Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет
им. Г.И. Носова»
Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор
/ С.А. Махновский
«27» февраля 2019 г.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ**

**по учебной дисциплине
ОПЦ.10 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
для студентов специальностей
специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование**

Квалификация: Разработчик web и мультимедийных приложений

Магнитогорск, 2019

ОДОБРЕНО:
Предметно-цикловой комиссией
«Информатика и вычислительная техника»
Председатель И.Г.Зорина
Протокол № 6 от 20.02.2019

Методической комиссией МпК
Протокол №5 от «21» февраля 2019г

Составитель:
преподаватель МпК ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»,
к.т.н., доцент В.Д. Тутарова

Методические указания по выполнению лабораторных работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Численные методы».

Содержание лабораторных работ ориентировано на формирование универсальных учебных действий, подготовку обучающихся к освоению программы подготовки специалистов среднего звена.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Состав и содержание лабораторных занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью лабораторных занятий является формирование учебных практических умений, необходимых в последующей учебной деятельности.

Ведущей дидактической целью лабораторных занятий является экспериментальное подтверждение и проверка существенных теоретических положений (законов, зависимостей).

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Численные методы» предусмотрено лабораторных занятий. В рамках лабораторного занятия обучающиеся могут выполнять одну или несколько лабораторных работ.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

– использовать основные численные методы решения математических задач;

– выбирать оптимальный численный метод для решения поставленной задачи;

– давать математические характеристики точности исходной информации и оценивать точность полученного численного решения;

– разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата;

Содержание лабораторных занятий ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессионального модуля программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению ***профессиональными компетенциями:***

ПК 1.1 – Формировать алгоритмы разработки программных модулей в соответствии с техническим заданием.

ПК 1.2 – Разрабатывать программные модули в соответствии с техническим заданием.

ПК 1.5 – Осуществлять рефакторинг и оптимизацию программного кода.

ПК 11.1 – Осуществлять сбор, обработку и анализ информации для проектирования баз данных.

А также формированию ***общих компетенций***:

ОК 1 – Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 2 – Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 4 – Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК 5 – Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 9 – Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 10 – Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языке.

Выполнение обучающихся лабораторных работ по учебной дисциплине «Численные методы» направлено на:

- *обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины.*

Лабораторные занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 ПЕРЕЧЕНЬ ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

Разделы/темы	Темы лабораторных занятий	Количество часов	Требования ФГОС СПО (уметь)
Тема 1. Основные понятия теории погрешностей вычислений.	Лабораторная работа №1 «Решение простейших задач на вычисление погрешностей»	**2**	У2, У3, У4, У01.1, У02.2, У05.4, У09.1, У09.2, У10.4
Тема 2. Численное решение СЛАУ	Лабораторная работа №2 «Решение систем линейных уравнений»	**6**	У1, У2, У3, У4, У01.1, У02.2, У05.4, У09.1, У09.2
Тема 3. Алгоритмы и методы поиска корней уравнения и решения нелинейных систем	Лабораторная работа №3 «Решение алгебраических и трансцендентных уравнений»	**6**	У1, У2, У3, У4, У01.1, У02.2, У05.4, У09.1, У09.2
Тема 4. Методы аналитического представления таблично заданной функции	Лабораторная работа №4 «Интерполирование функции».	**4**	У1, У2, У3, У4, У01.1, У02.2, У05.4, У09.1, У09.2
Тема 5. Алгоритмы и методы численного интегрирования и дифференцирования	Лабораторная работа №5 «Численное интегрирование и дифференцирование».	**4**	У1, У2, У3, У4, У01.1, У02.2, У05.4, У09.1, У09.2
Тема 6. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений	Лабораторная работа №6 «Численное решение дифференциальных уравнений».	**2**	У1, У2, У3, У4, У01.1, У02.2, У05.4, У09.1, У09.2
ИТОГО		**24**	

3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1. Основные понятия теории погрешностей вычислений.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

«РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ЗАДАЧ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ»

Цель: получить навыки определения основных источников погрешностей.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- выполнять округление чисел;
- определять абсолютную и относительную погрешности результата;
- вычислять погрешности результата различных арифметических операций над приближенными числами.

Материальное обеспечение: пакет прикладных программ Microsoft Office.

Задание:

а) определить, какое равенство точнее;

б) округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки; определить абсолютную погрешность результата;

в) найти предельные абсолютную и относительную погрешности приближенного числа, все цифры которого по умолчанию верные.

Варианты заданий:

1. а) $14/17 = 0{,}824$, $\sqrt{53} = 7{,}28$; б) 23,3748, $\delta = 0{,}27\%$; в) 0,645.
2. а) $7/3 = 2{,}33$, $\sqrt{58} = 7{,}62$; б) $13{,}5726 \pm 0{,}0072$; в) 4,8556.
3. а) $27/31 = 0{,}871$, $\sqrt{42} = 6{,}48$; б) 0,088748, $\delta = 0{,}56\%$; в) 71,385.
4. а) $23/9 = 2{,}56$, $\sqrt{87} = 9{,}33$; б) $4{,}57633 \pm 0{,}00042$; в) 6,8346.
5. а) $6/7 = 0{,}857$, $\sqrt{41} = 6{,}40$; б) 46,7843, $\delta = 0{,}32\%$; в) 7,38.
6. а) $12/7 = 1{,}71$, $\sqrt{47} = 6{,}86$; б) $0{,}38725 \pm 0{,}00112$; в) 0,00646.
7. а) $21/13 = 1{,}62$, $\sqrt{63} = 7{,}94$; б) 45,7832, $\delta = 0{,}18\%$; в) 3,6765.
8. а) $16/7 = 2{,}29$, $\sqrt{11} = 3{,}32$; б) $0{,}75244 \pm 0{,}00013$; в) 5,374.

9. а) $18/7 = 2{,}57$, $\sqrt{22} = 4{,}69$; б) 46,453, δ = 0,15%; в) 6,125.
10. а) $17/9 = 1{,}89$, $\sqrt{17} = 4{,}12$; б) 0,66385 ± 0,00042; в) 24,6.
11. а) $51/11 = 4{,}64$, $\sqrt{35} = 5{,}92$; б) 0,66385, δ = 0,34%; в) 0,543.
12. а) $19/12 = 1{,}58$, $\sqrt{12} = 3{,}46$; б) 4,88445 ± 0,00052; в) 4,633.
13. а) $13/7 = 1{,}857$, $\sqrt{7} = 2{,}65$; б) 2,8867, δ = 0,43%; в) 63,749.
14. а) $49/13 = 3{,}77$, $\sqrt{14} = 3{,}74$; б) 5,6483 ± 0,0017; в) 0,00858.
15. а) $5/3 = 1{,}667$, $\sqrt{38} = 6{,}16$; б) 3,7542, δ = 0,32%; в) 0,389.
16. а) $17/11 = 1{,}545$, $\sqrt{18} = 4{,}243$; б) 0,8647 ± 0,0013; в) 0,864.
17. а) $7/22 = 0{,}318$, $\sqrt{13} = 3{,}61$; б) 0,3944, δ = 0,15%; в) 21,7.
18. а) $13/17 = 0{,}765$, $\sqrt{31} = 5{,}57$; б) 3,6878 ± 0,0013; в) 8,74.
19. а) $50/19 = 2{,}63$, $\sqrt{27} = 5{,}20$; б) 0,85638, δ = 0,22%; в) 231,57.
20. а) $21/29 = 0{,}724$, $\sqrt{44} = 6{,}63$; б) 13,6853 ± 0,0023; в) 2,16.
21. а) $17/19 = 0{,}895$, $\sqrt{52} = 7{,}21$; б) 7,521, δ = 0,12%; в) 0,5748.
22. а) $6/11 = 0{,}545$, $\sqrt{83} = 9{,}11$; б) 3,7832 ± 0,0043; в) 2,678.
23. а) $16/19 = 0{,}842$, $\sqrt{55} = 7{,}416$; б) 17,356, δ = 0,11%; в) 0,5718.
24. а) $23/15 = 1{,}53$, $\sqrt{98} = 9{,}899$; б) 8,7432 ± 0,0023; в) 0,578.
25. а) $2/21 = 0{,}095$, $\sqrt{22} = 4{,}69$; б) 24,5641, δ = 0,09%; в) 4,478.
26. а) $12/11 = 1{,}091$, $\sqrt{68} = 8{,}246$; б) 0,5532 ± 0,0014; в) 3,4479.
27. а) $6/7 = 0{,}857$, $\sqrt{48} = 6{,}928$; б) 14,5841, δ = 0,17%; в) 0,421.
28. а) $15/7 = 2{,}14$, $\sqrt{10} = 3{,}16$; б) 4,5012 ± 0,0013; в) 1,4229.
29. а) $4/17 = 0{,}235$, $\sqrt{105} = 10{,}25$; б) 1,1341, δ = 0,12%; в) 2,401.
30. а) $7/15 = 0{,}467$, $\sqrt{30} = 5{,}48$; б) 6,7702 ± 0,0015; в) 11,1239.

Краткие теоретические сведения:

Выделим следующие основные источники погрешностей:

а) параметры, входящие в описание задачи, заданы неточно; соответствующую погрешность называют неустранимой (погрешность данных);

б) математическая модель описывает изучаемый объект приближенно с учетом основных, наиболее существенных факторов (погрешность математической модели);

в) численный алгоритм, применяемый для решения математической задачи, зачастую дает лишь приближенное решение (погрешность метода);

г) в процессе вычислений на компьютере промежуточные и конечные результаты округляются (вычислительная погрешность или погрешность округления). Методы, причисляемые к точным, не учитывают наличие вычислительной погрешности.

Часто первые два вида погрешности, объединяя в один, также называют неустранимой погрешностью.

Обозначив через I абсолютную величину погрешности результата, а через $I_н$, $I_м$ и $I_о$ – абсолютные величины неустранимой погрешности, погрешности метода и округления соответственно – нетрудно получить следующее соотношение:

Неравенство (1.1) дает оценку для погрешности результата. Из этого неравенства можно сделать важный вывод: полную погрешность результата нельзя сделать меньше, чем наибольшая из составляющих ее погрешностей.

Определение 1.1. *Приближенным значением* некоторой величины a называется число a_p , которое незначительно отличается от точного значения этой величины.

Пусть a – точное значение некоторой величины, а a_p – ее приближенное значение.

Определение 1.2. *Абсолютной погрешностью* Δ приближенного значения называется модуль разности между точным и приближенным значениями этой величины:

$$\Delta = |a - a_p| \qquad (1.2)$$

Пример 1.1. Если a = 20,25 и a_p = 20, то абсолютная погрешность = 0,25 .

Определение 1.3. Относительной погрешностью приближенной величины a_p называется отношение абсолютной погрешности приближенной величины к абсолютной величине ее точного значения:

$$\delta = \frac{|a-a_p|}{|a|} = \frac{\Delta}{|a|} \tag{1.3}$$

Это равенство можно записать в другой форме:

$$\Delta = |a|\delta \tag{1.4}$$

Пример 1.2. Пусть a = 20,25 и a_p =20, тогда относительная погрешность δ= 0,25/20 = 0,0125.

На практике, как правило, точное значение величины неизвестно. Поэтому вместо теоретических понятий абсолютной и относительной погрешностей используют практические понятия предельной абсолютной погрешности и предельной относительной погрешности.

Определение 1.4. Под предельной абсолютной погрешностью приближенного числа понимается всякое число Δ_a не меньшее абсолютной погрешности этого числа:

$$\Delta = \left|a - a_p\right| \le \Delta_a \tag{1.5}$$

Неравенство (1.5) позволяет для точного значения величины получить оценку

$$a_p - \Delta_a \le a \le a_p + \Delta_p \tag{1.6}$$

Часто неравенства (1.6) записывают в другой форме

$$a = a_p \pm \Delta_a = a_p(1 \pm \delta_a) \tag{1.7}$$

На практике в качестве предельной абсолютной погрешности выбирают наименьшее из чисел Δ_a , удовлетворяющих неравенству (1.5), однако это не всегда возможно.

Пример 1.3. Оценить предельную абсолютную погрешность приближенного значения a_p = 2,72 числа e, если известно, что е= 2,718281828459045.

Решение.

Очевидно, что $\left|a_p - e\right| < 0{,}01$. Следовательно, Δ_a = 0,01. Также справедливо неравенство $\left|a_p - e\right| = |2{,}720 - 2{,}71828\ldots| < 0{,}002$. Получаем другое значение абсолютной погрешности Δ_a = 0,002. Ясно, что следует выбрать наименьшее из найденных значений предельной погрешности, так как это позволит сузить диапазон (1.5), в котором находится точное значение изучаемой величины.

Определение 1.5. Предельной относительной погрешностью δ_a данного приближенного числа называется любое число, не меньшее относительной погрешности этого числа:

$$\delta \le \delta_a \tag{1.8}$$

Так как справедливо неравенство

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|} \le \frac{\Delta_a}{|a|} \quad ,$$

то можно считать, что предельные абсолютная и относительная погрешности связаны формулой

$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$ или $\Delta_a = |a|\delta_a$.

Пример 1.4. Пусть длина бруска измерена сантиметровой линейкой и получено приближенное значение a_p=251 см. Найти предельную относительную погрешность δ_a

Решение.

Так как сантиметровая линейка не содержит делений меньше сантиметра, то предельная абсолютная погрешность Δ_a = 1 см, а точное значение, a длины бруска находится в диапазоне 250 см < a < 252 см. Хотя точное значение a неизвестно, можно для относительной погрешности записать неравенство

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} = \frac{1}{250} = 0{,}004$$

т. е. считать, что δ_a=0,004 .

Если абсолютная погрешность Δ_a значительно меньше точного значения $|a|$, то относительную погрешность подразделяют приближенно как отношение абсолютной погрешности к приближенному значению:

$$\delta_a \approx \frac{\Delta_a}{|a_p|}, \Delta_a \approx |a_p|\delta_a. \quad (1.10)$$

Часто в формуле (1.10) вместо знака «≈» используют знак точного равенства «=». Относительную погрешность иногда задают в процентах.

