\frac{3}{4}} = \frac{x}{3}.$$

$-8 = \frac{x}{3}$; $x = -24$.

Ответ: $x = -24$.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 1.2 Прямая на плоскости и в пространстве

Практическое занятие №2

Решение задач на расположение прямых на плоскости и в пространстве

Цель: формирование умений решать задачи на взаимное расположение прямых.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- определять вид взаимного расположения прямых на плоскости и в пространстве;
- составлять уравнение прямой.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

m- количество букв в имени

n- количество букв в фамилии

p- месяц рождения

1. Найти точку пересечения прямых: $mx - py + n = 0$ и $x - y - p = 0$.
2. Найдите острый угол между прямыми:
$mx + ny - p = 0$ и $nx - py - nm = 0$.
3. Составьте уравнение прямой, параллельной прямой $px + y - m = 0$ и проходящей через точку $A(-n; 1)$.
4. Из точки $A(m; -1)$ на прямую $nx + py + 1 = 0$ опущен перпендикуляр. Составьте его уравнение.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
2. Пользуясь конспектами лекций, подберите нужную формулу или соответствующее условие для решения задачи

Ход работы:

Задача № 1

Найти точку пересечения прямых :

$2x + 3y - 12 = 0$ и $x - y - 1 = 0$.

Решим систему:

$$\begin{cases} 2x+3y-12=0, \\ x-y-1=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2(1+y)+3y-12=0, \\ x=1+y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2+2y+3y-12=0, \\ x=1+y; \end{cases} \qquad \begin{cases} 5y=10, \\ x=1+y; \end{cases} \qquad \begin{cases} y=2, \\ x=3. \end{cases}$$

Ответ: точка $M\,(3;2)$.

Задача № 2

Определить угол между прямыми, заданными уравнениями:

$2x-3y+6=0$ и $x+5y-2=0$.

Решение

Найдем угловые коэффициенты этих прямых:

$2x-3y+6=0;$	$x+5y-2=0$
$-3y=-2x-6,$	$5y=-x+2,$
$y=\frac{2}{3}x+6,$	$y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5},$
$k_1=\frac{2}{3}.$	$k_2=-\frac{1}{5}.$

Подставим найденные значения k_1 и k_2 в формулу: $tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$.

$$tg\varphi=\frac{-\frac{1}{5}-\frac{2}{3}}{1+(-\frac{1}{5})\cdot\frac{2}{3}}=\frac{-\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}}=-1.$$

$tg\varphi=-1;\quad \varphi=135^0.$

Полученный угол между прямыми - тупой. Смежный с ним, будет острый, то есть $\varphi_1=180^0-135^0=45^0.$

Задача № 3

1. Составьте уравнение прямой, параллельной прямой $5x+3y-7=0$ и проходящей через точку А(-2;6).

Решение

Составим уравнение пучка прямых, проходящих через точку А(-2;6).

$y-6=k(x+2)$

Находим угловой коэффициент данной прямой:

$3y=-5x+7,$

$y=-\frac{5}{3}x+\frac{7}{3};\quad k_1=-\frac{5}{3}.$

Так как прямые параллельны, то $k_2=-\frac{5}{3}$ - угловой коэффициент искомой прямой.

Подставим найденное значение $k_2=-\frac{5}{3}$ в уравнение пучка прямых:

$y-6=k(x+2)$;

после преобразования получим:

$5x+3y-8=0.$

Задача № 4

Из точки A(-3;5) на прямую $x-2y+3=0$ опущен перпендикуляр. Написать его уравнение.

Решение

Составим уравнение пучка прямых, проходящих через точку $A(-3;5)$.

$y-5=k(x+3).$

Найдем угловой коэффициент k_1 прямой $x-2y+3=0$;

$-2y=-x-3;$

$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2};$

$k_1=\frac{1}{2}.$

Учитывая условие перпендикулярности прямых: $k_1=-\frac{1}{k_2}$, найдем уравнение искомой прямой

$k_2=-2.$

$y-5=-2(x+3);$

$y+2x+1=0.$

Ответ: $y+2x+1=0.$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 2.1 Площади плоских фигур и поверхностей тел

Практическое занятие №3

Расчет площадей строительных конструкций

Цель работы: формирование умений вычислять площади квартир, окон, различных планировочных и объемных коэффициентов, использование ранее полученных знаний по геометрии, установить и показать наглядно связь математики со специальными дисциплинами, например, «Архитектура зданий»; выработать у обучающихся стремление к глубокому усвоению полученных знаний, обучение рациональным приемам труда и умение самостоятельно работать.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- выполнять необходимые измерения и связанные с ним расчеты; вычислять площади деталей строительных конструкций;
- применять математические методы для решения профессиональных задач.

Материальное обеспечение:

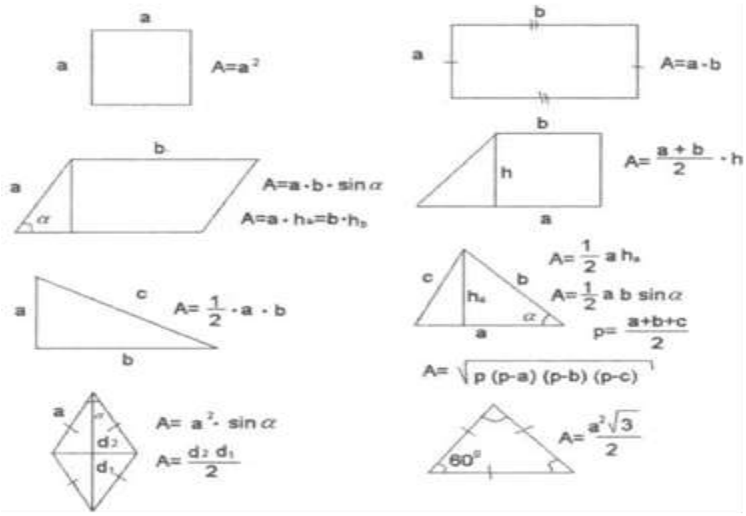
1. Таблица: «Вычисление площадей различных геометрических фигур на плоскости».
2. Карточки-задания для выполнения индивидуальных работ по 30 вариантам.

Задание:

Вычислить площадь квартиры.

Порядок выполнения работы:

1. Повторение формул вычисления площадей



Алгоритм решения задачи:

1. Перечертить план квартиры в тетрадь, измеряя линейкой длины стен.

План квартиры вычерчивать в масштабе 1:100 (в 1 см — 1 м).

2. Записать размеры помещений и комнат, соблюдая масштаб 1:100.
3. Вычислить площадь каждой комнаты и подсобных помещений отдельно: $A = a \cdot b$.
4. Вычислить полезную площадь:

$$A_{пол} = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$$

Площадь подсобных помещений:

$$A_{п.п} = A_к + A_в + A_т + A_{кл} + A_{пр} + A_{кор}$$

Общую площадь: $A_{общ} = A_{пол} + A_{п.п}$

5. Вычислить планировочный коэффициент:

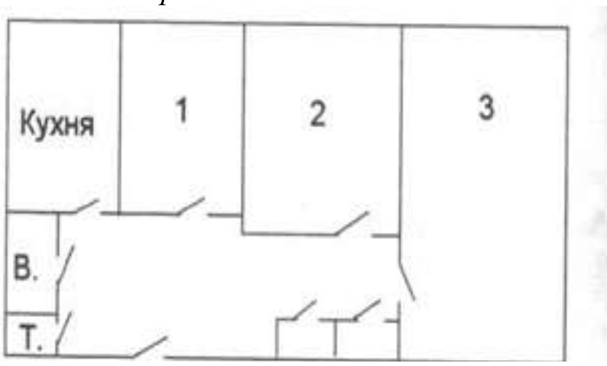
$$К = A_{пол}/A_{общ} = A_{пол}/(A_{пол} + A_{пп})$$

6. Выбрать размеры окна или окон в комнате и в кухне, определить площадь каждого окна:

$1{,}5 \cdot 1{,}2 = 1{,}8\ м^2$

$1,5 \cdot 1,5 = 2,25\ м^2$
$1,5 \cdot 1,8 = 2,70\ м^2$
$1,5 \cdot 2,1 = 3,15\ м^2$

Задача 1. *Дан план квартиры. Измерим размеры комнат и подсобных помещений и перенесем их в тетрадь с масштабом 1 см = 1 м.*



1. *Запишем размеры комнат и подсобных помещений в тетрадь:*

- 1 комната $a = 3,2\ м; b = 2,6\ м;$
- 2 комната $a = 3,6\ м; b = 2,4\ м;$
- 3 комната $a = 5,0\ м; b = 3,2\ м;$
- кухня $a = 3,2\ м; b = 2,8\ м;$
- ванная $a = 1,1\ м; b = 1,5\ м;$
- туалет $a = 0,7\ м; b = 1,5\ м;$
- кладовая $a = 0,5\ м; b = 2,4\ м;$
- прихожая $a = 1,8\ м; b = 3,9\ м;$
- коридор $a = 0,9\ м; b = 2,4\ м;$

2. *Вычислим площади отдельно каждой комнаты и подсобно-наблюдаемого помещения.*

$A_1 = 3,2 \cdot 2,6\ = 8,32\ м^2;$
$A_2 = 3,6 \cdot 2,4 = 8,64\ м^2;$
$A_3 = 5,0 \cdot 3,2 = 16,0\ м^2;$
$A_к = 3,2 \cdot 2,8 = 8,96\ м^2;$
$A_в = 1,1 \cdot 1,5 = 16,5\ м^2;$
$A_т = 0,71,5 = 1,05\ м^2;$
$A_к = 0,5 \cdot\ 2,4 = 1,2\ м^2\ ;$
$A_{пр} = 1,8 \cdot 3,9 = 7,02\ м^2;$
$A_{кор} = 0,9\ \cdot 2,4 = 2,16\ м^2;$

3. *Вычислим полезную площадь, площадь подсобных помещений и общую площадь квартиры:*

$А_{пол} = 8,32 + 8,64 + 16,0 = 32,96$ м^2.
$А_{под.пом} = 8,96 + 1,65 + 1,05 + 1,2 + 7,02 + 2,16 = 22,04$ м^2.
$А_{общ} = 32,96 + 22,04 = 55$ м^2.