Пример 1.5. Определить предельную относительную и абсолютную погрешности значения x=125±5% .

Решение.

Здесь δ_a =5% =0,05 и Δ_a =0,05 125=6,25 . В этом примере мы воспользовались формулой (1.10).

Значащие цифры

Определение 1.6. Значащими цифрами в записи приближенного числа называются:

все ненулевые цифры;

нули, содержащиеся между ненулевыми цифрами;

нули, являющиеся представителями сохраненных десятичных разрядов при округлении.

В следующих примерах значащие цифры подчеркнуты.

Пример 1.6. $\underline{2,305}$; 0,0$\underline{357}$; 0,00$\underline{1123}$; 0,035299879≈0,0$\underline{35300}$.

При округлении числа 0,035299879 до шести знаков после запятой получается число 0,035300, в котором последние два нуля являются значащими. Если отбросить эти нули, то полученное число 0,0353 не является равнозначным с числом 0,035300 как приближенным значением числа 0,035299879, так как погрешности указанных приближенных чисел отличаются!

Определение 1.7. Первые n значащих цифр в записи приближенного числа называются верными в узком смысле, если абсолютная погрешность числа не превосходит половины единицы разряда, соответствующего n -й значащей цифре, считая слева направо.

Наряду с данным определением иногда используется другое.

Определение 1.8. Первые n значащих цифр в записи приближенного числа называются верными в широком смысле, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, соответствующего n -й значащей цифре.

Пример 1.7. Определить верные цифры приближенного значения a_p =2,721 числа e , если известно, что e = 2,71828...

Решение.

Очевидно, что $|a_p - e| = |2{,}721 - 2{,}71828\ldots| < 0{,}003 < 0{,}005$. Следовательно, верными являются только три первые цифры (в узком и широком смысле), последнюю цифру можно отбросить, a_p = 2,72.

Пример 1.8. Пусть x =1,10253±0,00009. Верными являются первые четыре значащие цифры, а цифры 5 и 3 не удовлетворяют определению. В широком смысле верными являются первые пять цифр.

Пример 1.9. При записи следующих физических констант указаны три верные значащие цифры:

а) гравитационная постоянная γ=6,67 10^{11}Н, м^2/кг^2;

б) скорость света в вакууме c=3,00·10^8 , м/с;

в) постоянная Планка h =6,63·10^{34} , Дж с.

Замечание. Термин «верные значащие цифры» нельзя понимать буквально. Например, современное опытное значение скорости света в вакууме составляет c= 2,997925·10^8 , м/с. Очевидно, что ни одна значащая цифра в примере 1.9, не совпадает с соответствующей точной цифрой, но абсолютная погрешность меньше половины разряда, соответствующего последней значащей цифре в записи 3,00 10^8 :

$$|3{,}00\cdot10^8 - 2{,}997925\cdot10^8| < 0{,}003\cdot10^8 < 0{,}01\cdot10^8 / 2 = 0{,}005\cdot10^8 .$$

Правило округления чисел

Чтобы округлить число до n значащих цифр, отбрасывают все цифры, стоящие справа от n -й значащей цифры, или, если это нужно для сохранения разрядов, заменяют их нулями. При этом:

если первая отброшенная цифра меньше 5, то оставшиеся десятичные знаки сохраняют без изменения;

если первая отброшенная цифра больше 5, то к последней оставшейся цифре прибавляют единицу;

если первая отброшенная цифра равна 5 и среди остальных отброшенных цифр есть ненулевые, то к последней оставшейся цифре прибавляют единицу;

если первая из отброшенных цифр равна 5 и все отброшенные цифры являются нулями, то последняя оставшаяся цифра оставляется неизменной, если она четная, и увеличивается на единицу, если нет (правило четной цифры).

Это правило гарантирует, что сохраненные значащие цифры числа являются верными в узком смысле, т. е. погрешность округления не превосходит половины разряда, соответствующего последней оставленной значащей цифре. Правило четной цифры должно обеспечить компенсацию знаков ошибок.

Пример 1.10. Приведем примеры округления до четырех значащих цифр;

а) $3{,}1415926 \approx 3{,}142$;

$\Delta_a = |3{,}142 - 3{,}1415926| < 0{,}00041 < 0{,}0005$;

б) $1\,256\,410 \approx 1\,256\,000$;

$a = |1\,256\,000 - 1\,256\,410| < 500$;

в) $2{,}997925\cdot10^8 \approx 2{,}998\cdot10^8$;

$a = |2{,}998\cdot10^8 - 2{,}997925\cdot10^8| < 0{,}000075\cdot10^8 < 0{,}0005\cdot10^8$

Следующая теорема выявляет связь относительной погрешности числа с числом верных десятичных знаков.

Теорема 1.1. Если положительное приближенное число имеет n верных значащих цифр, то его относительная погрешность δ не превосходит величины 10^{1-n} , деленной на первую значащую цифру α_H

$$\delta \leq 10^{1-n}/\alpha_H \qquad (1.11)$$

Формула (1.11) позволяет вычислить предельную относительную погрешность

$$\delta_a = 10^{1-n}/\alpha_H \qquad (1.12)$$

Пример 1.11. Найти относительную и абсолютную погрешности приближенных чисел: а) 3,142, б) $2{,}997925\cdot10^8$.

Решение.

а) Здесь n = 4, $\alpha_н$ =3. Используем формулу (1.12) для оценки относительной погрешности:

$$\alpha = 10^{1-n}/\alpha_H = 0{,}001/3 \approx 0{,}00033.$$

Для определения абсолютной погрешности применим формулу (1.10):

$a \approx |a_p|\delta_a = 3{,}142\ 0{,}00033 \approx 0{,}001.$

б) Аналогично вычислим: n =7, $\alpha_н$ =2 , $\delta_a = 10^{1-n} / \alpha_н = 0{,}000001/ 2 = 0{,}0000005$;

$\alpha \approx |a_p|\delta_a = 2{,}997925\cdot10^8\cdot0{,}0000005 = 150$

Погрешности арифметических операций

Приведем правила вычисления погрешности результата различных арифметических операций над приближенными числами.

Относительно алгебраической суммы $u = x \pm y$ можно утверждать следующее.

Теорема 1.2. Предельная абсолютная погрешность суммы приближенных чисел равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых

$$\Delta_u=\Delta_x+\Delta_y \tag{1.13}$$

Из формулы (1.13) следует, что *предельная абсолютная погрешность суммы не может быть меньше предельной абсолютной погрешности наименее точного из слагаемых,* т.е. если в состав суммы входят приближенные слагаемые с разными абсолютными погрешностями, то сохранять лишние значащие цифры в более точных не имеет смысла.

Пример 1.12. Найти сумму приближенных чисел, все цифры которых являются верными в широком смысле, и ее предельную абсолютную и относительную погрешности $u = 0{,}259 + 45{,}12 + 1{,}0012$.

Решение. Предельные абсолютные погрешности слагаемых здесь равны соответственно 0,001; 0,01; 0,0001.

Суммирование производим, руководствуясь следующим правилом: выделим наименее точные слагаемые (в нашем примере это второе слагаемое) и оставим их без изменения;

остальные числа округлим по образцу выделенных, оставляя один или два запасных знака;

сложим данные числа, учитывая все сохраненные знаки;

полученный результат округлим до точности наименее точных слагаемых. Имеем

$$\Delta_u = 0{,}001 + 0{,}01 + 0{,}0001 = 0{,}0111;$$
$$= 0{,}259 + 45{,}12 + 1{,}0012 \approx 0{,}26 + 45{,}12 + +1{,}00 = 46{,}38 \pm 0{,}01.$$

Основной вклад в абсолютную погрешность результата здесь вносят предельные погрешности исходных данных, приведенные выше.

Теорема 1.3. Если все слагаемые в сумме имеют один и тот же знак, то предельная относительная погрешность суммы не превышает наибольшей из предельных относительных погрешностей слагаемых:

$$\delta_u \le \max\left(\delta_x, \delta_x, \dots, \delta_x\right) \tag{1.14}$$

При вычислении разности двух приближенных чисел $u = x - y$ ее абсолютная погрешность, согласно теореме 1.2, равна сумме абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого, т.е. $\Delta_u=\Delta_x+\Delta_y$,а предельная относительная погрешность.

$$\delta_u = \frac{\Delta_x+\Delta_y}{|x-y|} \tag{1.15}$$

Из формулы (1.15) следует, что если приближенные значения x и y близки, то предельная относительная погрешность будет очень большой.

Пример 1.13. Найти разность $u = x - y$ с тремя верными знаками, если $x = 12{,}1254 \pm 0{,}0001$, $y = 12{,}128 \pm 0{,}001$.

Решение.

Имеем 12,1254 – 12,128 = – 0,0026.

$$u = 0{,}0001 + 0{,}001 = 0{,}0011;$$
$$u = \frac{0{,}0011}{|-0{,}0026|} = 0{,}42;$$
$$x = \frac{0{,}0001}{|12{,}1254|} \approx 0{,}000008;$$

$$y=\frac{0{,}001}{|12{,}128|}\approx 0{,}00008;$$

Согласно этим результатам разность x-y имеет не более одной верной цифры и относительная погрешность очень велика по сравнению с относительными погрешностями операндов.

В некоторых случаях удается избежать вычисления разности близгих чисел с помощью преобразования выражения так, чтобы разность была исключена. Рассмотрим один из таких примеров.

Пример 1.14. Найти разность $\sqrt{4{,}05}-\sqrt{4}$ с тремя верными знаками.

Решение. Умножим и разделим на сопряженное. Получим

$$\sqrt{4{,}05}-\sqrt{4}=\frac{\left(\sqrt{4{,}05}-\sqrt{4}\right)\cdot\left(\sqrt{4{,}05}+\sqrt{4}\right)}{\sqrt{4{,}05}+\sqrt{4}}=\frac{4{,}05-4}{\sqrt{4{,}05}+\sqrt{4}}\approx\frac{0{,}05}{4{,}012461}\approx 0{,}01246$$
$$\approx 0{,}0125$$

Если представляется сложным заменить вычитание близких приближенных чисел сложением, то следует поступать так: если известно, что при вычитании должно пропасть m первых значащих цифр, а в результате требуется сохранить n верных цифр, тогда в уменьшаемом и вычитаемом следует сохранять $m+n$ верных значащих цифр:

$\sqrt{4{,}05}-\sqrt{4}\approx 2{,}012461-2\approx 0{,}0125$

Теорема 1.4. Предельная относительная погрешность произведения $u=x\cdot y$ приближенных чисел, отличных от нуля, равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей, т. е.

$$\delta_u=\delta_x+\delta_y\,. \tag{1.16}$$

В частности, если $u=k\cdot x$, где k – точное число, имеем $\Delta_u=|k|\cdot\Delta_x$, $\delta_u=\delta_x$.

Пример 1.15. Определить произведение приближенных чисел x=12,45 и y=2,13 и число верных значащих цифр в нем, если все написанные цифры сомножителей – верные в узком смысле.

Решение. По условию предельные абсолютные погрешности сомножителей равны $\Delta_x=\Delta_y=0{,}005$; $\delta_x=0{,}005/12{,}45$ □ $=0{,}0004$; $\delta_y=0{,}005/2{,}13=0{,}0023$. Тогда по теореме 1.4 имеем $\delta_u=\delta_x+\delta_y=0{,}0004+0{,}0023=0{,}0027\approx 0{,}003$. Вычислим произведение $12{,}45\cdot 2{,}13=26{,}5185$. u= $26{,}5185\cdot 0{,}003\approx 0{,}079\approx 0{,}08$. Таким образом, результат имеет три верных значащих цифры в широком смысле и может быть записан в виде

$=26{,}5\cdot(1\pm 0{,}003)$.

Теорема 1.5. Предельная относительная погрешность частного равна сумме предельных относительных погрешностей делимого и делителя.

Пример 1.16. Вычислить частное приближенных чисел x=12,45 и y=2,13 и число верных значащих цифр в нем, если все написанные цифры сомножителей – верные в узком смысле.

Решение. Предельная относительная погрешность частного по теореме 1.5 равна $\delta_u\approx 0{,}003$. Вычислим частное $12{,}45/2{,}13\approx 5{,}84507$.

u= $5{,}84507\cdot 0{,}003\approx 0{,}0175\approx 0{,}02$. Результат имеет две верных значащих цифры в узком смысле и может быть записан в виде

$=5{,}8\cdot(1\pm 0{,}003)$.

Погрешность произвольной функции

Пусть задана произвольная функция $u=f(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_1, x_2, ..., x_n$ – приближенные величины, а $\Delta_{x1}, \Delta_{x2}, \dots, \Delta_{xn}$ – их известные предельные абсолютные погрешности. Тогда предельная абсолютная погрешность результата – функции u – для малых Δ_{xi} вычисляется по формуле

$$\Delta_u=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta_{xi}\ \text{ в точке } (x_1, x_2, ..., x_n) \tag{1.17}$$

Как видно из формулы (1.17), для ее применения требуется, чтобы функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ была дифференцируемой по всем переменным.

Пример 1.17. Вычислить функцию u= 2sin(3x+ 4y) , eсли
$x = \frac{\pi}{24} \pm 0{,}002 \ и \ y = \frac{\pi}{24} \pm 0{,}005$

Найти предельные абсолютную и относительную погрешности результата и определить число верных значащих цифр.