4. Вычислим коэффициент планировочный:
   К = 32,96/8,96 = 0,599 = 0,6.
5. Для кухни и комнат выбирают окна с площадью $1,5 \cdot 1,5 = 2,25$ м^2.
6. Вычислим коэффициент остекленности:
   $К_{ост.кухни} = 2,25/8,96 = 0,25$.
   $К_{ост.\ 1комн} = 2.25/8,32 = 0,27$.
   $К_{ост.\ 2комн} = 2.25/8,64 = 0,26$.
   $К_{ост.\ 3комн} = 2.25/16,00 = 0,14$.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 2.2 Объёмы тел

Практическое занятие №4

Вычисление объёмов деталей строительных конструкций, определение объёма земляных работ

Цель работы: формирование умений вычислять объёмы деталей строительных конструкций, использование ранее полученных знаний по геометрии, установить и показать наглядно связь математики со специальными дисциплинами, например, «Архитектура зданий»; выработать у обучающихся стремление к глубокому усвоению полученных знаний, обучение рациональным приемам труда и умение самостоятельно работать.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

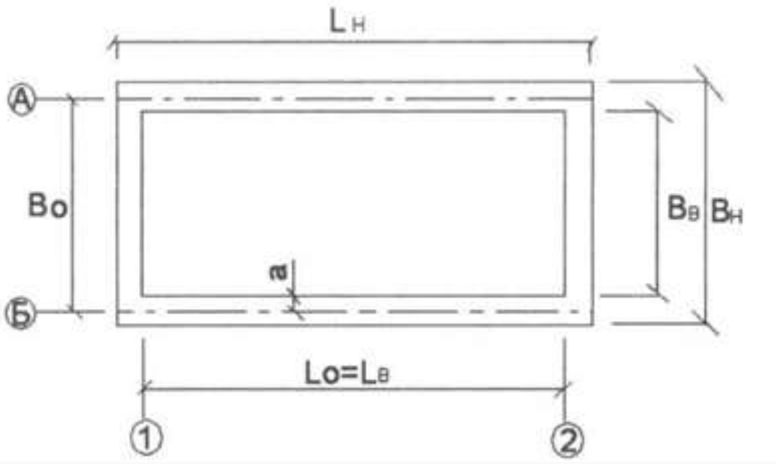
- выполнять необходимые измерения и связанные с ним расчеты; вычислять объёмы деталей строительных конструкций, земляных работ;
- применять математические методы для решения профессиональных задач.

Материальное обеспечение:

3. Таблица: «Вычисление объёмов различных геометрических тел».
4. Карточки-задания для выполнения индивидуальных работ.

Задание:

Найти объем здания (кубатуру). Объем помещений и объем здания.



Для кирпичных стен t = 380 мм, 510 мм, 640 мм, 770 мм; a=120 мм.
Для панельного здания t = 270 мм, 320 мм, 300 мм, 350 мм, 400 мм; a = 90 и 70 мм.
Для здания из крупных блоков 1 = 500 мм, 600 мм; a=150 и 200 мм.

Порядок выполнения работы:

1. Повторение формул для вычисления объема геометрических тел.
2. Раздача индивидуальных карточек.
3. Составление алгоритма решения, объяснение преподавателя.
4. Самостоятельная работа.
5. Оценка работы студентов.
6. Подведение итогов.

Ход работы:

Перечертить план здания с карточки с пометками и размерами.

2. Размеры даны осевые, а поэтому необходимо найти:

$$L_н = L_o + 2t;$$
$$L_o = L_в;$$
$$B_н = B_o + 2(t - a);$$
$$B_в = B_o - 2a;$$
$$B_н = B_o + 2(t - a) = B_b + 2t.$$

3. Вычислить площадь поверхности стен, учитывая, что $A_{стены} = P_{нар} \cdot H$.

4. Периметр здания $P = (L_н + \ B_н\ ) \cdot 2$

5. Вычислить: $V_{здания} = L_н \cdot B_н \cdot H$; $V_{пом} = L_в \cdot B_в \cdot H$; $V_{стен} = P \cdot t \cdot H$;
$V_{стен} = (B_в + B_н + L_o + L_п) \cdot t \cdot H$

6. Вычислить общую площадь здания $A_{общ} = A_{1эт} \cdot n_{эт}$; $A_{общ} = (B_в \cdot L_o) \cdot n_{эт}$

Студентам раздаются карточки индивидуальные (16 вариантов) и они выполняют задание самостоятельно (если возникают вопросы, консультируются у преподавателя). После выполнения задания студенты сдают и защищают свою работу. Прилагаются 30 вариантов заданий.

Разберем решение одного задания.

Пусть здание имеет стены из кирпича:

$$B_o = 6000\,мм; H = 8{,}4м; L_o = 25000\,мм = L_в; n_{эт} = 3; a = 120\,мм; t = 640\,мм.$$

Решение:

Подсчитаем наружную длину здания:

$$L_н = L_o + 2t = 25000 + 2 \cdot 640 = 26280\,мм = 26{,}28\,м.$$

Найдем внутреннюю и наружную ширину здания:

$$B_в = B_o - 2a = 6000 - 2 \cdot 120 = 5760\,мм = 5{,}76\,м;$$

$$B_н = B_b + 2t = 5760 + 2 \cdot 640 = 7040\,мм = 7{,}04\,м.$$

Найдем периметр наружных стен:

$$P = (L_н + \ B_н\ ) \cdot 2 = 2(26{,}28 + 7{,}04) = 33{,}32 \cdot 2\ 66{,}64\,м.$$

Вычислим площадь поверхности стен:

$$A_{стены} = P_{нар} \cdot H = 66{,}64 \cdot 8{,}4 = 559{,}78\,м^2$$

Вычислим объем здания:

$$V_{здания} = L_н \cdot B_н \cdot H = 26{,}28 \cdot 7{,}04 \cdot 8{,}4 = 1554{,}09\ \ м^3$$

Подсчитаем объем внутреннего помещения:

$$V_{пом} = L_в \cdot B_в \cdot H = 25 \cdot 5{,}76 \cdot 8{,}4 = 1209{,}6\,м^3.$$

Найдем объем стен здания:

$$V_{стен} = L_{срис} \cdot t \cdot H = 64{,}08 \cdot 0{,}64 \cdot 8{,}4 = 344{,}49\,м^3;$$

$$V_{стен} = B_в + B_н + L_o + L_п = 64{,}08\,м.$$

Вычислим общую площадь помещений зданий:

$$A_{общ} = B_в \cdot L_o \cdot n_{эт} = 5{,}76 \cdot 25 \cdot 3 = 432\,м^2$$

№	B_o	L_o	H	$n_{эт}$	a	t
1	12000	25600	11,20	3	90	270
2	9000	20800	14,00	5	100	300
3	7200	23200	16,80	6	90	320
4	15000	38400	33,60	12	100	350
5	13500	28800	14,00	5	90	400
6	6000	18000	14,00	5	120	500
7	9000	22000	16,80	6	120	600
8	12000	24000	25,20	9	120	500
9	15000	30000	19,60	7	120	600
10	18000	32000	25,20	9	120	500
11	12000	26000	14,00	5	120	600
12	14000	28000	14,00	5	120	510
13	9000	26000	16,80	6	120	640
14	12000	30000	19,60	7	120	770
15	18200	32000	22,40	8	120	510
16	10000	24500	25,20	9	120	640
17	18400	33000	28,80	10	120	770
18	11500	24000	33,60	12	120	510
19	8600	28000	44,80	16	120	640
20	18100	36000	16,80	6	120	770
21	6600	25000	25,20	9	120	510
22	10800	23000	33,60	12	120	640
23	16200	31000	39,20	14	120	770
24	11400	29000	28,80	10	120	510
25	15600	33000	25,20	9	120	640
26	10600	27000	19,60	7	120	770
27	14100	29000	16,80	6	120	510
28	14800	30000	33,60	12	120	640

29	9200	26000	39,20	14	120	770
30	7200	25500	44,80	16	120	510

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема3.1 Матрицы и определители

Практическое занятие №5
Действия над матрицами

Цель работы: Научиться выполнять действия над матрицами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- выполнять операции над матрицами;

- находить обратную матрицу.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти матрицу $C = A^2 + 3AB$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Выяснить, является матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ обратной к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.
3. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите: A+B; 2A; AB; BA.

Краткие теоретические сведения:

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел. Матрица записывается в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2}\dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Действия над матрицами:

1.Сложение.

Операция сложения вводится только для матриц одинаковых размеров. При сложении матриц их соответствующие элементы складываются.

$$A + B = C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12}\cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22}\cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

2.Умножение на число.

При умножении матрицы на число каждый ее элемент умножается на это число.

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12}\cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22}\cdots & ka_{2n} \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

3.Умножение матриц.

Операция умножения матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Чтобы найти элемент матрицы, стоящий в *i*-той строке в *k*-том столбце, нужно вычислить сумму произведений элементов *i*-той строки первой матрицы на соответствующие элементы *k*-того столбца второй.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите задание.
2. Определите, какие действия, и по каким правилам необходимо выполнить. Прочитайте конспект.
3. Выполните действия. Проверьте правильность вычислений.

Ход работы:

1.Найти матрицу $C = A^2 + 3AB$, если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

а) Найдем A^2, умножая матрицу саму на себя

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

б) Найдем матрицу *3A*, умножив все элементы матрицы *A* на 3.

$$3A = 3\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

в) Найдем произведение 3AB

$3AB = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}$

г) Найдем матрицу С, складывая соответствующие элементы

$C = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 12 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 24 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}$

2.Найдем произведение $A \cdot A^{-1}$ и $A^{-1} \cdot A$:

$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$

$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$

В соответствии с определением данные матрицы являются взаимообратными.

3.Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдите: A+B; 2A; AB; BA.

$$A + B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -8 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 11 \\ 16 & -16 & -4 \\ 14 & -14 & -8 \end{pmatrix};$$

$c_{11} = -3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 0 = 3;$

$c_{12} = -3 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) + (-3) \cdot (-2) = -2;$

$c_{13} = -3 \cdot (-5) + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 = 11;$

$c_{21} = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 = 16;$

$c_{22} = 1 \cdot 0 + 5 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-2) = -16;$

$c_{23} = 1 \cdot (-5) + 5 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = -4;$

$c_{31} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 = 14;$

$c_{32} = 2 \cdot 0 + 4 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-2) = -14;$

$c_{33} = 2 \cdot (-5) + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = -8.$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -18 & 2 \\ -11 & -10 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Форма предоставления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Практическое занятие №6

Вычисление определителей второго и третьего порядка

Цель работы: научиться вычислять определители второго и третьего порядков.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять определители второго порядка;
- вычислять определители третьего порядка;
-вычислять определители четвертого порядка.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -15 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}$

Краткие теоретические сведения:

Определителем квадратной матрицы второго порядка (определителем второго порядка) называется число, равное разности произведений элементов главной диагонали и элементов побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Определителем квадратной матрицы третьего порядка (определителем третьего порядка) называется число, равное

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Определителем квадратной матрицы n-го порядка называется число, равное сумме произведений элементов любой строки или столбца на их алгебраические дополнения.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, полученный из исходного определителя путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент.

Порядок выполнения работы:

1 Запишите определитель, определите какого он порядка.

2 Используя соответствующее определение, вычислите значение определителя.

Ход работы:

Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-4) = 12 + 12 = 24$

2) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$

$-6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = -15 + 48 - 6 - 18 =$

$= 48 - 39 = 9$

3) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -7 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-7) \cdot 1 + (-6) \cdot (-3) \cdot 5 -$
$-5 \cdot 2 \cdot 1 - (-6) \cdot 0 \cdot 2 - (-3) \cdot (-7) = 16 + 0 + 90 - 10 - 0 - 84 = 12$

4) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 3A_{11} + (-1)A_{21} + 0A_{31} + 1A_{41} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot$
$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 122$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 3.2 Системы линейных уравнений

Практическое занятие №7
Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений, используя формулы Крамера.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными методом Крамера;
- решать системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Крамера;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания , учебники, конспекты лекций.

Задание:

Решить системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 3x - 5y = 11 \\ 2x + 3y = 20 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 3y - 5z = -2 \\ x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + 7z = 27 \end{cases}$

Краткие теоретические сведения:

Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$

Определитель Δ_3 получается из определителя Δ путем замены третьего столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

Чтобы вычислить значения неизвестных, воспользуемся формулами Крамера:

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$.

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему уравнений.
2.Запишите и вычислите определитель системы.
3.Вычислите определители каждой неизвестной.
4.Найдите значения неизвестных, используя формулы Крамера.

Ход работы:

Рассмотрим пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Вычислим определители каждой переменной:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 40 - 15 + 10 - 0 = 20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 30 + 0 + 45 - 0 - 20 = -10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 30 - 0 - 20 - 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{10} = -1; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0$$

Ответ: (2;-1;0).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Практическое занятие №8

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений методом последовательного исключения переменных (методом Гаусса).

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса;
- решать системы четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными методом Гаусса;

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание:

Решить системы линейных уравнений:

1. $\begin{cases} 3x - 2y + z = 10 \\ x + 5y - 2z = -15 \\ 2x - 2y - z = 3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$

Краткие теоретические сведения:
Метод Гаусса является одним из наиболее универсальных методов решения систем линейных уравнений. Он состоит в последовательном исключении неизвестных.
Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому виду. На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.
На практике удобнее работать не с системой уравнений, а с расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками.
Элементарными преобразованиями матрицы являются:
- перестановка строк местами;
-умножение некоторой строки на любое, не равное нулю число;
-прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему линейных уравнений.
2. Составьте расширенную матрицу.
3. Выполните элементарные преобразования строк матрицы, исключая последовательно переменные. В результате должна получиться ступенчатая матрица.
4. По ступенчатой матрице составьте систему.
5. Последовательно найдите значения всех неизвестных.
6. Запишите ответ.

Ход работы:
Рассмотрим пример:
1) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Полученной матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ \quad x_2 - 2x_3 = -1; \\ \quad\quad -2x_3 = 0 \end{cases}$$

Начиная снизу вверх, находим значения неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 + 2\cdot(-1) = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1. \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Ответ: (2;-1;0).

$$2)\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ x_1 - 2x_2 - \qquad\quad x_4 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \qquad = 6 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & -6 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & -5 & 8 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 8 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 13 & 11 & 74 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13 & 11 & 74 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ \qquad\qquad\qquad x_3 + x_4 = 6, \\ \qquad\qquad\qquad\quad -2x_4 = -4 \end{cases}$$

Начиная снизу вверх, находим значения неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = 2 \end{cases}.$$

Ответ : (8;6;4;2).

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 4.1 Последовательности и пределы

Практическое занятие №9

Вычисление пределов последовательностей и функций с применением различных методов. Исследование функции на непрерывность, определение точек разрыва

Цель: Научиться вычислять пределы функций. Научиться находить точки разрыва функций, определять их род, находить асимптоты графиков функций.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-вычислять пределы функций, используя теоремы о пределах;

- раскрывать неопределенности;

- находить пределы функций, используя формулы замечательных пределов;
- исследовать функции на непрерывность;
- находить точки разрыва, определять их род;
- находить асимптоты.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание 1:

Вычислить пределы функций:

1. $\lim_{x\to 2}(2x^3 - 10x^2 - 4x + 5)$
2. $\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$
3. $\lim_{x\to\infty}\frac{11x^3-5x^2-6x+10}{6x^4-8x^2+2}$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}$
5. $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}$

Задание 2:

Исследовать функции на непрерывность. Найти точки разрыва и определить их род. Найти асимптоты функций.

1) $y = \frac{2x^2+3}{x^2-9}$;
2) $y = \frac{2x^2-4x-30}{x^2-25}$.

Краткие теоретические сведения:

1) ***Точками разрыва функции*** называются точки, в которых нарушается условие непрерывности функции.
2) Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода.
3) Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва первого рода* функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа, т е
4) $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A_1$ и $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A_2$. При этом: если $A_1 = A_2$,то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва; если $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 называется точкой конечного разрыва.
5) Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва второго рода* функции $y = f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.
6) ***Асимптотой графика функции*** $y = f(x)$называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x; f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.
7) Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim_{x\to a+0} f(x)$ равно $-\infty$ или $+\infty$.
8) ***Замечание.*** Прямая $x = a$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = a$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.
9) Прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x\to\infty} f(x)$ или $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ равно b.

10) **Замечание.** График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

11) Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции , если $\lim_{x\to\infty}|f(x) - kx - b| = 0$

12) Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to \infty$.

Порядок выполнения работы:

1. Найдите предел функции, используя теоремы о пределах.
2. Если получилась неопределенность, определите ее вид и способ раскрытия.
3. Преобразуйте функцию и раскройте неопределенность.
4. Вычислите предел.