Решение. Применяя формулу (1.17), имеем

$$\Delta_u = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \Delta_x + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \Delta_y = |6\cos(3x + 4y)| \cdot 0{,}002 + |8\cos(3x + 4y)| \cdot 0{,}005 =$$

$$= |2\cos(3x + 4y)| \cdot (3 \cdot 0{,}002 + 4 \cdot 0{,}005) = \left|2\cos\frac{\pi}{4}\right| \cdot (3 \cdot 0{,}002 + 4 \cdot 0{,}005) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot 0{,}026 \approx 0{,}037.$$

Для функции u находим u =$\sqrt{2}$ ≈1,414214. Учитывая предельную абсолютную погрешность Δ_u ≈0,04 , получаем результат, который имеет две верных значащих цифры в узком смысле. Ответ можно записать в виде

=1,4±0,04.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с теоретическими сведениями.
2. Выполнить необходимые расчеты.
3. Оформить и представить результаты расчетов.

Форма представления результата:

Результаты представить в виде отчета в формате .docx.

Критерии оценки:

Задание выполнено без ошибок – оценка «отлично».

Задание выполнено правильно, но допущены 1-3 вычислительных ошибок – оценка «хорошо».

Задание выполнено небрежно, допущены ошибки – оценка «удовлетворительно».

Задание выполнено неправильно, допущены ошибки – оценка «неудовлетворительно».

Тема 2. Численное решение СЛАУ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2 «РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Цель: освоить методы решения систем линейных уравнений

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– решать системы линейных алгебраических уравнений, используя метод Гаусса и метод итераций.

Материальное обеспечение: пакет прикладных программ Microsoft Office.

Задание:

Найти решения систем линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$: а) используя метод Гаусса; б) используя метод итераций. Сравнить их с точными решениями ξ.

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

4. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

6. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

7. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

8. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

9. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

10. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

11. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

12. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

13. $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

14. $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

15. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

16. $A=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

17. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

18. $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

19. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

20. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

21. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

22. $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

23. $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ 1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix}0\\ -6\\ 0\end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}.$

24. $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 1\\ -2 & 5 & 1\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix}-6\\ 13\\ 0\end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}.$

25. $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix}8\\ 0\\ -5\end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}.$

Краткие теоретические сведения:

2.1. Метод простой итерации

Все методы решения систем уравнений можно разбить на условно точные и приближенные. К точным алгоритмам относится – метод Крамера, Гаусса, Жордана-Гаусса и т.д. Среди приближенных следует отметить, прежде всего, итерационные методы. Рассмотрим подробно метод простой итерации, который обладает следующими преимуществами:

1. Если процесс итерации сходится быстро, т.е. количество приближений меньше, чем порядок системы, то получается выигрыш во времени решения по сравнению с точными методами.

2. Метод итераций является самокорректирующимся, т.е. отдельные ошибки не отражаются на конечном результате решения.

3. Процесс итераций легко программируется на ЭВМ.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$A\overline{x} = \overline{b}$$

где A – невырожденная матрица.

Расширенная матрица A этой системы имеет вид:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

Приводя с помощью линейных преобразований эту систему к эквивалентному виду .

$$\overline{x} = c\overline{x} + \overline{d},$$

будем решать последнюю методом последовательных приближений. Взяв за нулевое приближение какой-либо вектор $\overline{x}^{(0)}$, вычислим приближение $\overline{x}^{(1)}$ по формуле

$$\overline{x}^{(1)} = c\overline{x}^{(0)} + \overline{d},$$

аналогично

$$\overline{x}^{(2)} = c\overline{x}^{(1)} + \overline{d} \text{ и т.д.}$$

Последовательность векторов $\{\overline{x}^{(k)}\}$, k=1,2,..., сходится к точному решению $\overline{x}^*$, т.е.

$$\lim_{k\to\infty} \overline{x}^{(k)} = \overline{x}^*,$$

если норма матрицы с

$$||c|| < 1.$$

Норма ||c|| определяется по одному из следующих способов:

$$\|c\|_m = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

$$\|c\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|;$$

$$\|c\|_k = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}.$$

При сделанных предположениях о норме матрицы с погрешность k-ого приближения можно оценить следующим образом:

$$\|\overline{x}^* - \overline{x}^{(k)}\| \le \frac{\|c\|^{k+1}}{1-\|c\|}\|\overline{d}\| \quad \text{при} \quad \overline{x}^{(0)} = \overline{d};$$

$$\|\overline{x}^* - \overline{x}^{(k)}\| \le \frac{\|c\|}{1-\|c\|}\|\overline{x}^{(k)} - \overline{x}^{k-1}\|.$$

Первая из этих формул позволяет оценить количество итераций, теоретически необходимых для достижения заданной точности.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с теоретическими сведениями.
2. Выполнить необходимые расчеты.
3. Оформить и представить результаты расчетов.

Форма представления результата:

Результаты представить в виде отчета в формате .docx.

Критерии оценки:

Задание выполнено без ошибок – оценка «отлично».

Задание выполнено правильно, но допущены 1-3 вычислительных ошибок – оценка «хорошо».

Задание выполнено небрежно, допущены ошибки – оценка «удовлетворительно».

Задание выполнено неправильно, допущены ошибки – оценка «неудовлетворительно».

Тема 3. Алгоритмы и методы поиска корней уравнения и решения нелинейных систем

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3 «РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Цель: освоить методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений
Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– решать алгебраические уравнения методами половинного деления, простых итераций, методом хорд и касательных.

Материальное обеспечение: пакет прикладных программ Microsoft Office.

Задание:

Найти решения следующих уравнений с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$:

а) методом половинного деления; б) методом простых итераций; в) методом хорд и касательных.

1. $x^4 - 3x - 20 = 0 \quad (x > 0)$.
2. $x^3 - 2x - 5 = 0 \quad (x > 0)$.
3. $x^3 + 3x + 5 = 0$.
4. $x^4 + 5x - 7 = 0 \quad (x > 0)$.
5. $x^3 - 12x - 5 = 0 \quad (x > 0)$.
6. $x + e^x = 0$.
7. $x^3 - 2x^2 - 4x + 5 = 0 \quad (x < 0)$.
8. $x^5 - x - 2 = 0$.
9. $x^3 - 10x + 5 = 0 \quad (x < 0)$.
10. $2 - \ln x - x = 0$.
11. $x^3 + 2x - 7 = 0$.
12. $x^3 + x^2 - 11 = 0 \quad (x > 0)$.
13. $x^4 - 2x - 4 = 0 \quad (x > 0)$.
14. $2e^x + x - 1 = 0$.
15. $x^4 - 2x - 4 = 0 \quad (x < 0)$.
16. $2x^3 + x^2 - 4 = 0 \quad (x > 0)$.
17. $e^x - x - 2 = 0$.
18. $\frac{1}{2}e^x - x - 1 = 0 \quad (x > 0)$.
19. $x^2 - \cos x = 0 \quad (x > 0)$.
20. $x^2 + \ln x = 0$.
21. $\ln x + 0.5x - 1 = 0$.
22. $\ln x - 0.5x + 1 = 0 \quad (x > 1)$.
23. $\frac{1}{1+x^2} - \ln x = 0$.
24. $\frac{1}{1+x^2} - \frac{e^x}{2} = 0 \quad (x > 0)$.
25. $\frac{x}{2+x} - \ln x = 0$.

Краткие теоретические сведения:

Решение алгебраических и трансцендентных уравнений

3.1. Корни уравнения. Отделение корней

Функция f(x)называется алгебраической, если для получения ее числового значения по данному значению аргумента x требуется выполнить арифметические операции и возведение в степень с рациональным показателем.

Если в запись уравнения входят только алгебраические функции, то уравнение называется *алгебраическим*.

Алгебраическое уравнение всегда может быть приведено к виду

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \quad (3.1)$$

где $n = 1,2,3\ldots, \quad a_n \neq 0$.

Все неалгебраические функции: показательная a^x, логарифмическая $\log_a x$, тригонометрические $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}\, x$ и обратные тригонометрические $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\, x$, $\mathrm{arcctg}\, x$ – называются трансцендентными.

Если в запись уравнения входят трансцендентные функции, то уравнение называется трансцендентным, например $\mathrm{tg}\, x = ax$.

Решение уравнения $f(x) = 0$ с одним неизвестным x заключается в отыскании корней, то есть тех значений x , которые обращают уравнение в тождество.

В общем случае для уравнения $f(x) = 0$ отсутствуют аналитические формулы, определяющие его корни.

Задача отыскания корней сводится к нахождению всех точек x_i пересечения графика функции $f(x)$ с осью x (рис. 3.1).

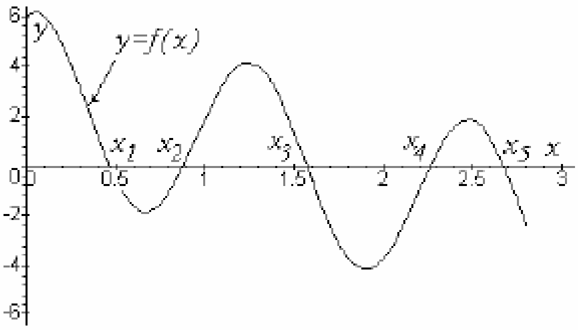


Рис. 3.1. Геометрическая интерпретация корней уравнения $f(x) = 0$

Из рисунка видно, что число точек пересечения графика функции с осью x может быть несколько. Поэтому в качестве первого шага при решении любого уравнения проводят *отделение* его корней. Это означает, что ось x разбивают на такие отрезки, что в каждом из них содержится только один корень уравнения. После этого следует уточнить положение каждого корня в пределах допустимой погрешности.

Для отделения корней полезна следующая теорема: если непрерывная функция $f(x)$ принимает значения разных знаков на концах отрезка $[a, b]$, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, то внутри этого отрезка содержится, по меньшей мере, один корень уравнения $f(x) = 0$. На основе этой же теоремы реализуются самые простые и надежные методы численного определения корней уравнений: метод половинного деления и метод хорд.

Процесс отделения корней начинается с установления знаков $f(x)$ в граничных точках интересующего нас отрезка определения переменной x: $x = a$ и $x = b$. Затем определяются знаки f(x) в ряде промежуточных точек $x = \alpha_1, \alpha_2$ ..., выбор которых должен учитывать особенности функции $f(x)$. Если окажется, что $f(\alpha_i)f(\alpha_i+1) < 0$, то в интервале (α_i, α_i+1) есть корень уравнения $f(x) = 0$. Необходимо убедиться, является ли этот корень единственным на данном интервале. Для отделения корней практически достаточно провести процесс половинного деления, последовательно деля исходный отрезок $[a, b]$ на 2, 4, 8 и т. д. равных частей и определяя знаки $f(x)$ в точках деления. Напомним, что алгебраическое уравнение степени n имеет не более n действительных корней. Поэтому если для алгебраического уравнения мы получили n+1 перемену знака $f(x)$, то все его корни отделены.

3.2. Численное решение уравнения методом половинного деления (метод дихотомии)

Предположим, что процесс отделения корней проведен и на отрезке $[a, b]$ находится ровно один корень ξ уравнения $f(x)=0$. Необходимо определить его положение с погрешностью ε.

Метод половинного деления заключается в следующем, см. рис. 3.2.

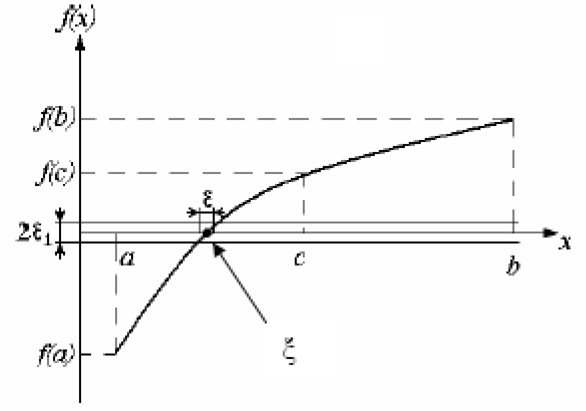


Рис. 3.2. Графическая интерпретация метода половинного деления

Сначала определяем середину с отрезка [a, b] с = (a+b)/2 и вычисляем значение функции f(c). Далее делаем выбор, какую из двух частей взять для уточнения корня. Очевидно, что корень будет находиться в той половине исходного отрезка, на концах которой функция имеет разные знаки. На рисунке 2 таким будет правый отрезок – отрезок [a, c].

Для очередного шага уточнения положения корня отрезок [c, b] из рассмотрения исключаем, а с отрезком [a, c] продолжаем процесс деления, как и с первоначальным отрезком [a, b], формально переприсваивая новому значению b значение c . Если же реализуется ситуация, когда функция имеет разные знаки на концах отрезка [c, b], то из рассмотрения следует исключить отрезок [a, c], формально переприсваивая новому значению а значение c .

В результате мы получим последовательность вложенных друг в друга отрезков все уменьшающейся длины: : [a_1, b_1], [a_2, b_2],... [a_n , b_n]. Этот повторяющийся (итерационный) процесс будем продолжать до тех пор, пока длина отрезка [a_n, b_n] не станет меньше заданной погрешности ε вычислений.

Тогда искомый корень

$$\xi \approx a_n \approx b_n \approx (a_n + b_n)/2. \tag{3.2}$$

Следует учитывать, что функция f(x) вычисляется с некоторой абсолютной погрешностью ε□. Вблизи корня значения функции f(x) малы по абсолютной величине и могут оказаться сравнимыми с погрешностью ее вычисления. Другими словами, при подходе к корню мы можем попасть в “полосу шумов” $2\varepsilon_1$ (рис. 3.2.) и дальнейшее уточнение корня становится бессмысленным. Поэтому надо задать ширину “полосы шумов” и прекратить итерационный процесс при попадании в нее. Также необходимо иметь в виду, что при уменьшении длины интервала *[*a_n, b_n *]* увеличивается погрешность вычисления его длины $a_n - b_n$ за счет вычитания двух близких чисел.

Метод половинного деления обладает довольно большой скоростью сходимости. Так как за каждую итерацию интервал, где расположен корень, уменьшается в два раза, то через n итераций длина интервала будет равна (b−a)/2n. За 10 итераций интервал уменьшится в 210 ≈1024 ≈103 раз, а за 20 итераций – в 220≈106 раз.

3.3. Метод хорд

В предположениях предыдущего параграфа укажем более быстрый способ нахождения корня ξ уравнения f(x) = 0. В этом методе очередное приближение к корню берется не в середине отрезка [a, b], а в точке x1, где хорда графика функции f(x), соединяющая точки f(a) и f(b), пересекает ось абсцисс (рис. 3.3).

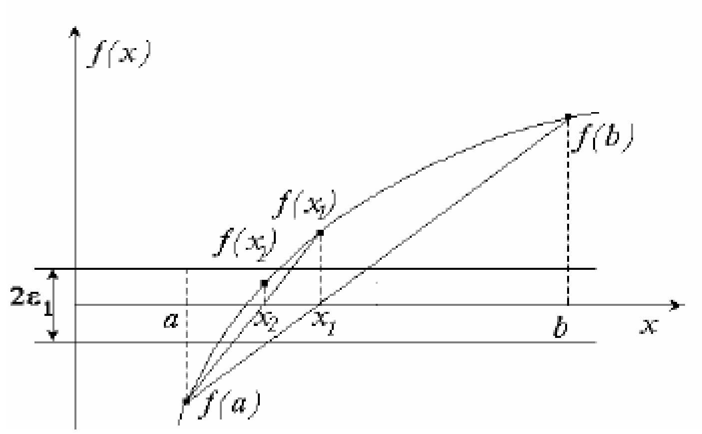


Рис. 3.3. Графическая интерпретация метода хорд

В качестве нового интервала для продолжения итерационного процесса выбираем ту из двух частей ([a, x_1] или [x_1, b]) отрезка [a, b], на концах которого функция *f*(x) меняет знак.

Процесс уточнения корня заканчивается, когда расстояние между очередными приближениями станет меньше требуемой погрешности ε вычислений:

$$\left|x_n - x_{n-1}\right| < \varepsilon,$$

или когда значения функции попадут в область шума, т.е.

$$\left|f(x)\right| < \varepsilon_1.$$

Уравнение хорды в нашем случае имеет вид:

$$y(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - x) + f(a),$$

откуда для x_1 получаем:

$$x_1 = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} \cdot f(a). \tag{3.3}$$

Схема вычислений при решении трансцендентного уравнения методом хорд в основном совпадает со схемой вычислений по методу дихотомии. Метод хорд требует вдвое–втрое меньшего числа итераций, чем метод половинного деления, для отыскания корня с той же погрешностью. Однако, если функция *f*(x) в области пересечения с осью абсцисс достаточно пологая, то очередная хорда может практически лечь на ось абсцисс, то есть полностью попасть в полосу шумов. В этой ситуации произойдет сильное увеличение ошибки вычислений, так как в в формуле (3.3) разность двух близких величин *f*(a)−*f*(b) стоит в знаменателе. В этом смысле метод половинного деления значительно устойчивее.

3.4. Метод касательных (метод Ньютона)

Пусть x* есть корень уравнения *f*(x) = 0, единственный на отрезке [a, b]. Предположим, что каким-либо способом, например, графически определено начальное приближение x_0 к корню. В этой точке вычислим значение функции *f*(x_0) и ее производной *f'*(x = x_0) . Значение этой производной равно tgα (рис. 3.4) – тангенсу угла наклона соответствующей касательной к оси абсцисс.

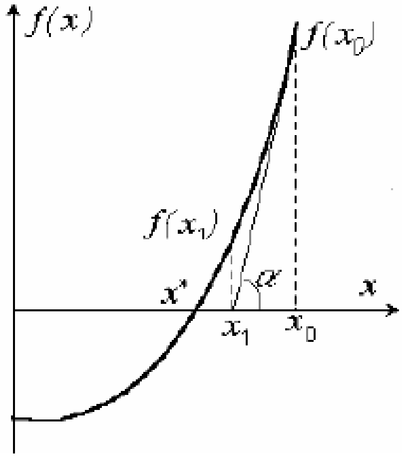


Рис. 3.4. Иллюстрация метода касательных (Ньютона)

Точка x_1 пересечения этой касательной с осью абсцисс есть следующее приближение к корню (поэтому метод Ньютона и называют методом касательных). Эта точка x_1 принимается за новое начальное приближение и процесс повторяется. Из рисунка видно, что процесс сходится к искомому корню x^*. Процесс уточнения корня закончится, когда выполнится условие

$$\left|x_{k+1} - x_k\right| < \varepsilon,$$

где ε – допустимая погрешность определения корня. Из геометрических соображений можно получить расчетную формулу для метода Ньютона в виде:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{3.4}$$

Метод Ньютона обладает высокой скоростью сходимости. Обычно абсолютная погрешность нахождения корня $\varepsilon = 10^{-5} \ldots 10^{-6}$ достигается за 5 – 6 итераций. Однако существенным недостатком этого метода является необходимость вычисления производной функции на каждом шаге итерационного процесса. Это может явиться серьезным препятствием, когда функция вычисляется по очень сложному или трудоемкому алгоритму. Несколько уменьшив скорость сходимости, можно ограничиться вычислением производной только на первой итерации, а затем вести вычисления по формуле (3.4), полагая

$$f'(x_k) \approx f'(x_0):$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}.$$

Структура программы решения уравнений методом Ньютона похожа на структуру программ для методов дихотомии и хорд. Главное отличие заключается в том, что в методе Ньютона не нужно делать выбор между левой правой частями отрезка, а также в том, что нет необходимости задавать полосу шума функции, так как по разности двух последовательных приближений $x_{k+1} - x_k$ можно сразу оценивать и величину отношения $f(x)/f'(x)$. Для предотвращения возможного “зацикливания” программы в случае неудачного выбора начального приближения или неправильно заданных параметров, рекомендуется предусмотреть счетчик числа итераций.

Замечание. Отметим три особенности метода Ньютона:

1. Метод Ньютона имеет квадратичную сходимость, т.е. в отличие от метода половинного деления (и метода хорд) его погрешность на следующей итерации пропорциональна квадрату погрешности на предыдущей итерации. У метода дихотомии такая зависимость линейна.

2. Быстрая сходимость метода Ньютона гарантируется лишь при близких к точному решению начальных приближениях, Если начальное приближение выбрано неудачно, то метод может сходиться медленно, либо не сойдется вообще.

3. Если вблизи корня функция *f*(x) пологая, то есть на очередной итерации tg(α) → 0, возможно резкое увеличение ошибки вычислений.

3.5. Метод простых итераций (метод последовательных приближений)

От исходного трансцендентного уравнения *f*(x) =0 тождественными алгебраическими преобразованиями перейдем к эквивалентной записи в виде

$$x = \varphi(x). \tag{3.5}$$

Выберем какое-то начальное приближение x_0 к корню x^*. Подставив его в правую часть (3.5), получим первое приближение $x_1 = \varphi(x_0)$, затем втрое $x_2 = \varphi(x_1)$ и так далее:

$$x_k = \varphi(x_{k-1}). \tag{3.6}$$

Возникает вопрос о том, при каких условиях данный итерационный процесс будет сходиться к корню трансцендентного уравнения x*. Для ответа на него проведем графический анализ, см. рисунок 3.5.

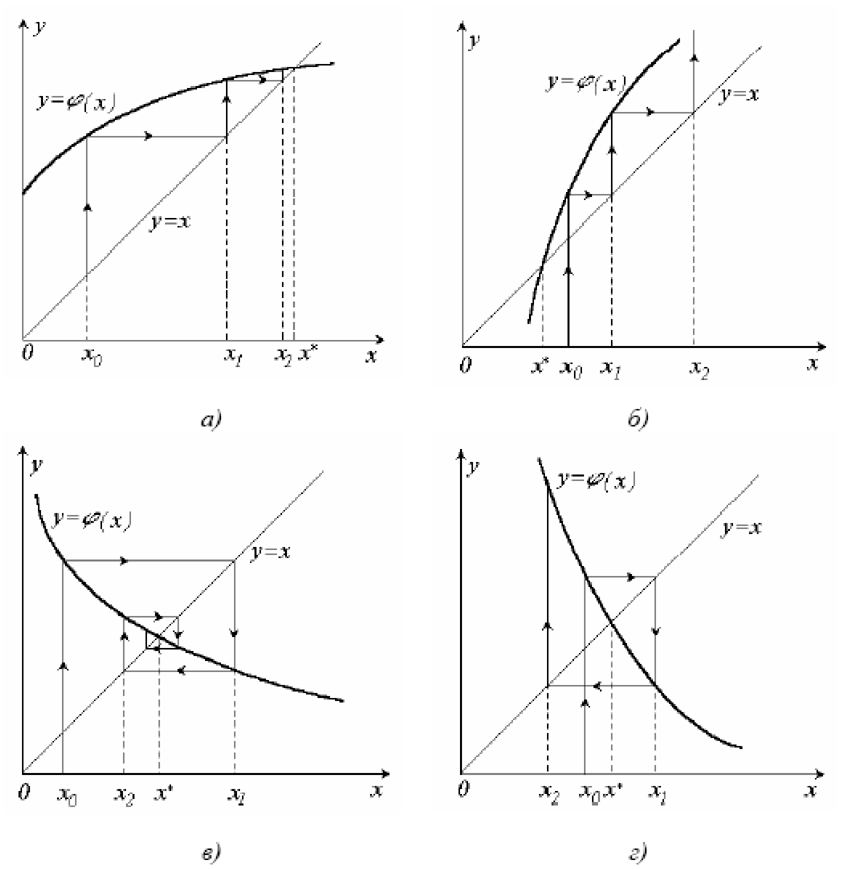


Рис. 3.5. Метод простых итераций:
а - односторонний сходящийся процесс;
б - односторонний расходящийся процесс;
в - двухсторонний сходящийся процесс;
г - двухсторонний расходящийся процесс

Из графиков видно, что при любом знаке производной $\varphi'(x)$ возможны как сходящиеся, так и расходящиеся итерационные процессы. Скорость сходимости зависит от абсолютной величины производной. Чем меньше $|\varphi'(x)|$ вблизи корня, тем быстрее сходится процесс. Более детальный математический анализ показывает, что необходимым для сходимости метода простых итераций является условие

$$|\varphi'(x)| < 1. \quad (3.7)$$

Выполнение условия (3.7) можно обеспечить путем рационального выбора вида функции $\varphi(x)$. Рассмотрим один из общих алгоритмов такого выбора.

Умножим левую и правую части уравнения f(x)=0 на произвольную постоянную b и добавим к обеим частям неизвестное x. При этом корни исходного уравнения не изменятся:

$$x + b \cdot f(x) = x + 0 \cdot b.$$

Введем обозначение

$$\varphi(x) = x + b \cdot f(x). \quad (3.8)$$

Произвольный выбор константы b поможет обеспечить выполнение условия сходимости. Желательно выбрать b так, чтобы

$$-1 < \varphi'(x) < 0,$$

тогда сходимость итерационного процесса будет двухсторонней (рисунок 5, в).

Если функция $\varphi(x)$ выбрана в виде (3.5), то ее производная выражается формулой

$$\varphi'(x) = 1 + b \cdot f'(x).$$

Наибольшая скорость сходимости получается при $\varphi'(x) = 0$, тогда

$$b = -\frac{1}{f'(x)}$$

и итерационная формула (3.6) метода простых итераций переходит в формулу Ньютона (4).

Пример. Уравнение

$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0 \quad (3.9)$$

имеет корень в интервале 1 < x* < 2 , так как $f(1) = -1 < 0$ и $f(2) = 5 > 0$.

Это уравнение можно представить в виде $x = x^3 - 1$.

Здесь $\varphi(x) = x^3 - 1$, $\varphi'(x) = 3x^2$. Поэтому $\varphi'(x) \geq 3$ при $1 \leq x \leq 2$ и, следовательно, условие (3.7) сходимости процесса итераций не выполнено.

Но если записать уравнение (9) в виде

$$x = \sqrt[3]{x+1}, \quad (3.10)$$

то будем иметь

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{x+1}, \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}.$$

Отсюда при $1 \leq x \leq 2$

$$0 < \varphi'(x) < 0{,}25,$$

значит процесс итераций для уравнения (3.10) быстро сойдется.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с теоретическими сведениями.
2. Выполнить необходимые расчеты.
3. Оформить и представить результаты расчетов.

Форма представления результата:

Результаты представить в виде отчета в формате .docx.

Критерии оценки:

Задание выполнено без ошибок – оценка «отлично».

Задание выполнено правильно, но допущены 1-3 вычислительных ошибок – оценка «хорошо».

Задание выполнено небрежно, допущены ошибки – оценка «удовлетворительно».

Задание выполнено неправильно, допущены ошибки – оценка «неудовлетворительно».

Тема 4. Методы аналитического представления таблично заданной функции

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4 «ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ»

Цель: освоить методы интерполирования функций

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– по заданным значениям некоторой функции в ряде точек предсказать ее значения в промежуточных точках

Материальное обеспечение: пакет прикладных программ Microsoft Office.

Задание:

Функция определена на отрезке [1,00; 1,20] (см. табл. 4.1). Найти значения многочлена Лагранжа, интерполирующего функцию *f(x)* на этом отрезке по системе трех равномерно расположенных узлов (с шагом 0,1), в точках 1,05; 1,09 ; 1,13; 1,15; 1,17. Полученные результаты сравнить с табличными значениями и дать оценку точности интерполяции.