Ход работы:

Найти предел функции:

1) $\lim_{x\to2}(2x^3 - 10x^2 - 4x + 5)$

Используем теоремы о пределах:

$$\lim_{x\to2}(2x^3 - 10x^2 - 4x + 5)$$
$$= 2\left(\lim_{x\to2} x\right)^3 - 10\left(\lim_{x\to2} x\right)^2 - 4\lim_{x\to2} x + 5 = 2\cdot8 - 10\cdot4 - 4\cdot2 + 5 = -27$$

2) $\lim_{x\to3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$

Функция представляет собой отношение двух многочленов, обращающихся в нуль в точке x = 3. Поэтому сначала преобразуем данную функцию.

Любой квадратный трехчлен можно разложить на множители с помощью формулы

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2корни квадратного трехчлена.

Корнями квадратного трехчлена $3x^2 - 11x + 6$ являются числа $\frac{2}{3}$ и 3; значит

$$3x^2 - 11x + 6 = 3(x - 3)(x - \frac{2}{3})$$

А корни квадратного трехчлена $2x^2 - 5x - 3$ равны $\frac{1}{2}$ и 3, следовательно

$$2x^2 - 5x - 3 = 2(x - 3)(x + \frac{1}{2})$$

Возвращаясь к пределу, имеем:

$$\lim_{x\to3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3} = \lim_{x\to3}\frac{3(x-3)(x-\frac{2}{3})}{2(x-3)(x+\frac{1}{2})} = \lim_{x\to3}\frac{3(x-\frac{2}{3})}{2(x+\frac{1}{2})} = \lim_{x\to3}\frac{3x-2}{2x+1} = \frac{3\lim_{x\to3}x-2}{2\lim_{x\to3}x+1} = \frac{3\cdot3-2}{2\cdot3+1} =$$

77=1

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{11x^3-5x^2-6x+10}{6x^4-8x^2+2}$

Так как многочлены в числителе и знаменателе стремятся к ∞, то получаем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для ее раскрытия разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^4. Тогда получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{11x^3 - 5x^2 - 6x + 10}{6x^4 - 8x^2 + 2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{11x^3}{x^4} - \frac{5x^2}{x^4} - \frac{6x}{x^4} + \frac{10}{x^4}}{\frac{6x^4}{x^4} - \frac{8x^2}{x^4} + \frac{2}{x^4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{11}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3} + \frac{10}{x^4}}{6 - \frac{8}{x^2} + \frac{2}{x^4}} = \frac{0}{6} = 0$$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}$

Чтобы вычислить предел функции, нужно воспользоваться формулой первого замечательного предела: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Умножим числитель и знаменатель дроби на $\frac{1}{2}$.

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$

5) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}$

Преобразуем функцию так, чтобы можно было применить второй замечательный предел : $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$. Введем новую переменную: $x=-3y; x\to\infty; y\to\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x}=\lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{3}{-3y}\right)^{5\cdot(-3y)}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-15y}=e^{-15}=\frac{1}{e^{15}}$$

Исследовать функцию на непрерывность. Найти асимптоты функции.

$y=\frac{x^2}{2x-2}$.

Область определения функции $D(f)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$

Точка $x=1$ является точкой разрыва 2 рода, т.к.

$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{2x-2}=\left[\frac{1}{0}\right]=-\infty \quad \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{2x-2}=\left[\frac{1}{0}\right]=+\infty$

Прямая $x=1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(2x-2)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2-\frac{2}{x}}=\frac{1}{2}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x-2}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x(x-1)}{2(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+x}{2(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2-\frac{2}{x}}=\frac{1}{2}$$

Конечный вид прямой следующий

$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 4.2 Производная и её приложения

Практическое занятие №10

Вычисление производных функций. Применение производной к приближенным вычислениям

Цель: Научиться находить производные функций, выполнять приближенные вычисления с помощью производной.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- применять правила дифференцирования;
- находить производные сложных функций;
- выполнять приближенные вычисления.

Материальное обеспечение: индивидуальные задания, конспекты лекций, таблица производных.

Задание:

1) Найти производные функций

1. $y = (5x^3 - 2x)^6$
2. $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3. $f(x) = arcsin4x + arccos^2x$
4. $f(x) = log_5(7x^4 - 5x^3 + 1)$
5. $f(x) = ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

2) Найти приближенные значения:

a. $ln1,01$;
b. $\sqrt[4]{15,8}$;
c. $arctg1,05$.

Порядок выполнения работы:

1. Определите вид функции. Если функция является сложной, то введите промежуточный аргумент.
2. Определите, какими правилами дифференцирования нужно воспользоваться. Примените соответствующее правило.
3. Используя таблицу производных, найдите производные функций.
4. Раскройте скобки и приведите подобные, если это упростит запись функции.

Ход работы:

Найти производные функций:

1. $g(x) = (1 - 4x^2)^{10}$

Функция является сложной степенной. Введем промежуточный аргумент $u = 1 - 4x^2$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$$y' = 10(1-4x^2)^9 \cdot (1-4x^2)' = 10\,(1-4x^2)^9(-8x) = -80x(1-4x^2)^9$$

2. $f(x) = \sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$

Функция представляет собой произведение двух сложных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

$$f'(x) = \left(\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x\right)' = \left(\sin\frac{1}{2}x\right)' \cos 2x + \sin\frac{1}{2}x(\cos 2x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = \frac{1}{2}x$, для второй функции $u = 2x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$, $(\cos u)' = -\sin u\, u'$.

$$f'(x) = \left(\sin\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x\right)' = \left(\sin\frac{1}{2}x\right)' \cos 2x + \sin\frac{1}{2}x(\cos 2x)'$$

$$= \cos\frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' \cdot \cos 2x + \sin\frac{1}{2}x \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)' = \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x \cdot \cos 2x - 2\sin\frac{1}{2}x \cdot \sin 2x.$$

3. $y = \frac{2^{3x+5x^2}}{\log_2(3+10x)}$

Функция представляет собой частное двух сложных функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2}$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = 3x + 5x^2$, для второй функции $u = 3 + 10x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$.

$$y' = \frac{(2^{3x+5x^2})' \cdot \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \cdot (\log_2(3+10x))'}{(\log_2(3+10x))^2} = \frac{2^{3x+5x^2} \ln 2\, (3x+5x^2)' \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \frac{1}{(3+10x)\ln 2}(3+10x)'}{(\log_2(3+10x))^2} =$$

$$\frac{2^{3x+5x^2} \ln 2 (3+10x) \log_2(3+10x) - 2^{3x+5x^2} \frac{10}{(3+10x)\ln 2}}{(\log_2(3+10x))^2}$$

4. $f(x) = \arcsin\frac{3}{5}x + \arccos 5x$

Функция представляет собой сумму двух сложных обратных тригонометрических функций. Поэтому сначала воспользуемся правилом дифференцирования $(U + V)' = U' + V'$.

$$f'(x) = \left(\arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (\arccos 5x)'$$

Введем промежуточный аргумент: для первой функции $u = \frac{3}{5}x$, для второй функции $u = 5x$.

При дифференцировании используем следующие формулы: $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$$f'(x) = \left(\arcsin\frac{3}{5}x\right)' + (\arccos 5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{5}x)^2}}\left(\frac{3}{5}x\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}(5x)' = \frac{3}{5\sqrt{1-\frac{9}{25x^2}}} - \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

5. $f(x) = \arccos\sqrt{1-e^{2x}}$

Функция является сложной обратной тригонометрической. Введем промежуточный аргумент $u = \sqrt{1-e^{2x}}$. Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$f'(x) = \left(\arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot \left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'.$$

Промежуточный аргумент является также сложной функцией. Введем и для него новый промежуточный аргумент $u = 1 - e^{2x}$.

Для дифференцирования нужно воспользоваться формулой

$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

$$f'(x) = \left(arccos\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot \left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-1+e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot (1-e^{2x})' =$$
$$-\frac{1}{e^x}\frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}(-2e^x) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Практическое занятие №11

Составление уравнения касательной и нормали. Определение экстремумов функции. Вычисление наибольшего и наименьшего значений функции на заданном отрезке

Цель работы: Научиться составлять уравнение касательной к данной кривой в точке касания; находить угловой коэффициент касательной, проведенный к кривой. Научиться применять производную для исследования функции.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- Составлять уравнение касательной и находить её угловой коэффициент;
- использовать производную для изучения свойств функций и построения графиков;
- применять производную для проведения приближенных вычислений, решать задачи прикладного характера на нахождение наибольшего и наименьшего значения.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y = -x^2 + x$ в точке $x_0 = -2$
2. Найдите угол наклонена к оси касательной, проведенной к кривой $y = x^3$ в точке $x_0 = -2$
3. Составьте уравнение касательной к кривой $y = \sin 3x$ в точке $\left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$.
4. Исследуйте функцию на монотонность:
   $f(x) = x^5 - x^3 - 2x$
5. Найдите экстремумы функции: $f(x) = x^4 - 4x^3$
6. Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы: $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

7. Найдите промежутки выпуклости функции:
$f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 + 100$

Краткие теоретические сведения:

Алгоритм нахождения экстремумов функции и интервалов ее монотонности с помощью первой производной

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.

2. Найти производную функции $f'(x)$.

3. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.

4. Исследовать характер изменения функции $f(x)$ и знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$.