Таблица 4.1

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	sin x	cos x	ln x
1.00	2.7183	0.3679	1.1752	1.5431	0.8415	0.5403	0.0000
1,01	2,7456	0,3642	1,1907	1,5549	0,8468	0,5319	0,0100
1,02	2,7732	0,3606	1,2063	1,5669	0,8521	0,5234	0,0198
1,03	2,8011	0,3570	1,2220	1,5790	0,8573	0,5148	0,0296
1,04	2,8292	0,3535	1,2379	1,5913	0,8624	0,5062	0,0392
1,05	2,8577	0,3499	1,2539	1,6038	0,8674	0,4976	0,0488
1,06	2,8864	0,3465	1,2700	1,6164	0,8724	0,4889	0,0583
1,07	2,9154	0,3430	1,2862	1,6292	0,8772	0,4801	0,0677
1,08	2,9447	0,3396	1,3025	1,6421	0,8820	0,4713	0,0770
1,09	2,9743	0,3362	1,3190	1,6552	0,8866	0,4625	0,0862
1,10	3,0042	0,3329	1,3356	1,6685	0,8912	0,4536	0,0953
1,11	3,0344	0,3296	1,3524	1,6820	0,8957	0,4447	0,1044
1,12	3,0649	0,3263	1,3693	1,6956	0,9001	0,4357	0,1133
1,13	3,0957	0,3230	1,3863	1,7093	0,9044	0,4267	0,1222
1,14	3,1268	0,3198	1,4035	1,7233	0,9086	0,4176	0,1310
1,15	3,1582	0,3166	1,4208	1,7374	0,9128	0,4085	0,1398
1,16	3,1899	0,3135	1,4382	1,7517	0,9168	0,3993	0,1484
1,17	3,2220	0,3104	1,4558	1,7662	0,9208	0,3902	0,1570
1,18	3,2544	0,3073	1,4735	1,7808	0,9246	0,3809	0,1655
0,19	3,2871	0,3042	1,4914	1,7957	0,9284	0,3717	0,1740
1,20	3,3201	0,3012	1,5095	1,8107	0,9320	0,3624	0,1823

Краткие теоретические сведения:

В прикладных задачах часто возникает необходимость по заданным значениям некоторой функции $y_0,\ y_1,\ \dots,\ y_n$ в ряде точек $x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_n$ предсказать ее значения в промежуточных точках. Именно эту задачу позволяет решать интерполяция функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена таблицей

x_i	x_0	x_1	. . . . . .	x_n
y_i	y_0	y_1	. . . . . .	y_n

Значения аргументов x_i ($i=0, 1, \dots, n$) будем называть <u>*узлами интерполяции*</u>.

<u>*Задачей интерполяции*</u> является нахождение значения функции f в точке $x^* \in [x_0, x_n]$, $x^* \neq x_i$.

Один из возможных путей решения поставленной задачи заключается в следующем:

1) строится многочлен степени не выше n, где (n+1) - количество заданных точек

$$L_n(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n, \qquad (4.1)$$

принимающий в точках x_i значения y_i, т.е значения коэффициентов многочлена a_i находят из условия, что

$$L_n(x_i) = y_i, \ (i=0, 1, \ldots, n).$$

Этот многочлен называют интерполяционным. Он всегда существует и единственен.

Функция $f(x)$ представляется в виде:

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x), \qquad (4.2)$$

где $R_n(x)$ – остаточный член интерполяционной формулы. Если $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка (n+1) на $[x_0, x_n]$, то

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n), \ \ \xi \in (x_0, x_n). \qquad (4.3)$$

2) Вычисляется значение $L_n(x^*)$. Если значения y_i заданны приближенно или же по каким-либо причинам вычисления не могут быть выполнены абсолютно точно, то фактически вычисляется лишь приближенное значение $\bar{L}_n(x^*)$ для точного значения $L_n(x^*)$.

3) Приближенно принимается, что $f(x) \approx \bar{L}_n(x^*)$.

4) Оценивается погрешность метода по остаточному члену интерполяционной формулы:

$$R_n(x^*) \le \Delta_1 = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|(x^* - x_0)(x^* - x_1)\ldots(x^* - x_n)\right|, \qquad (4.4)$$

$$\text{где } M_n = \max_{[x_0,\ x_n]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|. \qquad (4.5)$$

5) Оценивается погрешность вычислений по погрешностям приближенных данных:

$$\left|L_n(x^*) - \bar{L}_n(x^*)\right| \le \Delta_2 \qquad (4.6)$$

6) Вычисляется полная погрешность приближенного значения:

$$\left|f(x^*) - \bar{L}_n(x^*)\right| \le \Delta_1 + \Delta_2 \le \Delta \qquad (4.7)$$

При решении практических задач интерполяционный многочлен (1), может быть представлен в различной форме.

4.1. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа для произвольных узлов

Функцию L(x) ищем в виде суммы n частных решений.

Первое частное решение l_0 ставит в соответствие значениям абсцисс: $x_0, \ x_1, \ \ldots, x_n$ набор значений ординат $y_0, \ 0, \ \ldots, 0$. Из свойств многочленов следует, что многочлен, обращающийся в нуль в n разных точках, т.е. имеющий n различных корней, должен делится на каждую из n разностей:

$$x - x_1; \ x - x_2; \ldots x - x_n,$$

а, следовательно, и на произведение этих разностей, т.е. должен иметь вид

$$l_0 = const \cdot (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

Значение константы определяем из условия

$$l_0(x_0) = y_0 = const \cdot (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdot \ldots \cdot (x_0 - x_n)$$

$$const = y_0 \cdot \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdot \ldots \cdot (x_0 - x_n)}$$

тогда l_0 примет вид

$$l_0 = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_0-x_n)}.$$

Остальные частные решения ищутся аналогично, из условия, что i-ое частное решение l_i (i=1,…,n) должно ставит в соответствие значениям абсцисс: $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ набор значений ординат $0,\ \ldots,\ y_i,\ \ldots,\ 0$, т.е.

$$l_i = y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}$$

или
$$l_i = y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

Общее решение найдем как сумму частных решений :

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}, \qquad (4.8)$$

Это и есть интерполяционный многочлен в форме Лагранжа для произвольных узлов. Заметим, что степень многочлена Лагранжа не превышает числа n.

Остаточная погрешность значения $L_n(x^*)$, вычисленного по формуле (4.8), оценивается формулой (4.4), а вычислительная погрешность

$$\Delta_2 = \sum_{i=0}^{n} \left| \frac{(x^*-x_0)(x^*-x_1)\ldots(x^*-x_{i-1})(x^*-x_{i+1})\ldots(x^*-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \right| \Delta y_i, \qquad (4.9)$$

где Δy_i - погрешность исходных данных (значений функций в узлах).

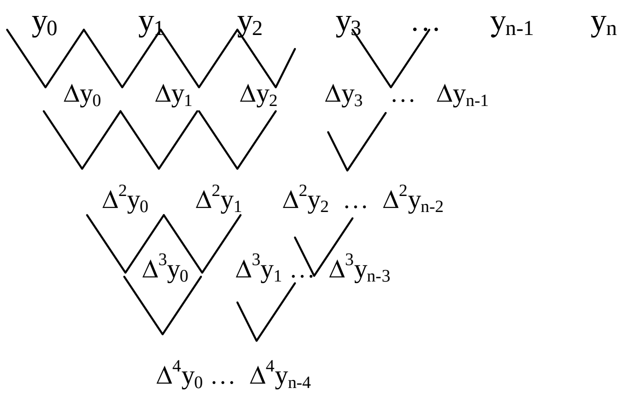
4.2. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона для равноотстоящих узлов

Рассмотрим метод построения интерполирующей функции, основанный на вычислении конечных разностей.

Конечными разностями порядка k называют величины $\Delta^k y_j$. Их рассчитывают по формулам:

$$\Delta y_j = y_{j+1} - y_j, \quad \Delta^2 y_j = \Delta y_{j+1} - \Delta y_j \quad ,\ldots, \quad \Delta^k y_j = \Delta^{k-1} y_{j+1} - \Delta^{k-1} y_j.$$

В результате вычислений должна быть получена следующая таблица конечных разностей:



Многочлен P(x) для равноотстоящих узлов (т.е x_{i+1} - x_i = h = const, где $i = 0, ..., n$-1, число h – называют шагом) будем искать в виде :

$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_{n-1})$ где $x_0, x_1, ..., x_n$ - корни полинома P(x)

Значения коэффициентов a_i определяем из условия $P(x_i) = y_i$:

Полагая x=x_0, найдем $P(x_0) = y_0 = a_0, \Rightarrow a_0 = y_0$.

Полагая x=x_1, найдем $P(x_1) = y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0), \Rightarrow a_1 = \dfrac{\Delta y_0}{h}$

В общем случае при x=x_i, $a_i = \dfrac{\Delta^i y_0}{i! \cdot h^i}$.

Подставив полученные значения a_i , в выражение для многочлена P(x), получим

$$P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x - x_0)(x - x_1) + ... + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0)(x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_{n-1}) \quad (4.10)$$

Полученное выражение называется *интерполяционной формулой Ньютона*.

Пусть x* - точка, в которой необходимо найти значение интерполяционного многочлена.

Для случая равноотстоящих узлов, если x_0 – ближайший к x^* узел слева формула (4.2) примет вид

$$P^I(t) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}t(t-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!}t(t-1)(t-2) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t-1)(t-2)\ldots(t-n+1), \quad (4.11)$$

где t определяется формулой $t = \dfrac{x^* - x_0}{h}$.

Оценки погрешностей приближенно значения $P^I(t^*)$ могут быть представлены в виде:

$$\Delta_1 = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}h^{n+1} \cdot \left|t^*(t^*-1)\ldots(t^*-n)\right| \approx \frac{\max\limits_{[a,b]}\left|\Delta^{n+1} y_i\right|}{(n+1)!}\left|t^*(t^*-1)\ldots(t^*-n)\right|$$

$$\Delta_2 = \Delta^* \cdot \left|1 + 2 \cdot \left|t^*\right| + 2\left|t^*(t^*-1)\right| + \ldots + 2^n \frac{\left|t^*(t^*-1)\ldots(t^*-n)\right|}{n!}\right|$$

где Δ^* - погрешность исходных данных.

Если x_n – ближайший к x^* узел справа, то используется второй интерполяционный полином Ньютона:

$$P^{II}(t) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!}t + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}t(t+1) + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!}t(t+1)(t+2) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t+1)\ldots(t+n-1), \quad (4.12)$$

где $t = \dfrac{x^* - x_n}{h}$.

Оценки погрешностей приближенно значения $P^{II}(t^*)$ можно записать в виде:

$$\Delta_1 = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} \cdot \left| t^*(t^*+1)\ldots(t^*+n) \right| \approx \frac{\max\limits_{[a,b]} \left| \Delta^{n+1} y_i \right|}{(n+1)!} \left| t^*(t^*+1)\ldots(t^*+n) \right|$$

$$\Delta_2 = \Delta^* \cdot \left| 1 + 2 \cdot \left| t^* \right| + 2\left| t^*(t^*+1) \right| + \ldots + 2^n \frac{\left| t^*(t^*+1)\ldots(t^*+n) \right|}{n!} \right|$$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с теоретическими сведениями.
2. Выполнить необходимые расчеты.
3. Оформить и представить результаты расчетов.

Форма представления результата:

Результаты представить в виде отчета в формате .docx.

Критерии оценки:

Задание выполнено без ошибок – оценка «отлично».

Задание выполнено правильно, но допущены 1-3 вычислительных ошибок – оценка «хорошо».

Задание выполнено небрежно, допущены ошибки – оценка «удовлетворительно».

Задание выполнено неправильно, допущены ошибки – оценка «неудовлетворительно».

Тема 5. Алгоритмы и методы численного интегрирования и дифференцирования

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5 «ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ».

Цель: освоить методы численного интегрирования и дифференцирования

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– вычислять интегралы по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона;

– оценивать погрешность результата и сравнивать приближенные значения интеграла с точными

Материальное обеспечение: пакет прикладных программ Microsoft Office.

Задание:

Вычислить заданные интегралы по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона, если отрезок интегрирования разбит на n=2 и n=4 равные части. Оценить погрешность результата и сравнить приближенные значения интеграла с точными.

1. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \quad (I = \frac{\pi}{4} \approx 0.785)$.

2. $\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \quad (I = \ln 2 \approx 0.693)$.

3. $\int_0^{\pi/4} \sin 4x dx \quad (I = 0.5)$.

4. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \quad (I = \ln(1+\sqrt{2} \approx 0.881)$.

5. $\int_1^e \ln x dx \quad (I = 1)$.

3. $\int_0^1 \ln(x+1)dx \quad (I = 2\ln 2 - 1 \approx 0386)$.

7. $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx \quad (I = \frac{\pi}{2} \approx 0.571)$.

8. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x}dx \quad (I = 1)$.

9. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx \quad (I = arctge - \frac{\pi}{4} \approx 0.433)$.

10. $\int_0^{\pi} \cos^3 x dx \quad (I = 0)$.

11. $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}dx \quad (I = \ln(1+\sqrt{2}) \approx 0.881)$.

12. $\int_0^1 arctg\ x\, dx \quad (I = \frac{1}{4}(\pi - 2\ln 2) \approx 0.438)$.

13. $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx \quad (I \approx 0.38)$.

14. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \arcsin x dx \quad (I = \frac{\sqrt{2}}{8}(\pi+4) - 1 \approx 0.26)$.

15. $\int_0^{\pi/4} tg\ x dx \quad (I = \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.346)$.

13. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} ctg\ x dx \quad (I = \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.346)$.

17. $\int_0^1 xe^x dx \quad (I = 1)$.

18. $\int_0^1 \sqrt{1+x}\ dx \quad (I = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) \approx 1.22)$.

19. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x}dx \quad (I = 1)$.

20. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx \quad (I = 2(\sqrt{2}-1) \approx 0.828)$.

21. $\int_1^e \ln^2 x dx \quad (I = e - 2 \approx)$.

22. $\int_0^{\pi/4} tg^2 x dx \quad (I = \frac{4-\pi}{4} \approx 0.215)$.

23. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} ctg^2 x dx \quad (I = \frac{4-\pi}{4} \approx 0.215)$.

24. $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx \quad (I = \frac{e^{\pi/2}-1}{2} \approx 1.905)$.

25. $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx \quad (I = \frac{e^{\pi/2}+1}{2} \approx 2.905)$.