5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

Помни: критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x)<0$, от промежутка, в котором $f'(x)>0$, и точка максимума - в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0, знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

6. Вычислить значения функции в точках экстремума.

7. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

Алгоритм нахождения выпуклостей функции и точек перегиба:

1. Находим вторую производную.
2. Находим точки, в которых $f''(x) = 0$ или не существует.
3. Исследуем знак второй производной слева и справа от найденных точек и делаем вывод об интервалах выпуклости и о наличии точек перегиба.
4. Находим значение функции в точках перегиба.

Порядок выполнения работы:

1. Значение производной функции $y = f(x)$ при $x = x_0$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в её точке с абсциссой x_0, т.е. $k' = y'(x_0) = f'(x_0) = \tan \propto$
где $\propto$-угол между касательной к кривой в точке $M_0(x_0; y_0)$ и положительным направлением оси 0_x.

2. Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке имеет вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

3. Направление кривой в каждой точке определяется направление касательной к ней в этой точке, поэтому для нахождения угла наклонной кривой в данной точке надо вычислить угол между касательной, проведенной в этой точке, и осью.

Ход работы:

1. Найти угол наклона к оси O_x касательной проведенной к кривой $y = \sin x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$

-найдем производную функцию $y = \sin x$ $y' = \cos x$

-найдем значение производной в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$ $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

-тангенс угла наклона касательной в данной точке равен $k = tg \propto$, откуда $\propto = arc\,\mathrm{tg}\frac{1}{2} \approx 26{,}6°$

2. Под какими углами парабола $y = x^2 + x$ пересекает ось O_x ?

-Найдем точки пересечения параболы с осью O_x, решив систему

$$\begin{cases} y = x^2 + x \\ y = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} (-1; 0) \\ (0; 0) \end{cases}$$

-Парабола пересекает ось O_x в точках $\mathrm{A}(1; 0); O(0; 0)$. Найдём угловые коэффициенты касательных к параболе в этих точках

$$y' = (x^2 + x) = 2x + 1; k(-1) = 2(-1) + 1 = -1\,, k(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

- вычислили углы $\propto_1$ $и$ $\propto_2$, образуемые касательными в точках пересечения параболы с осью O_x: $tg \propto_1 = -1, \propto_1 = 135°; tg \propto_2 = 1, \propto_2 = 45°$

3. Составьте уравнение касательной к кривой $y = 3x^2 - x$ в точке $x_0 = -1$

-найдём производную кривой в точке x_0

$$y' = (3x^2 - x)' = 6x - 1\,; y'(-1) = 6(-1) - 1 = -7$$

-найдем координату точки касания:

$$y(-1) = 3(-1) - (-1) = 4; M(-1; 4)$$

-поставим в формулу уравнения касательной:

$$y - 4 = -7(x + 1)$$

$$y - 4 = -7x - 7$$

$$7x + y + 3 = 0 - \textit{уравнение касательной}$$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Практическое занятие №12

Применение производной к исследованию функций и для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах

Цель работы: Научиться применять производную функции при решении задач.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– находить наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке;

– решать задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, таблица производных, конспекты лекций.

Задание:

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке :$a)[-1; 1]$; $б)$ $[0; 3]$.

2. Имеется проволока длиной a метров. Требуется оградить этой проволокой прямоугольный участок земли, одна сторона которого примыкает к стене заводского здания, так, чтобы площадь огороженного участка была наибольшей.

Краткие теоретические сведения:

Для отыскания наименьшего и наибольшего значения функции, дифференцируемой внутри отрезка и непрерывной на его концах, следует найти все критические точки функции, лежащие внутри отрезка, вычислить значения функции в этих точках и на концах отрезка, а затем из всех полученных таким образом чисел выбрать наименьшее и наибольшее.

Порядок выполнения работы:

1. Находим критические точки функции.
2. Проверяем, какие из найденных критических точек лежат внутри заданного отрезка.
3. Находим значения функции на концах отрезка и в тех критических точках, которые попадают в этот отрезок.
4. Из всех полученных значений функции выбираем наименьшее и наибольшее.

Ход работы:

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4$ на промежутке :$a)[-2; -0{,}5]$;$б)$ $[1; 3]$.

Решение.

Находим критические точки функции.

$f^{/}(x) = (-2x^3 - 3x^2 + 4)^{|}$=$-x^2 - 6x = -6x(x + 1)$;

$f^{/}(x) = 0$; $-6x(x + 1)$=0; $x = 0$ *и* $x = -1$. получили две критические точки: $x = 0$ *и* $x = -1$.

a) *В промежутке* $[-2; -0{,}5]$ лежит одна из критических точек:*x*= -1.

Так как $f(-2) = 8, f(-1) = 3. f(-0{,}5) = 3{,}5,$ то наименьшее значение функция $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4$ достигает в точке $x = -1$ и равно 3, а наибольшее - в точке $x = -2$ и равно 8.. Кратко это можно записать так: $\min_{[-2;-0{,}5]} f(x) = f(-1) = 3.\max_{[-2;-0{,}5]} f(x)$=$f(-2) = 8$.

б) Отрезку $[1; 3]$ не принадлежит ни одна из критических точек, поэтому найдём значения функции на концах отрезка: $f(1) = -2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = -1. [1; 3]$;$f(3) = -2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 = -77.$. Кратко это можно записать так: $\min_{[\ \ |1;3]} f(x) = f(3) = -7; .\max_{[1;3]} f(x)$=$f(1) = -1$.

2. Число 86 представлено в виде суммы двух слагаемых так, что их произведение максимально. Найдите эти слагаемые.

Решение. Пусть заданное число представлено в виде суммы двух слагаемых x *и* y,т.е.86= $x + y$. Выразим второе слагаемое через *x:*

*y=86-x.*Запишем произведение этих чисел в виде функции от *x*:$f(x) = x \cdot (86 - x)$ Найдём значение x, при котором функция

$f\ (x) = x \cdot (86 - x)$ достигает максимума..Найдём производную$f^{/}(x)$ и приравняем её нулю. $f^{/}(x)$ =$(x \cdot (86 - x))^{/} =$ $(86x - x^2)^{/}$=$86 - 2x = 2(43 - x)$,

$$2(43 - x) = 0, x = 43.$$

Определим второе слагаемое: $y = 86 - x = 86 - 43 = 43$.

Ответ: $x = 43$; $y = 43$.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 4.3 Интеграл и его приложения

Практическое занятие №13

Вычисление неопределённых интегралов методом замены переменных и с помощью интегрирования по частям

Цель работы: Научиться интегрировать функции, используя различные методы интегрирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования, методом подстановки;

- находить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Найдите неопределенные интегралы:

1) $\int (8x^4 - 6x^2 + 2x - 3)dx$

2) $\int \frac{3x^4+2x^2-3x+7}{x^2}dx$

3) $\int \cos(10x-5)\,dx$

4) $\int 3^{4x^2} x dx$

5) $\int \frac{5dx}{25+16x^2}$

6) $\int \frac{x^2dx}{(1-2x^3)^2}$

7) $\int \frac{2x^4-4x^2-3x-1}{\sqrt[3]{x}}dx$

8) $\int (x^2+5x+7)\cdot lnxdx;$

9) $\int e^{2x}cos3xdx;$

10) $\int (x^2+4x+3)e^{2x}dx.$

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, приведите интеграл к табличным формулам. Проинтегрируйте.
3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то введите новую переменную, найдите ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Найдите полученный интеграл. В случае неопределенного интеграла вернитесь к старой переменной.
4. Если интеграл нельзя найти вышеуказанными способами, то примените формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$. Этот метод заключается в том, что подынтегральное выражение представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей *U* и *dV*. Затем, после нахождения *dU* и *V*, используйте формулу интегрирования по частям.
   -Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)sinkxdx$, $\int P(x)coskxdx$, где *P*(*x*)- многочлен, *k*- число. Удобно положить $U = P(x)$,а все остальные множители принять за *dV*.
   -Интегралы вида $\int P(x)arcsinxdx$, $\int P(x)arccosxdx$, $\int P(x)lnxdx$, $\int P(x)arctgxdx$ $\int P(x)arcctgxdx$.

Удобно положить $P(x)dx = dV$, а остальные множители принять за *U*.

- Интегралы вида $\int e^{ax}sinbxdx, \int e^{ax}cosbxdx$, где *a* и *b* числа. За *U* можно принять функцию $U = e^{ax}$.