2. Функция f(x) (см. таблицу 2.1) определена на отрезке [1; 1.2]. Выбрав шаг h=0,5найти приближенные значения производных $f'(x)$ и $f''(x)$ в точках 1 и 1,1. Оценить погрешность вычислений. Сравнить результаты с точными значениями производных в этих точках.

Краткие теоретические сведения:

Численное интегрирование. квадратурные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона

Необходимо приближенно вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Для этого разобьем отрезок интегрирования [a,b] на n равных частей точками $x_0=a$, $x_1= x_0+h$, $x_{i+1}= x_i+h$, ..., $x_n= b$, *где* $h = \frac{b-a}{n}$ - шаг разбиения. y_i – значения функции f(x) в точках разбиения x_i.

Затем непрерывная подынтегральная функция y=f(x) заменяется сплайном (кусочно-полиномиальной функцией) S(x), интерполирующей данную функцию. Интегрируя функцию S(x) на отрезке [a,b], придем к некоторой формуле численного интегрирования (квадратурной формуле).

5.1. Формула прямоугольников

Если на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, i=1,2,…,n , функцию f(x) заменяем функцией, принимающей постоянное значение, равное например значению функции f(x) в середине отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, обозначенного $x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$. Тогда S(x) будет иметь ступенчатый вид (рис.1).

$$S(x) = S_i(x) = y_{i-\frac{1}{2}} = f(x_{i-\frac{1}{2}}) = \begin{cases} f(x_{1-\frac{1}{2}}), & x_0 \le x \le x_1; \\ f(x_{2-\frac{1}{2}}), & x_1 \le x \le x_2; \\ \ldots \\ f(x_{n-\frac{1}{2}}), & x_{n-1} \le x \le x_n. \end{cases}$$

В этом случае значение интеграла (площадь под графиком f(x), на отрезке [a,b]), считаем приблизительно равной сумме площадей прямоугольников высотой $f(x_{i-\frac{1}{2}})$ и шириной h_0.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} h\cdot y_{i-\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{n} h\cdot f(x_{i-\frac{1}{2}}) = h\cdot(y_{1-\frac{1}{2}} + y_{2-\frac{1}{2}} + \ldots + y_{n-\frac{1}{2}})}$$ - формула прямоугольников (5.1)

5.2. Формула трапеций

Функцию f(x) на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, (i=1,2,…,n) заменяем её линейной интерполяцией по точкам (x_{i-1}, y_{i-1}) и (x_i, y_i), т.е. отрезком прямой соединяющей эти точки.

S(x) принимает вид:

$$S(x) = S_i(x) = f(x_{i-1})\frac{x_i - x}{h} + f(x_i)\frac{x - x_{i-1}}{h} = y_{i-1}\frac{x_i - x}{h} + y_i\frac{x - x_{i-1}}{h},$$
$$\textit{где}\quad x\in[x_{i-1}, x_i],\ i = 1,2,\ldots,n,$$

а её графиком является ломаная.

Тогда значение интеграла находим как сумму площадей трапеций с основаниями $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$ и высотой h. С учетом формулы площади трапеции $S_{тр.} = \frac{m+n}{2}h,$ где m, n основания трапеции получим:

$$\boxed{\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{i=1}^{n} h\cdot\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = \sum_{i=1}^{n} h\cdot\frac{y_{i-1}+y_i}{2} = \\ &= h\cdot(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})\end{aligned}}$$ - формула трапеций (5.2)

5.3. Формула Симпсона (формула парабол)

Функцию f(x) на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, (i=1,2,…,n) заменяем сплайном S(x), представляющем собой непрерывную функцию, составленную из примыкающих парабол. Потребуем, чтобы на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ парабола проходила через точки (x_{i-1}, y_{i-1}), $(x_{i-1/2}, y_{i-1/2})$ и (x_i, y_i). Используя построение интерполяционного многочлена Лагранжа второго порядка на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, получим сплайн:

$$S(x) = S_i(x) = y_{i-1}\frac{2(x-x_i)(x-x_{i-1/2})}{h^2} + y_{i-1/2}\frac{4(x_i - x)(x - x_{i-1})}{h^2} + y_i\frac{2(x-x_{i-1/2})(x-x_{i-1})}{h^2},$$
$$\textit{где}\quad x\in[x_{i-1}, x_i],\ i = 1,2,\ldots,n.$$

Для дальнейших преобразований введем переменную t∈[0,1] с помощью равенства $x = x_{i-1} + ht$. Значениям t равным 0, ½, 1, соответствуют значения *x*, равные x_{i-1}, $x_{i-1/2}$, x_i.

Выразим сплайн S(x) через новую переменную t:

$$S(x) = S_i(x) = \widetilde{S}_i(t) = y_{i-1}(1-t)(1-2t) + 4y_{i-1/2}(1-t)t + y_i(2t-1)t =$$
$$= y_{i-1}(1-3t+2t^2) + 4y_{i-1/2}(t-t^2) + y_i(2t^2-t), \qquad (i = 1,2,...,n).$$

Учитывая, что $\int_0^1 (1-3t+2t^2)dt = \int_0^1 (t-t^2)dt = \int_0^1 (2t^2-t)dt = \frac{1}{6}$, имеем

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} S_i(x)dx = \sum_{i=1}^n h\int_0^1 \widetilde{S}_i(t)dt = \sum_{i=1}^n \frac{h}{6}\cdot(y_{i-1} + 4y_{i-1/2} + y_i).$$

И в результате приходим к квадратурной формуле парабол:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}\cdot\left[y_0 + y_n + 4(y_{1/2} + y_{3/2} + ... + y_{n-1/2}) + 2(y_1 + y_2 + ... + y_{n-1})\right]}. \quad (5.3)$$

5.4. Оценка погрешности

Погрешность каждой квадратурной формулы оценивается величиной остаточного члена $R(h)$, зависящего от шага разбиения h (или от числа разбиений n):

$$R(h) = \left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b S(x)dx\right|\cdot$$

Приведем оценки погрешностей квадратурных формул в том случае, когда подынтегральная функция имеет непрерывную производную второго порядка:

для формулы прямоугольников

$$R(h) \le \frac{b-a}{24}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|\cdot h^2 = \frac{(b-a)^3}{24n^2}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|\cdot h^2$$

для формулы трапеций

$$R(h) \le \frac{b-a}{12}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|\cdot h^2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|\cdot h^2.$$

Если подынтегральная функция имеет непрерывную производную четвертого порядка, то справедлива такая оценка погрешности формулы Симпсона:

$$R(h) \le \frac{b-a}{2880}\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|\cdot h^4 = \frac{(b-a)^5}{2880n^4}\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|\cdot h^4.$$

Заметим, что при интегрировании степенной функции, степень которой не выше трех, квадратурная формула Симпсона дает точный результат.

Практически важно вести вычисления до достижения заданной точности ε по той или иной формуле. Этой цели удовлетворяет *метод двойного пересчета*. Для этого по квадратурной формуле проводят вычисление интеграла с шагом h и получают значение $I(h)$. Затем уменьшают шаг вдвое и получают новое приближенное значение интеграла $I(h/2)$.

Чтобы определить, как сильно уклоняется значение $I(h/2)$ от точного значения интеграла I, используется *правило Рунге*:

$$|I - I(h/2)| \approx \frac{1}{2^k-1}|I(h) - I(h/2)|,$$

где k=2 для формул прямоугольников и трапеций и k=4 для формулы Симпсона.

При заданной точности ε вычисления с уменьшающимся шагом проводят до окончания приближений при выполнении условия

$$\frac{1}{2^k-1}|I(h) - I(h/2)| < \varepsilon$$

При этом полагают $I \approx I(h/2)$ с точностью ε.

Численное дифференцирование

5.4. Вычисление производной по её определению

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет производную в этой точке, т.е. существует предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю:

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (4.1)$$

Значение производной в точке x_0 можно получить, переходя к пределу в (4.1) по последовательности целых чисел n и полагая, $\Delta x = (\Delta x)_n = \frac{(\Delta x)_0}{a^n}$. Здесь $(\Delta x)_0$ - некоторое начальное приращение аргумента, a – некоторое число больше единицы, n={0, 1, 2,…}. Тогда значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 запишется так:

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{(\Delta y)_n}{(\Delta x)_n}, \qquad (\Delta y)_n = f(x_0 + (\Delta x)_n) - f(x_0) \cdot$$

Отсюда получаем приближенное равенство

$$y'(x_0) \approx \frac{(\Delta y)_n}{(\Delta x)_n} = \frac{f\left(x_0 + \frac{(\Delta x)_0}{a^n}\right) - f(x_0)}{\frac{(\Delta x)_0}{a^n}} \,. \qquad (4.2)$$

Для функции $y=f(x)$, имеющей непрерывную производную до второго порядка включительно в окрестности точки x_0 , точность приближения производной соотношением (4.2), можно установить, воспользовавшись формулой Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x + \frac{1}{2} f''(\xi)\cdot\Delta x^2, \qquad \xi \in (x_0, x).$$

Тогда

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} \right| \le \frac{\max\limits_{x_0 \le \xi \le x} \left| f''(\xi) \right|}{2} \cdot \Delta x$$

и окончательно имеем

$$\left| y'(x_0) - \frac{(\Delta y)_n}{(\Delta x)_n} \right| \le \frac{\max\limits_{x_0 \le \xi \le x} \left| f''(\xi) \right|}{2} \cdot \frac{(\Delta x)_0}{a^n}$$

Для достижения заданной точности ε приближения производной при определенном числе вычислений можно использовать неравенство:

$$\left| \frac{(\Delta y)_n}{(\Delta x)_n} - \frac{(\Delta y)_{n-1}}{(\Delta x)_{n-1}} \right| < \varepsilon \qquad (4.3)$$

5.5. Использование многочленов Лагранжа для формул численного дифференцирования

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ и в точках $\{x_i\}$, где i=0, 1, …, n этого отрезка принимает значения $y_i=f(x_i)$, причем $a= x_0$, $b= x_n$.

Разность между соседними значениями аргумента x_i постоянна и определяется шагом $h = \frac{b-a}{n}$ разбиения отрезка на n частей, тогда $x_i= x_0 + i\cdot h$ $(x_{i+1}= x_i + h)$.

Найдем аппроксимации производных первого и второго порядка с помощью значений функций y_i в узловых точках x_i с погрешностью одного итого же порядка в зависимости от шага h.

Для того чтобы выразить значения производных через значения функции y_i в узлах интерполяции x_i, построим интерполяционный многочлен Лагранжа $L_m(x)$ степени m, удовлетворяющий условиям

$$L_m(x_k)= f(x_k)= y_k \quad (k=i,\ i+1,\dots,\ i+m\le n\ ).$$

Многочлен $L_m(x)$, интерполирует функцию $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+m}]$. Дифференцируя многочлен $L_m(x)$, получаем значения производных в точках $\{ x_k \}$ $(k=i, i+1,\dots, i+m)$.

Если m=1, то $L_1(x)$ - линейная функция, график которой, проходит через точки (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}). Тогда

$$L_1(x) = y_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = y_i \frac{x - x_{i+1}}{-h} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{h}$$

$$y'_i = y'_{i+1} \approx L'(x) = -\frac{y_i}{h} + \frac{y_{i+1}}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}.$$

Если m=2, то $L_2(x)$ - квадратичная функция, график которой парабола, проходящая через точки (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), (x_{i+2}, y_{i+2}). Вычислим первую и вторую производные многочлена $L_2(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+2}]$.

$$L_2(x) = y_i \frac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})} + y_{i+1} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+2})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2})} + y_{i+2} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i+2} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1})} =$$

$$= y_i \frac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})}{(-h)\cdot(-2h)} + y_{i+1} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+2})}{h\cdot(-h)} + y_{i+2} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2h\cdot h} =$$

$$= \frac{1}{2h^2}\left[y_i (x - x_{i+1})(x - x_{i+2}) - 2y_{i+1}(x - x_i)(x - x_{i+2}) + y_{i+2}(x - x_i)(x - x_{i+1})\right]$$

$$L'_2(x) = \frac{1}{2h^2}\left[y_i (2x - x_{i+1} - x_{i+2}) - 2y_{i+1}(2x - x_i - x_{i+2}) + y_{i+2}(2x - x_i - x_{i+1})\right]$$

$$L''_2(x) = \frac{1}{2h^2}\left[2y_i - 4y_{i+1} + 2y_{i+2}\right] = \frac{1}{h^2}\left[y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}\right]$$

Первая и вторая производные многочлена Лагранжа $L_2(x)$ в точках x_i, x_{i+1}, x_{i+2} являются приближениями соответствующих производных функции $f(x)$ в этих точках:

$$y'_i = f'(x_i) \approx L'_2(x_i) = \frac{1}{2h^2}\left[y_i (2x_i - x_{i+1} - x_{i+2}) - 2y_{i+1}(2x_i - x_i - x_{i+2}) + y_{i+2}(2x_i - x_i - x_{i+1})\right] =$$

$$= \frac{1}{2h^2}\left[y_i(-3h) - 2y_{i+1}(-2h) + y_{i+2}(-h)\right] = \frac{1}{2h}\left[-3y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2}\right] \tag{4.4}$$

$$y'_{i+1} = f'(x_{i+1}) \approx L'_2(x_{i+1}) = \frac{1}{2h}\left[-y_i + y_{i+2}\right]$$

$$y'_{i+1} = f'(x_{i+1}) \approx L'_2(x_{i+1}) = \frac{1}{2h}\left[y_i - 4y_{i+1} + 3y_{i+2}\right]$$

$$y''_i = y''_{i+1} = y''_{i+1} \approx L''_2(x) = \frac{1}{h^2}\left[y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}\right] \tag{4.5}$$

Если функция $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+2}]$ имеет непрерывную производную до третьего порядка включительно, то справедливо представление функции в виде суммы:

$$f(x)=L_2(x)+R_2(x), \tag{4.6}$$

где $R_2(x)$ –остаточный член интерполяционной формулы.

$$R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_i)(x - x_{i+1})(x - x_{i+2}), \qquad \xi \in (x_i; x_{i+2}).$$

В этом случае можно дать оценку погрешности приближений производных соотношениями (4.4) и (4.5). Дифференцируя (4.6), получим

$$f'(x)=L'_2(x)+R'_2(x), \tag{4.7}$$

$$f''(x)=L''_2(x)+R''_2(x). \tag{4.8}$$

Здесь

$$R'_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}\left[(x - x_{i+1})(x - x_{i+2}) + (x - x_i)(x - x_{i+2}) + (x - x_i)(x - x_{i+1})\right] \tag{4.9}$$

$$R''_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3}\left[(x - x_i) + (x - x_{i+1}) + (x - x_{i+2})\right]. \tag{4.10}$$

Погрешности при вычислении производных в точках x_i, x_{i+1}, x_{i+2} определяются из формул (4.9-4.10):

$$R'_2(x_i) = -2R'_2(x_{i+1}) = R'_2(x_{i+2}) = \frac{1}{3}h^2 f'''(\xi), \tag{4.11}$$

$$R_2''(x_i) = -h \cdot f'''(\xi), \quad R_2''(x_{i+1}) = 0, \quad R_2''(x_{i+2}) = h \cdot f'''(\xi). \qquad (4.12)$$

Таким образом, равенства (4.11) показывают, что погрешность аппроксимации первой производной $f'(x)$ с помощью формулы (4.4) имеют один и тот же порядок $O(h^2)$, и естественна следующая рекомендации по их применению на отрезке $[a;\ b]$ в точках $\{x_i\}$, i=0, 1, 2, …, n≥2.

$$\begin{aligned} y_0' &\approx \frac{1}{2h}\left[-3y_0 + 4y_1 - y_2\right] \\ y_i' &\approx \frac{1}{2h}\left[-y_{i-1} + y_{i+1}\right], \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ y_n' &\approx \frac{1}{2h}\left[y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n\right] \end{aligned} \qquad (4.13)$$

Из равенств (4.13) следует, что приближение второй производной с помощью формулы (4.5) имеет различный порядок в зависимости от h в разных точках: в точках x_i, x_{i+2} имеется погрешность порядка h, а в точке x_{i+1} порядок погрешности выше ($R_2''(x_{i+1})=0$).

В случае интерполяции функции $f(x)$, имеющей на отрезке на отрезке $[a;\ b]$ непрерывную производную до четвертого порядка включительно, можно получить погрешность интерполяции второй производной, имеющей порядок h^2 и одинаковую во всех точках, с помощью многочлена Лагранжа третьей степени $L_3(x)$ по четырем узлам интерполяции $\{x_k\}$, ($k=i$, i+1, i+2, i+3).

Опуская выкладки, приведем результаты для аппроксимации второй производной:

$$\begin{aligned} y_0'' &\approx \frac{1}{h^2}\left[2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3\right] \\ y_i'' &\approx \frac{1}{h^2}\left[y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}\right], \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ y_n' &\approx \frac{1}{h^2}\left[-y_{n-3} + 4y_{n-2} - 5y_{n-1} + 2y_n\right] \end{aligned} \qquad (4.14)$$

Пример. Значения функции $y = \sin x$ определены таблицей:

x	0	π/6	π/3
sin x	0	0,5	0,866

Требуется с помощью формул (4.13, 4.14) приближенно найти y′(0) и y′′(0) и оценить погрешность результатов вычислений.

Решение.

$$y'(0) \approx \frac{1}{2h}\left[-3y_0 + 4y_1 - y_2\right] = \frac{3}{\pi}\left[-3 \cdot 0 + 4 \cdot 0{,}5 - 0{,}866\right] \approx 1{,}05$$

$$R_2'(0) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \cdot f'''(\xi), \qquad 0 < \xi < \frac{\pi}{3}$$

$$т.к. \quad f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x$$

$$\left|f'''(x)\right| < 1, \quad то \quad \left|R_2'(0)\right| < \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = 0{,}09\ .$$

Итак, y′(0)≈1,05 ± 0,09 (точное значение y′(0)=cos 0 = 1).

Теперь воспользуемся формулой (4.11).

$$y''(0) \approx \frac{1}{h^2}\left[y_0 - 2y_1 + y_2\right] = \frac{36}{\pi^2}\left[-1 + 0{,}866\right] \approx -0{,}489$$

$$R_2''(0) = -\frac{\pi}{6} \cdot f'''(\xi), \qquad \left|R_2''(0)\right| < \frac{\pi}{6} \approx 0{,}52\ .$$

Для лучшей оценки производной второго порядка необходимо увеличить число узловых точек и выбрать меньший шаг.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с теоретическими сведениями.
2. Выполнить необходимые расчеты.

3. Оформить и представить результаты расчетов.

Форма представления результата:

Результаты представить в виде отчета в формате .docx.

Критерии оценки:

Задание выполнено без ошибок – оценка «отлично».

Задание выполнено правильно, но допущены 1-3 вычислительных ошибок – оценка «хорошо».

Задание выполнено небрежно, допущены ошибки – оценка «удовлетворительно».

Задание выполнено неправильно, допущены ошибки – оценка «неудовлетворительно».

Тема 3. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6 «ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Цель: освоить методы численного решения дифференциальных уравнений

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:
– решать дифференциальные уравнения первого порядка;
– оценивать погрешность численного решения.
Материальное обеспечение: пакет прикладных программ Microsoft Office.

Задание:

I. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка на равномерной сетке отрезка [a;b] один раз с шагом h=0,2, другой с шагом h=0,1 методами Эйлера, Эйлера-Коши и классическим методом Рунге-Кутта. Оценить погрешность численного решения по принципу Рунге. Сравнить численное решение с точным $\varphi(x)$. Результаты представить в виде таблицы.

1. $y' = \dfrac{1+xy}{x^2}, \quad y|_{x=1} = 0, \quad 1 \le x \le 2, \quad \varphi(x) = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right).$
2. $y' = y - \dfrac{2x}{y}, \quad y|_{x=0} = 1, \quad 0 \le x \le 1, \quad \varphi(x) = \sqrt{2x+1}.$
3. $y' = x + \dfrac{3y}{x}, \quad y|_{x=1} = 0, \quad 1 \le x \le 2, \quad \varphi(x) = x^2(x-1).$
4. $y' = xy, \quad y|_{x=0} = 1, \quad 0 \le x \le 1, \quad \varphi(x) = e^{x^2/2}.$
5. $y' = \dfrac{y^2+xy}{x^2}, \quad y|_{x=1} = 1, \quad 1 \le x \le 2, \quad \varphi(x) = x/(1-\ln x).$
3. $y' = \dfrac{1-y+\ln x}{x}, \quad y|_{x=1} = 0, \quad 1 \le x \le 2, \quad \varphi(x) = \ln x.$
7. $y' = \dfrac{x+y}{x}, \quad y|_{x=1} = 0, \quad 1 \le x \le 2, \quad \varphi(x) = x\ln x.$
8. $y' + 2xy = xe^{-x^2}, \quad y|_{x=0} = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad \varphi(x) = \dfrac{1}{2}x^2 e^{-x^2}.$
9. $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x, \quad y|_{x=0} = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad \varphi(x) = \sin x + e^{-\sin x} - 1.$
10. $y' + ytgx = \sin 2x, \quad y|_{x=0} = -1, \quad 0 \le x \le 1, \quad \varphi(x) = (1-2\cos x)\cos x.$
11. $xy' - y^2\ln x + y = 0, \quad y|_{x=1} = 1, \quad 1 \le x \le 2, \quad \varphi(x) = 1/(1+\ln x).$
12. $xy' = x + y + xe^{y/x}, \quad y|_{x=1} = 0, \quad 1 \le x \le 1.9, \quad \varphi(x) = x\ln\dfrac{x}{2-x}.$
13. $x^2y' - y = x^2 e^{\frac{x-1}{x}}, \quad y|_{x=1} = 1, \quad 1 \le x \le 2, \quad \varphi(x) = e^{\frac{x^2-1}{x}}.$
14. $(x^2+1)y' + xy - 1 = 0, \quad y|_{x=0} = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad \varphi(x) = \dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}.$
15. $xy' - y = \dfrac{x}{\ln x}, \quad y|_{x=e} = 0, \quad e \le x \le e+1, \quad \varphi(x) = x\ln\ln x.$

13. $xy' - y = x^2 \sin x, \quad y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} + 1, \quad \varphi(x) = \frac{\sin x - 1}{x} - \cos x$.

17. $y' + e^{x-y} = e^{x(1-x)} + 2x, \quad y\big|_{x=0} = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad \varphi(x) = x^2$.

18. $y' + e^{x-y} = e^{x(1-x)}, \quad y\big|_{x=0} = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad \varphi(x) = x^2$.

19. $xy' = y \ln y, \quad y\big|_{x=1} = e, \quad 1 \le x \le 2, \quad \varphi(x) = e^x$.

20. $xy' - y\ln(xy) - 1 = 0, \quad y\big|_{x=1} = e, \quad 1 \le x \le 2, \quad \varphi(x) = e^x / x$.

21. $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y, \quad y\big|_{x=1} = \frac{\pi}{2}, \quad 1 \le x \le 2, \quad \varphi(x) = 2x\, arctg\ x$.

22. $x^2 y' = (x-1)y, \quad y\big|_{x=1} = e, \quad 1 \le x \le 2, \quad \varphi(x) = xe^{1/x}$.

23. $(x^2+1)y' + xy = x(x^2+1), \quad y\big|_{x=\sqrt{2}} = 1, \quad \sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} + 1, \quad \varphi(x) = \frac{x^2+1}{3}$.

24. $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x, \quad y\big|_{x=e} = \frac{e^2}{2}, \quad e \le x \le e + 1, \quad \varphi(x) = \frac{x^2}{2} \ln x$.

25. $y' - y\, ctgx = \sin x, \quad y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} + 1, \quad \varphi(x) = (x - \frac{\pi}{2}) \sin x$.

II. Задачу Коши для данного дифференциального уравнения второго порядка преобразовать к задаче коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка. Найти решение последней задачи методом Рунге–Кутта на сетке отрезка [a;b]. Вычисления провести дважды с шагами h, h/2, полагая h =0,2. Найти численное решение дифференциального уравнения и оценить его погрешность с помощью правила Рунге. Сравнить решение с известным аналитическим решением $\varphi(x)$. Результаты представить в виде таблицы.

1. $xy'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0, \quad y\big|_{x=1} = e^2, \quad y'\big|_{x=1} = 2e^2, \quad 1 \le x \le 2, \quad \varphi(x) = e^{2x}$.

2. $x^2 y'' + xy' - y = 3x^2, \quad y\big|_{x=1} = 1, \quad y'\big|_{x=1} = 1, \quad 1 \le x \le 2, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - x + \frac{1}{x})$.

3. $x^2 y'' - 6y = 0, \quad y\big|_{x=1} = 1, \quad y'\big|_{x=1} = 3, \quad 1 \le x \le 2, \quad \varphi(x) = x^3$.

Краткие теоретические сведения:

Численное решение дифференциальных уравнений первого порядка

В прикладных задачах часто встречаются обыкновенные дифференциальные уравнения, точное решение которых найти не удается или оно не выражается через элементарные функции. Возникает необходимость найти решение приближенно.

3.1. Понятие о численном методе решения задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши:

$$y' = f(x, y), \tag{3.1}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{3.2}$$

Требуется найти численное решение $y=\varphi(x)$ в виде таблицы его приближенных значений для заданных значений аргумента x на некотором отрезке $[a, b]$ с указанной точностью.

Решение задачи Коши (3.1) будем искать на отрезке $[a, b]$. Отрезок $[a, b]$ разобьем на на n равных частей. Величина $h=(b-a)/n$ называется шагом интегрирования. Точки разбиения (узловые точки) располагаются равномерно и связаны соотношениями:

$$x_0 = a, \quad x_i = x_0 + i\,h, \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Пусть $y = \varphi(x)$ – искомое точное решение задачи Коши. Разложим его по формуле Тейлора на промежутке $[x_i, x_{i+1}]$

$$\varphi(x_{i+1}) = \varphi(x_i) + \varphi'(x_i)\cdot h + \frac{1}{2!}\varphi''(x_i)\cdot h^2 + \frac{1}{3!}\varphi'''(x_i)\cdot h^3 + O(h^4) \quad (3.3)$$

Производные стоящие в правой части равенства (3.3), можно найти из уравнения (1):

$\varphi'(x_i)=f(x_i,y_i)$, $\varphi''(x_i)=f_x'(x_i,y_i)$ и т. д.

Значение $\varphi(x_0)=y_0$ дано в начальном условии (3.2). По формуле (3.3) можно найти значение $\varphi(x_1)$, затем, зная $\varphi(x_1)$, найти $\varphi(x_2)$ и т. д. Однако практическое использование формулы (3.3) затруднительно, так как правая часть равенства (3.3) содержит бесконечно много членов. Поэтому на практике ограничиваются лишь несколькими первыми членами разложения Тейлора.

8.2. Метод Эйлера

Простейший метод решения дифференциальных уравнений. На практике используется довольно редко из-за относительно невысокой точности.

Приближенные значения численного решения задачи Коши (3.1) в узловых точках x_i обозначим y_i :

$$y_i \approx \varphi(x_i).$$

В методе Эйлера для подсчета y_{i+1} в равенстве (3.3) берут только первые два слагаемых и полагают

$$y_{i+1}= y_i+f(x_i,y_i)h, \quad (3.4)$$

при $x_{i+1} = x_i+h$.

Геометрическая интерпретация метода дана на рис. 3.1, где изображены интегральные кривые. Использование формулы (3.4) означает, что движение от точки $P_i(x_i, y_i)$ к точке $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ происходит не по самой интегральной кривой проходящей через точку P_i (она нам неизвестна), а по отрезку касательной к ней проведенной в этой точке. На каждом следующем шаге мы заново находим касательную к интегральной кривой (уже другой интегральной кривой семейства интегральных кривых). В результате получаем линию, которую называют ломаной Эйлера.