Ход работы: Найти интегралы:

1) $\int \frac{6x^4-5x^2+3x+4}{x^2}dx$

Чтобы найти этот интеграл, нужно сначала привести подынтегральное выражение к табличному виду. Для этого применяем почленное деление:

$$\int \frac{6x^4 - 5x^2 + 3x + 4}{x^2} dx$$
$$= \int \left(\frac{6x^4}{x^2} - \frac{5x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{4}{x^2}\right) dx$$
$$= \int \left(6x^2 - 5 + \frac{3}{x} + 4x^{-2}\right) dx$$
$$= 6 \int x^2 dx - 5 \int dx$$
$$+ 3 \int \frac{dx}{x} + 4 \int x^{-2} dx = \frac{6x^3}{3} - 5x + 3\ln|x| + \frac{4x^{-1}}{-1} + C = 2x^3 - 5x + 3\ln|x| - \frac{4}{x} + C$$

2) $\int \frac{15x^2dx}{(1-x^3)^4}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int \frac{15x^2dx}{(1-x^3)^4} = \begin{bmatrix} 1 - x^3 = t \\ d(1-x^3) = dt \\ -3x^2dx = dt \\ x^2dx = -\frac{dt}{3} \end{bmatrix} = \int \frac{15dt}{-3t^4} = -5\int t^{-4}dt = -5\frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{5}{3t^3} + C = \frac{5}{3(1-x^3)^3} + C$$

3) $\int (x^3 - 4x) lnx \cdot dx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится ко второму виду, поэтому $U = lnx,\ dV = (x^3 - 4x)dx$.

$$dU = \frac{1}{x}dx, \qquad V = \int (x^3 - 4x)dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int (x^3 - 4x) lnx \cdot dx = lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \int \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\frac{1}{x}dx =$$

$$lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \int \left(\frac{x^3}{4} - 2x\right) dx = lnx\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \frac{x^4}{16} + x^2 + C$$

4) $\int (x^2 - 2x) cos4xdx$

Этот интеграл можно найти с помощью метода интегрирования по частям, он относится к первому виду, поэтому $U = x^2 - 2x,\ dV = cos4xdx$.

$$dU = (2x - 2)dx, \qquad V = \int cos4xdx = \frac{1}{4}sin4x$$

$$\int (x^2-2x)\cos 4x\,dx = (x^2-2x)\frac{1}{4}sin4x - \int \frac{1}{4}sin4x(2x-2)\,dx =$$

$$(x^2-2x)\frac{1}{4}sin4x - \frac{1}{4}\int sin4x(2x-2)dx = \frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x - \frac{1}{2}\int sin4x(x-1)dx =$$

Чтобы найти оставшийся интеграл, снова применяем формулу интегрирования по частям.

$U = x-1,\ dV = sin4xdx.$

$$dU = dx, \qquad V = \int sin4xdx = -\frac{1}{4}cos4x$$

$$= \frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x - \frac{1}{2}((x-1)\left(-\frac{1}{4}cos4x\right) - \int -\frac{1}{4}cos4xdx =$$

$$\frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x - \frac{1}{2}((x-1)\left(-\frac{1}{4}cos4x\right) + \frac{1}{4}\int cos4xdx =$$

$$= \frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x + \frac{1}{8}((x-1)(cos4x) - \frac{1}{8}\int cos4xdx =$$

$$\frac{1}{4}(x^2-2x)sin4x + \frac{1}{8}((x-1)(cos4x) - \frac{1}{32}sin4x + C$$

Форма предоставления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Практическое занятие №14
Вычисление определённых интегралов различными методами

Цель работы: Научиться находить определенные интегралы, используя различные методы интегрирования.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- вычислять определенные интегралы различными методами;

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблица интегралов, конспекты лекций, учебники.

Задание:

Вычислите определенные интегралы:

1. $\int_{-2}^{3}(4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)dx$

1. $\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$
2. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{3\sqrt{1-x^2}}$
3. $\int_{-2}^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{sinx} cosxdx$
5. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{dx}{sin^2\frac{x}{3}}$

Порядок выполнения работы:

1. Записать задание и определить, каким из методов интегрирования необходимо воспользоваться.
2. Если интеграл можно найти методом непосредственного интегрирования, то, используя свойства интегралов, привести интеграл к табличным формулам. Проинтегрировать. Вычислить значение определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.

3. Если интеграл можно найти методом подстановки, то ввести новую переменную, найти ее дифференциал. После введения новой переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным. Если интеграл определенный, то необходимо вычислить новые пределы интегрирования. Найти полученный интеграл.

Ход работы:

1) $\int_{-1}^{3}(4\,x^3 - 3x^2 + 2x + 5)dx$

$\int_{-1}^{3}(4x^3 - 3x^2 + 2x + 5)dx = 4\int_{-1}^{3} x^3 dx - 3\int_{-1}^{3} x^2 dx + 2\int_{-1}^{3} xdx + 5\int_{-1}^{3} dx = x^4 - x^3 + x^2 + 5x|_{-1}^{3} =$
$3^4 - 3^3 + 3^2 + 5\cdot 3 - (1 + 1 + 1 - 5) = 81 - 27 + 9 + 15 + 2 = 80$

2) $\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_0^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2} = \frac{5}{4}\int_0^{0,4} \frac{dx}{1+\frac{25}{4}x^2} == \frac{5}{4}\int_0^{0,4} \frac{dx}{1+\left(\frac{5}{2}x\right)^2} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}x = t \\ \frac{5}{2}dx = dt \\ dx = \frac{2}{5}dt \\ x_H = 0 \quad t_H = 0 \\ x_B = 0,4 \ t_B = 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{5}{4}\cdot\frac{2}{5}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} arctgt|_0^1 = \frac{1}{2}(arctg1 - arctg0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinxdx}{cos^4 x}$

Этот интеграл можно найти с помощью метода подстановки. Введем новую переменную.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinxdx}{cos^3x} = \begin{bmatrix} cosx = t \\ dcosx = dt \\ -sinxdx = dt \\ sinxdx = -dt \\ x_H = 0 \;\; t_H = cos0 = 1 \\ x_B = \frac{\pi}{3} \;\; t_B = cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \int_{1}^{0,5} \frac{-dt}{t^3} = -\frac{t^{-2}}{-2}\Big|_1^{0,5} = \frac{1}{2t^2}\Big|_1^{0,5} = \frac{1}{2\cdot 0,25} - \frac{1}{2} = 2 - 0,5 = 1,5$$

Форма представления результата: выполненная работа

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Практическое занятие №15

Построение криволинейной трапеции. Применение определённого интеграла к вычислению площадей плоских фигур и вычислению объёмов

Цель работы: Научиться вычислять площади фигур и объемы тел, используя определенные интегралы

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить интеграл
- вычислять в простейших случаях площади и объемы с использованием определенного интеграла.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$a)\quad y = -x^2 + 4,\ y = 0$

$b)\quad y = x^2,\ y = x^3$

$c)\quad y = e^x,\ y = e^{-x},\ y = 4$

2.Вычислить объем тела

$y = x^2,\ y = 1,\ вокруг\ оси\ OY$

Порядок выполнения работы:

1) построить графики функций
2) найти область, ограниченную этими графиками
3) составит определенный интеграл, для нахождения площади найденной области

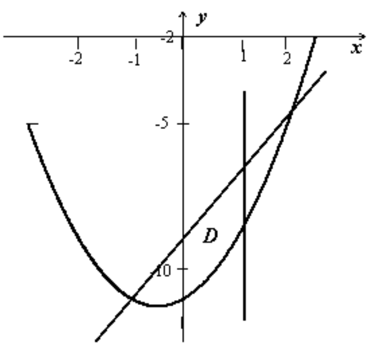
Ход работы:

Пример 1: Найти площадь области **D**, ограниченной кривыми **y** = **x**^{2} + **x** + 11, **y** = 2 **x** - 9, при условии,

x<=1

$$D: \begin{cases} y = x^2 + x - 11, \\ y = 2x - 9, \\ x \le 1. \end{cases}$$

При решении таких задач следует обязательно изобразить исследуемый геометрический объект. Для определения нижнего предела интегрирования надо найти точку пересечения кривых; уравнение **x**^{2} + **x** + 11 = 2 **x** - 9 имеет два корня: **x** = -1 и **x** = 2. Подходящий корень - **x** = -1. Область ограничена сверху параболой, снизу - прямой, справа - прямой **x** = 1, крайняя левая точка - **x** = -1, поэтому



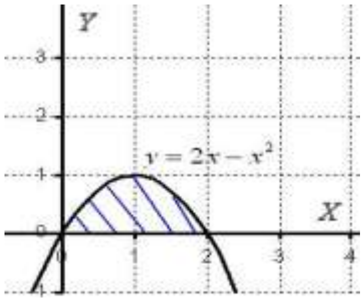
$$S(D) = \int_{-1}^{1}\left[(2x-9)-(x^2+x-11)\right]dx = \int_{-1}^{1}(2-x^2+x)dx = \left(2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \left(2-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-\left(-2+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{10}{3}.$$

Если область имеет более сложную структуру, её следует разбить на простые части .

Пример 2

Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$ вокруг оси OX.

Решение: Как и в задаче на нахождение площади, **решение начинается с чертежа плоской фигуры**. То есть, на плоскости XOY необходимо построить фигуру, ограниченную линиями $y = 2x - x^2$



Искомая плоская фигура заштрихована синим цветом, именно она и вращается вокруг оси OX. В результате вращения получается такая немного яйцевидная летающая тарелка, которая симметрична относительно оси OX.

Объем тела вращения можно вычислить по формуле:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Вычислим объем тела вращения, используя данную формулу:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi\int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \pi \cdot \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - 0\right) = \frac{16\pi}{15}$$

Ответ: $V = \frac{16\pi}{15} ед^3. \approx 3{,}35\, ед^3.$

Форма представления результата: выполненное задание

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Тема 5.1 Вероятность. Основные теоремы теории вероятностей

Практическое занятие №16

Вычисление вероятностей сложных событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности и формула Бернулли

Цель работы: Научиться находить вероятность событий, используя формулы комбинаторики.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

-вычислять число исходов, благоприятствующих наступлению рассматриваемого события, используя формулы комбинаторики;

- вычислять вероятность события по классическому определению вероятности**.**

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Готовясь к докладу, студент выписал из книги цитату, но, забыв номер страницы, на которой она находилась, написал номер наудачу. Какова вероятность того, что студент записал нужный номер, если он помнит, что номер выражается двузначным числом?

2. В ящике 15 деталей, среди которых 10 окрашены. Сборщик наудачу выбрал 3 детали. Какова вероятность того, что выбранные детали оказались окрашенными?

3. Имеется 8 карточек. Одна сторона каждой из них чистая, а на другой написаны буквы :К,И,Р,Д, А,Н,З,П. Карточки кладут на стол чистой стороной вверх, перемешивают, а затем последовательно одну за другой переворачивают. Какова вероятность того, при последовательном появлении букв будет составлен слово ПРАЗДНИК?

4. Цепь состоит из независимых блоков, соединенных в систему с одним входом и одним выходом.

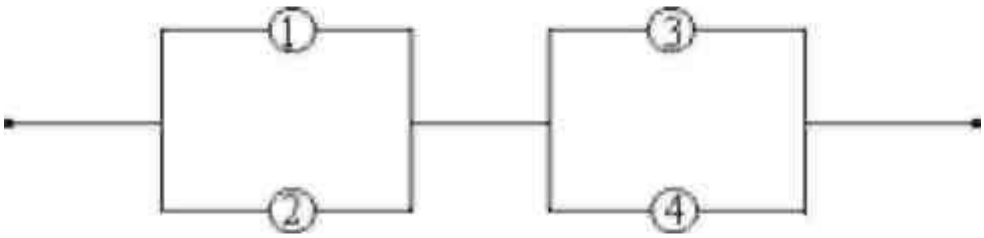


рис. 1

Выход из строя за время Т различных элементов цепи — независимые события, имеющие следующие вероятности: $q_1=0,1;\ q_2=0,2;\ q_3=0,3;\ q_4=0,4.$ Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Найти надежность системы/

Краткие теоретические сведения:

Вероятностью события А называется отношение числа m случаев, благоприятствующих его появлению, к общему числу всех несовместных равновозможных и образующих полную группу событий.

Такое определение вероятности называют классическим. Вероятность события обозначается Р(А) и вычисляется по формуле: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Вероятность появления события заключена в пределах от 0 до 1: $0 \le P(A) \le 1$

При решении задач на вычисление вероятности применяются формулы для подсчета числа комбинаций из данных элементов:

- число перестановок вычисляется по формуле: $P_n = n!$

- число размещений из n элементов по m элементов в каждом вычисляется по формуле:
$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

- число сочетаний из n элементов по m элементов в каждом вычисляется по формуле:
$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\cdot m!}$

Надежность каждого элемента системы электроснабжения можно характеризовать вероятностью рабочего состояния p и вероятностью отказа q. Если не учитывать плановые простои (ремонты), то можно считать, что элементы в любой момент времени находятся в одном из этих состояний. Тогда сумма вероятностей этих состояний равна 1: $p + q = 1$.

Для группы из двух элементов возможны следующие сочетания:

1. оба элемента в рабочем состоянии;
2. первый элемент в вынужденном простое, второй в рабочем состоянии;
3. первый элемент в рабочем состоянии, второй в вынужденном простое;
4. оба элемента в вынужденном простое.

Вероятности этих состояний можно найти, воспользовавшись теоремой умножения вероятностей.
Так при **последовательном соединении двух элементов** с надежностью каждого p_1 и p_2 надежность всей схемы определяется как $P = p_1 \cdot p_2$
Другими словами ***схема работает, если работают оба элемента. При отказе одного (любого) из них схема работать не будет (ток через цепь не пойдет).***
Вероятность отказа **для последовательного соединения**
$P = 1 - q_1 q_2$ (для двух элементов).
$P = 1 - q_1 q_2 \cdot \ldots q_n$ (для n –элементов).

При **параллельном соединении двух элементов** с надежностью каждого p_1 и p_2 надежность всей схемы определяется как $P = p_1 . p_2 + p_1 \cdot q_2 + p_2 q_1$
Пользуясь формулой для вероятности появления хотя бы одного события, надежность схемы параллельного соединения записывают в виде $P = 1 - q_1 q_2$.

Другими словами ***схема работает, если работают оба элемента, но также она работает, если выйдет из строя и какой либо один из элементов.***

Порядок выполнения работы:

1. Определите событие А, вероятность которого нужно вычислить.
2. Просчитайте общее число (n) возможных исходов.
3. Просчитайте число исходов (m), благоприятствующих наступлению события A.
4. Используйте формулу для вычисления вероятности определённого события. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Ход работы:

1.Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры и набрал их наудачу, помня . что они различны. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение:

Событие А- «номер набран верно».

Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Всего имеется 10 цифр, т.е. число элементов равно 10; в каждое соединение входит по 3 цифры; порядок цифр (элементов) существенен при наборе номера, значит, нужно найти число размещений из 10 элементов по 3 по формуле:

$A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!} = 720$. Итак, n=720

Число m=1, т.к. только один набор из трёх цифр является нужным. Значит,

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$

2.Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 чёрных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся чёрными?

Решение:

Событие А- «оба шара окажутся чёрными».

Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов

(12+8) по два: n= $C_{20}^{2} = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20!}{2!\cdot 18!} = \frac{20\cdot 19\cdot 18!}{1\cdot 2\cdot 18!}$=190.

Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно числу сочетаний из 8 элементов (8 черных шаров) по два: n= $C_{8}^{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!\cdot 6!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6!}{1\cdot 2\cdot 16!}$=28

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{28}{190} \approx 0{,}147$

3.На пяти карточках разрезной азбуки написаны буквы А,З,К,О, М. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того. Что получится слово ЗАМОК?

Решение: Событие А - «получится слово ЗАМОК».

Число n-общее число исходов испытания получим, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число возможных случаев n равно числу перестановок из 5 элементов (букв): n=$P_5 = 5!$=5·4·3·2·1=120.

Число случаев m, благоприятствующих событию А, равно 1, т.к. требуется составить слово с буквами, расставленными в определённом порядке. А эти буквы различны.

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$

4. Цепь состоит из независимых блоков, соединенных в систему с одним входом и одним выходом.

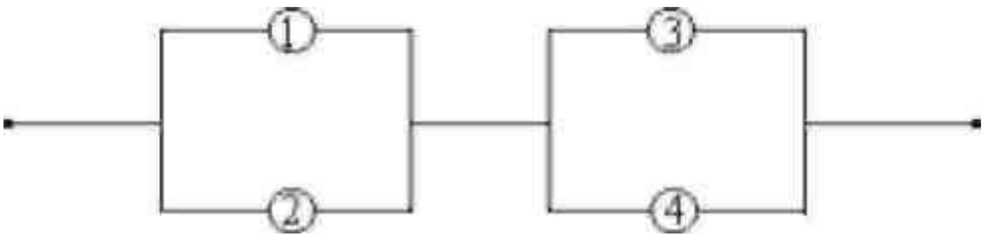


рис. 1

Выход из строя за время Т различных элементов цепи — независимые события, имеющие следующие вероятности: $q_1=0{,}1;\ q_2=0{,}2;\ q_3=0{,}3;\ q_4=0{,}4.$ Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Найти надежность системы.

Решение:

Событие А – система надежна.

Событие A_i – i-й блок работает безотказно.

Элементы 1 и 2 соединены параллельно, и элементы 3 и 4 соединены параллельно, а между собой они соединены последовательно, тогда используя формулы, получим

$$P(A)=(1-q_1 q_2)\cdot(1-q_3 q_4)=(1-0,1\cdot 0,2)\cdot(1-0,3\cdot 0,4)=(1-0,02)\cdot(1-0,12)=0,98\cdot 0,88=0,8624.$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

– «Отлично» - умения сформированы, все задания выполнены правильно, без арифметических ошибок, решение оформлено аккуратно, с необходимыми обоснованиями.

– «Хорошо» - некоторые умения сформированы недостаточно, все задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками. Безошибочно выполнено 80-89 % всех заданий.

– «Удовлетворительно» - необходимые умения в основном сформированы, большинство заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки. Безошибочно выполнено 70-79 % всех заданий.

– «Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Безошибочно выполнено менее 70% всех заданий.

Тема 5.2 Основы математической статистики

Практическое занятие №17

Составление статистического распределения выборки, построение полигона и гистограммы

Цель работы: Формирование умения составлять статистическое распределение выборки.