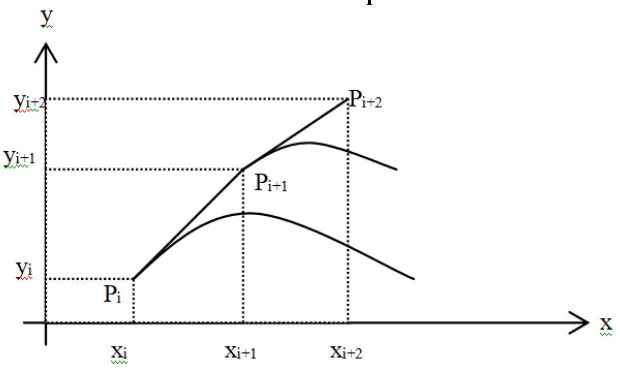


Рис.3.1.

3.3. Методы Рунге - Кутта

Для уменьшения погрешности метода использующего разложение искомого решения в ряд Тейлора (3.3), необходимо учитывать большее количество членов ряда. В зависимости от старшей степени, с которой учитываются члены ряда, построены вычислительные Рунге-Кутта разных порядков точности. Так метод Эйлера можно назвать методом Рунге-Кутта первого порядка.

Метод Рунге-Кутта второго порядка называют методом Эйлера-Коши. В этом случае в формуле (3.3) отбрасываются члены начиная с четвертого. Вычислительные формулы метода Эйлера-Коши:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, \tilde{y}_i)), \\ \tilde{y}_i &= y_i + f(x_i, y_i) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Геометрический смысл этого вычисления показан на рис. 3.2. Каждое очередное звено $P_i P_{i+1}$ ломаной стоится так:

1. В точке $P_i(x_i, y_i)$ определяем направление α_1 касательной к интегральной кривой проходящей через эту точку и значение $k_1 = \mathrm{tg}(\alpha_1)$. Проводим отрезок P_iP^1 по направлению α_1.
2. В середине $N_1(x_i+h/2,\ y_i+k_1\cdot h/2)$ отрезка P_iP^1 определяем направление α_2 касательной к интегральной кривой проходящей через эту точку и значение $k2 = \mathrm{tg}(\alpha_2)$. Проводим отрезок P_iP_{i+1} по направлению α_2.

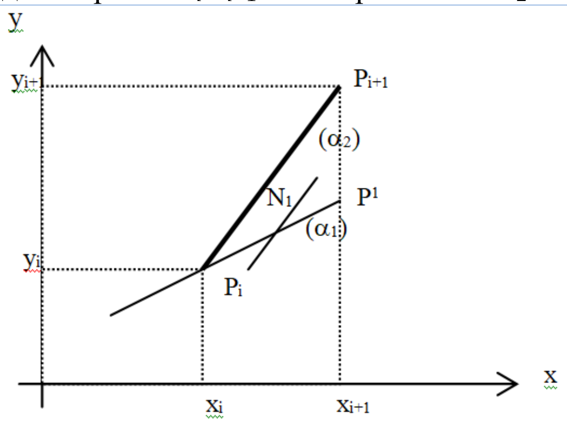


Рис. 3.2

Таким образом, мы производим пересчет, уточнение углового коэффициента звеньев ломаной. Уже из геометрического смысла ясно, что данный метод точнее метода Эйлера, так как здесь учитывается поворот касательной на интервале $[x_i, x_{i+1}]$.

Метод Рунге-Кутта четвертого порядка называют классическим методом Рунге-Кутта. Здесь получится еще более точный результат. Алгоритм решения задачи Коши:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$
$$k_1 = f(x_i, y_i), \qquad k_2 = f(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2}k_1), \tag{3.6}$$
$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2}k_2), \qquad k_4 = f(x_i + h,\ y_i + hk_3)$$

при $x_{i+1} = x_i + h$.

Геометрический смысл этого вычисления показан на рис.3.3. Каждое очередное звено $P_i P_{i+1}$ ломаной стоится так:

1. В точке $P_i(x_i, y_i)$ определяем направление α_1 касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку и значение $k_1 = \mathrm{tg}(\alpha_1)$. Проводим отрезок P_iP^1 по направлению α_1.
2. В середине $N_1(x_i+h/2,\ y_i+k_1\cdot h/2)$ отрезка P_iP^1 определяем направление α_2 касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку и значение $k2 = \mathrm{tg}(\alpha_2)$. Проводим отрезок P_iP^2 по направлению α_2.
3. В середине $N_2(x_i+h/2,\ y_i+k_2\cdot h/2)$ отрезка P_iP^2 определяем направление α_3 касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку и значение $k3 = \mathrm{tg}(\alpha_3)$. Проводим отрезок P_iP^3 по направлению α_3.
4. В точке $P^3(x_i+h, y_i+k_3\cdot h)$ определяем направление α_4 касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку и значение $k4 = \mathrm{tg}(\alpha_4)$.
5. Полученные четыре тангенса усредняются весами 1/6, 2/6, 2/6, 1/6 по формуле: $\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$. По этому окончательному направлению мы проводим отрезок из точки $P_i(x_i, y_i)$ в точку $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$.
6.

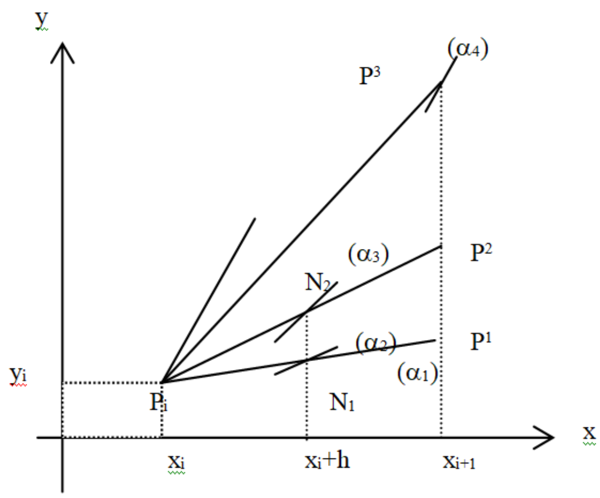


Рис. 3.3

Из геометрического смысла ясно, что данный метод намного точнее метода Эйлера и Эйлера-Коши.

3.4. Погрешность методов

При проведении вычислений возникают две погрешности:

1. **локальная погрешность**, т.е. погрешность на одном шаге, возникающая за счет перемещения не по интегральной кривой, а по касательной к ней;
2. **глобальная погрешность**, т.е. максимальная погрешность решения: $| \; y_n - \varphi(x_n) \, |$.

Говорят, что численный метод имеет **р-й порядок точности** по шагу h, если выполняется условие:

$$\max_{1 \le i \le n} \left| y_i - \varphi\left(x_i\right) \right| = Ch^p$$

где C – некоторая положительная постоянная, зависящая от правой части уравнения (1) и от рассматриваемого метода. **Р-й порядок точности означает** что, например, при уменьшении шага в 10 раз, погрешность уменьшится примерно в 10^p раз.

Для метода Эйлера локальная погрешность имеет порядок точности h^2 (второй порядок точности). Эта величина соответствует h в той степени, в которой h стоит в первом отброшенном члене в формуле Тейлора (3). Глобальная погрешность и метод Эйлера имеют порядок точности h (первый порядок точности).

Соответственно для метода Эйлера-Коши локальная погрешность имеет порядок точности h^3, глобальная погрешность имеет порядок точности h^2.

Для метода Рунге-Кутта четвертого порядка локальная погрешность имеет порядок точности h^5, глобальная погрешность имеет порядок точности h^4.

На практике оценку погрешности решения, найденного с шагом $h/2$, в точке $x_i \in [a,b]$ производят с помощью **правила Рунге**:

$$\left|\varphi(x_i) - y_i(h/2)\right| \approx \frac{\left|y_i(h) - y_{2i}(h/2)\right|}{2^p - 1}, \qquad (3.7)$$

где p – порядок точности численного метода (для метода Эйлера $p = 1$, для метода Эйлера-Коши $p = 2$, для метода Рунге-Кутта четвертого порядка $p = 4$). Получение оценки результата по формуле (3.7) вынуждает проводить вычисления дважды: один раз с шагом h, другой – с шагом $h/2$.

Если по условию задачи требуется найти численное решение с точностью ε (предельная абсолютная погрешность), то в этом случае начальный шаг вычислений h устанавливают с помощью неравенства

$$H^p < \varepsilon, \qquad (3.8)$$

при p=2, 3, 4 соответственно для методов Эйлера, Эйлера–Коши, Рунге-Кутта четвертого порядка. Условием достижения заданной точности вычислений, является выполнение неравенства

$$\frac{\left|y_i(h) - y_{2i}(h/2)\right|}{2^p - 1} < \varepsilon \qquad (3.9)$$

при всех i и где p=2, 3, 4 соответственно для методов Эйлера, Эйлера–Коши, Рунге-Кутта четвертого порядка.

3.5. Численное решение систем дифференциальных уравнений первого порядка

Рассмотрим задачу Коши для системы из n дифференциальных уравнений перового порядка

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_3' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \qquad (3.10)$$

при начальных условиях

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20}\ ,\ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0}\,. \qquad (3.11)$$

Если ввести векторные обозначения:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \ldots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \qquad Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \ldots \\ y_n'(x) \end{pmatrix},$$

$$F(x,Y) = \begin{pmatrix} f_1(x,Y) \\ f_2(x,Y) \\ \ldots \\ f_n(x,Y) \end{pmatrix}, \qquad Y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \ldots \\ y_{n0} \end{pmatrix}$$

то задача Коши (3.10)-(3.11) в векторной форме запишется так:

$$Y' = F(x,Y), \quad Y(x_0) = Y_0\,. \qquad (3.12)$$

Численное решение задачи Коши (8.12) состоит в том, что на отрезке [a,b] требуется получить приближенные значения координат вектора *Y(x)* в узловых точках x_i (*i=1, 2,…, m*) с шагом *h=(b-a)/m.*

Обозначим вектор, доставляющий приближенное решение, через $Y_i \approx Y(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$, а его координаты – через y_{ki} *(k=1, 2,…, n); i = 1, 2,…, m)* так, что $y_{ki} \approx y_k(x_i)$.

Рассмотрим численное решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений с помощью **метода Рунге-Кутта четвертого порядка**. Векторная форма алгоритма метода для задачи (3.12) соответствует формулам (3.6) и имеет вид

$$\begin{aligned}
&x_{i+1} = x_i + h \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)\\
&Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),\\
&K_1 = F(x_i, Y_i), \qquad K_2 = F(x_i + \frac{h}{2},\ Y_i + \frac{h}{2}K_1),\\
&K_3 = F(x_i + \frac{h}{2},\ Y_i + \frac{h}{2}K_2), \quad K_4 = F(x_i + h,\ Y_i + hK_3),
\end{aligned} \tag{3.13}$$

где векторы $K_j = \begin{pmatrix} k_{j1} \\ k_{j2} \\ \ldots \\ k_{jn} \end{pmatrix}$, $(j = 1, 2, 3, 4)$.

Оценка погрешность метода на практике осуществляется по **правилу Рунге** аналогично (3.7). Пусть

$$Y_i(h) = \begin{pmatrix} y_{1i}(h) \\ y_{2i}(h) \\ \ldots \\ y_{ni}(h) \end{pmatrix}, \qquad Y_i(h/2) = \begin{pmatrix} y_{1i}(h) \\ y_{2i}(h) \\ \ldots \\ y_{ni}(h) \end{pmatrix}$$

- значения численного решения в точке x_i , полученные для шагов h и $h/2$ соответственно; тогда погрешность d_i в точке x_i для вычислений с шагом $h/2$ выражается приближенным равенством

$$d_i(h/2) \approx \frac{\max\limits_{1 \le k \le n} \left\{ \left| y_{ki}(h) - y_{ki}(h/2) \right| \right\}}{2^p - 1}, \tag{3.14}$$

где p – порядок точности численного метода (p=4).

3.3. Численное решение дифференциальных уравнений высших порядков

Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка ставится так: найти решение уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{3.15}$$

при начальных условиях

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ldots\ , y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{3.16}$$

Задача Коши (3.15)-(3.16) для дифференциального уравнения n-го порядка приводится к задаче Коши для систем n дифференциальных уравнений первого порядка (3.10)-(3.11), к которой затем применяют численные методы решения систем.

Введем обозначения

$$z_1 = y,\ z_2 = z'_1,\ z_3 = z'_2,\ \ldots\ ,\ z_n = z'_{n-1}$$

и выразим функцию y(x) и ее производные до (n-1) порядка включительно через введенные функции:

$$y = z_1,\ y' = z_2,\ y'' = z_3,\ \ldots\ ,\ y^{n-1} = z_n.$$

Вместо задачи (8.15)-(8.16) имеем задачу для системы уравнений

$$\begin{cases} z'_1 = z_2 \\ z'_2 = z_3 \\ \quad \ldots \\ z'_{n-1} = z_n \\ z'_n = f(x,\ z_1, z_2, \ldots, z_n) \end{cases} \tag{3.17}$$

при начальных условиях

$$z_1(x_0) = y_0,\ z_2(x_0) = y'_0\ ,\ldots,\ z_n(x_0) = y_0^{(n-1)}\ . \qquad (3.18)$$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с теоретическими сведениями.
2. Выполнить необходимые расчеты.
3. Оформить и представить результаты расчетов.

Форма представления результата:

Результаты представить в виде отчета в формате .docx.

Критерии оценки:

Задание выполнено без ошибок – оценка «отлично».

Задание выполнено правильно, но допущены 1-3 вычислительных ошибок – оценка «хорошо».

Задание выполнено небрежно, допущены ошибки – оценка «удовлетворительно».

Задание выполнено неправильно, допущены ошибки – оценка «неудовлетворительно».