Выполнив работу, Вы будете уметь:

- составлять статистическое распределение выборки;
- выполнять построение полигона и гистограммы.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. Построить полигоны частот и относительных частот по распределению выборки:

x_i	2	4	7	8	9	12

n_i	p_1^2	$2p_2$	p_2	p_2^2	p_3	$3p_3$

1. Постройте гистограммы частот и относительных частот по распределению выборки:

№ интервала	Интервал, $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала, n_i
1	3 – 5	p_1
2	5 – 7	$2p_2$
3	7 – 9	$3p_3$
4	9 – 11	p_1^2
5	11 – 13	$2p_2^2$
6	13 – 15	$3p_3^2$
7	15 – 17	p_1+p_2

3. Для генеральной совокупности, заданной распределением:

x_i	5	10	15	20	25	30	35
N_i	p_1	$3p_1$	p_2	$2p_2$	p_2^2	$2p_3$	$2p_3^2$

Найдите генеральную среднюю, генеральную дисперсию, генеральное стандартное отклонение, моду, медиану и размах.

4.Из генеральной совокупности сделана выборка, заданная распределением:

x_i	2	4	6	8	10	12	14
n_i	p_2	$2p_2$	p_1	p_1^2	p_3	$2p_3$	p_2+p_3

Найти выборочную среднюю выборочные дисперсию и стандартное отклонение. Обратите внимание: p_1 = числу букв в Вашем имени;p_2= числу букв в Вашей фамилии;p_3= числу букв в имени Вашего отца.

Порядок выполнения работы:

1Прочитав условие предложенной задачи,по конспекту лекции найдите соответствующие формулы.

2Примените лекционный теоретический материал для решения каждой задачи.

3 В случае необходимости представить геометрическую интерпретацию числовых характеристик выборки.

Ход работы:

1. Задано распределение частот выборки:

x_i	2	6	12	15
n_i	3	10	7	5

Составить распределение относительных частот.

Определим сначала объем выборки:

$n = 3 + 10 + 7 + 5 = 25.$

Найдем относительные частоты по формуле $w_i = \dfrac{n_i}{n}$:

$w_1 = \dfrac{3}{25} = 0{,}12$; $w_2 = \dfrac{10}{25} = 0{,}40$; $w_3 = \dfrac{7}{25} = 0{,}28$; $w_4 = \dfrac{5}{25} = 0{,}20$.

Следовательно,

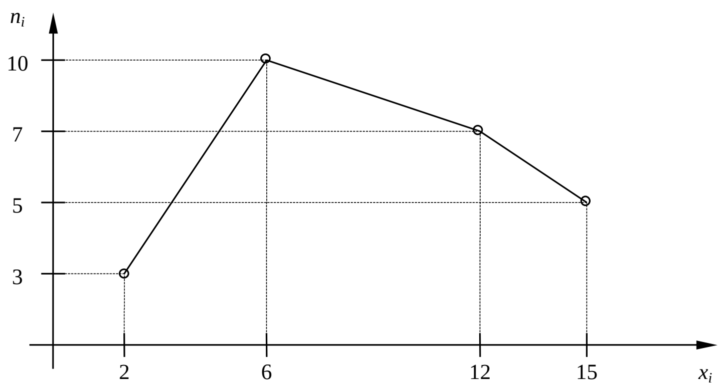
x_i	2	6	12	15
w_i	0,12	0,40	0,28	0,20

.

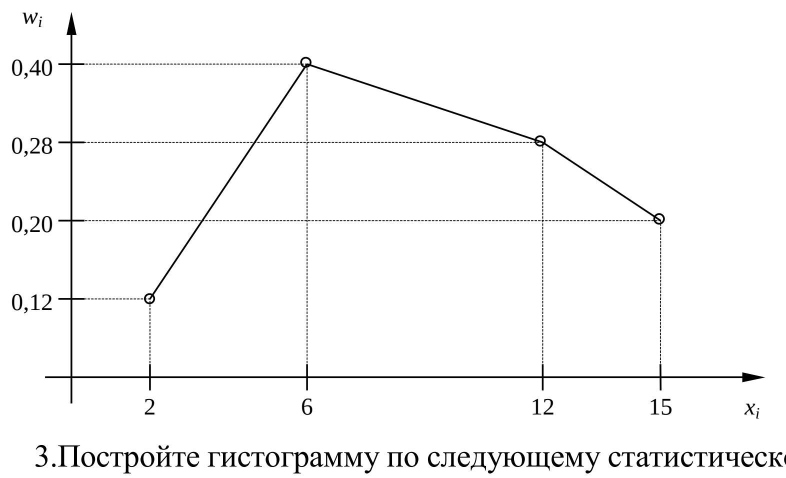
Контроль: $0{,}12 + 0{,}40 + 0{,}28 + 0{,}20 = 1$.

2.. По результатам примера 1 построить полигоны частот и относительных частот.

Решение. Отобразив на плоскости точки с координатами (x_i, n_i) и соединив их отрезками, получим полигон частот:



Аналогично построим полигон по точкам (x_i, w_i):



3.Постройте гистограмму по следующему статистическому распределению:

№ интервала	Интервал длиной h=5	Сумма частот вариант n_i
1	5 – 10	4
2	10 – 15	6
3	15 – 20	16

4	20 – 25	36
5	25 – 30	24
6	30 – 35	10
7	35 – 40	4

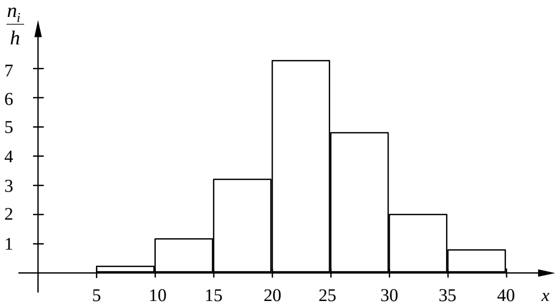
Решение. Прежде всего, определим объем выборки:

$n = 4+6+16+36+24+10+4=100$.

По известным суммам частот вариант рассчитаем плотность частоты по интервалам:

№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$	№ интервала	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$
1	0,2	5	4,8
2	1,2	6	2,0
3	3,2	7	0,8
4	7,2		

Изобразим полученный результат:



4. Найдите статистические оценки генеральной совокупности, заданной следующим вариационным рядом:

варианта x_i	2	4	5	6
частота N_i	8	9	10	3

Решение. Определим объем совокупности:

$N_Г = 8+9+10+3=30$.

Найдем генеральную среднюю:

$$\overline{X}_Г = \frac{8\cdot 2+9\cdot 4+10\cdot 5+3\cdot 6}{30} = 4.$$

Для вычисления генеральной дисперсии используем формулу $D_Г = \overline{X_г^2} - \left(\overline{X}_Г\right)^2$. Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X_Г^2} = \frac{8\cdot 2^2+9\cdot 4^2+10\cdot 5^2+3\cdot 6^2}{30} = 17{,}8.$$

Таким образом, $D_Г = 17{,}8 - 4^2 = 1{,}8$.

Генеральное стандартное отклонение: $\sigma_Г = \sqrt{D_Г} = \sqrt{1{,}8} \cong 1{,}34$.

Обычно полученных результатов достаточно для практических задач. Однако можно получить дополнительные характеристики для более тонкой оценки генеральной совокупности. Приведем их:

Мода Mo : наибольшая частота

$Mo = 10$.

Медиана Me: вариационный ряд делится пополам в точке

$Me = 4{,}5$.

Размах вариации R: в примере $x_{\max} = 6; x_{\min} = 2$, поэтому

$R = 6 - 2 = 4$.

5. Из генеральной совокупности извлечена выборка

x_i	1	2	3	4	5
n_i	92	94	103	105	106

.

Найдите статистические характеристики выборки.

Решение. Определим объем выборки:

$n = 92 + 94 + 103 + 105 + 106 = 500$.

Выборочная средняя:

$$\overline{X}_B = \frac{92 \cdot 1 + 94 \cdot 2 + 103 \cdot 3 + 105 \cdot 4 + 106 \cdot 5}{500} = 1{,}82.$$

Определим среднюю квадратов:

$$\overline{X_B^2} = \frac{92 \cdot 1^2 + 94 \cdot 2^2 + 103 \cdot 3^2 + 105 \cdot 4^2 + 106 \cdot 5^2}{500} = 11{,}45.$$

Выборочная дисперсия:

$$D_B = \overline{X_B^2} - \left(\overline{X}_B\right)^2 = 11{,}45 - 1{,}82^2 \cong 8{,}14.$$

Выборочное стандартное отклонение:

$$\sigma_B = \sqrt{8{,}14} \cong 2{,}85.$$

6. . Определите мощность какого из множеств A = {1, 3, 5, 7, 9} или B = {2, 4, 6, 8} больше.
Решение. Понятие мощности конечных множеств позволяет сравнивать их по количеству элементов. Так, если A = {1, 3, 5, 7, 9}, а B = {2, 4, 6, 8}, то m (A) = 5, а m (B) = 4 и потому m (A) > m (B).

7. Пусть A есть отрезок [1, 3], B - отрезок [2, 4]; тогда объединением $A \bigcup B$ будет отрезок [1, 4], пересечением $A \bigcap B$ - отрезок [2, 3], разностью A\B - полуинтервал [1, 2), B\A - полуинтервал (3, 4].

8. Пусть A есть множество прямоугольников, B - множество всех ромбов на плоскости. Тогда $A \bigcap B$ есть множество всех квадратов, A\B - множество прямоугольников с неравными сторонами, B\A - множество всех ромбов с неравными углами.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.