Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет
им. Г.И. Носова»
Многопрофильный колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор
С.А. Махновский
22 сентября 2016 г.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**

по учебной дисциплине
ЕН.01 МАТЕМАТИКА
для студентов специальности
44.02.06 Профессиональное обучение (по отраслям)
**Техническая эксплуатация гидравлических машин,
гидроприводов и гидропневмоавтоматики
(углубленной подготовки)**

Магнитогорск, 2016

ОДОБРЕНО:
Предметной комиссией
Математических и естественнонаучных дисциплин
Председатель Е.С. Корытникова
Протокол № 1 от 14 сентября 2016 г.

Составитель:
преподаватель ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И.Носова» МпК
Антропова Наталья Владимировна

ОДОБРЕНО:
Методической комиссией МпК
Протокол №1 от 22.09.2016 г.

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика».

Содержание практических работ ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 44.02.06 Профессиональное обучение (по отраслям). Техническая эксплуатация гидравлических машин, гидроприводов и гидропневмоавтоматики (углубленной подготовки) и овладению профессиональными компетенциями.

СОДЕРЖАНИЕ

1 Введение	4
2 Методические указания	5
Практическая работа 1	6.
Практическая работа 2	6.
Практическая работа 3	12
Практическая работа 4	12
Практическая работа 5	22
Практическая работа 6	22
Практическая работа 7	25
Практическая работа 8	25
Практическая работа 9	25
Практическая работа 10	30
Практическая работа 11	30
Практическая работа 12	35
Практическая работа 13	35
Практическая работа 14	35
Практическая работа 15	41
Практическая работа 16	41
Практическая работа 17	46

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки студентов составляют практические занятия. Являясь частью изучения учебной дисциплины, они призваны, экспериментально подтвердить теоретические положения и формировать общие и профессиональные компетенции, практические умения.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование практических умений - профессиональных (умений выполнять определенные действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности), необходимых в последующей учебной деятельности по общепрофессиональным дисциплинам.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения, обучающийся должен:

уметь:

- использовать математические методы при решении прикладных (профессиональных) задач;
- анализировать результаты измерения величин с допустимой погрешностью, представлять их графически;
- выполнять приближенные вычисления;
- проводить элементарную статистическую обработку информации и результатов исследований;

Содержание дисциплины ориентировано на подготовку студентов к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению профессиональными компетенциями:

ПК 1.3. Проводить лабораторно-практические занятия в аудиториях, учебно-производственных мастерских и в организациях.

ПК 3.1. Разрабатывать учебно-методические материалы (рабочие программы, учебно-тематические планы) на основе примерных.

ПК 4.2. Участвовать в разработке и внедрении технологических процессов.

ПК 4.3. Разрабатывать и оформлять техническую и технологическую документацию.

А также формированию ***общих компетенций***:

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы решения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Оценивать риски и принимать решения в нестандартных ситуациях.

ОК 4. Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, взаимодействовать с руководством, коллегами и социальными партнерами.

Выполнение студентами практических работ по учебной дисциплине «Математика» направлено на:

- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- формирование и развитие умений: наблюдать, сравнивать, сопоставлять, анализировать, делать выводы и обобщения, самостоятельно вести исследования, оформлять результаты в виде таблиц, схем, графиков;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для выполнения практических работ.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1.1. Множества, отношения между ними, операции над ними.

Практическое занятие № 1
Способы задания множеств

Цель работы:

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– использовать математические методы при решении прикладных (профессиональных) задач
– задавать множества разными способами
– совершать операции над множествами
– представлять их графически

Материальное обеспечение:

– комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;
– комплект дидактического раздаточного материала.

Задание:

Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

Краткие теоретические сведения:

Под множеством понимается совокупность объектов, объединенных по какому-нибудь общему признаку, свойству.

Примеры: *Множество студентов какой-либо учебной группы. Множество букв русского алфавита. Множество натуральных чисел.* Множества обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита. Например: B, C,…,X,Y,…,A1,B1,…

Объекты, из которых состоит множество, называются его ЭЛЕМЕНТАМИ. Элементы множества обозначаются строчными (малыми) буквами латинского

алфавита. Например: b,c,…,x,y,…,a1,b1,…

- пустое множество – множество, не содержащее ни одного элемента. Пример: b B – элемент b принадлежит множеству, c X – элемент c не принадлежит множеству X. Его роль аналогична роли нуля в арифметике чисел.

Множество, состоящее из некоторого натурального числа элементов, называется *конечным* множеством. Если не существует такого числа, определяющего количество элементов во множестве, то такое множество называется *бесконечным.* Так, множество автомобилей, выпущенных заводом, — конечное множество, а множество всех простых чисел — бесконечное множество.

Способы задания смотрите на рис.1

Рис.1

Принадлежность элемента данному множеству обозначается так: $a \in A$. Эта запись означает, что a является элементом множества A. Если же a не принадлежит множеству A, то пишут $a \notin A$. Другие обозначения: A с B — все множество A содержится в множестве B (в этом случае говорят, что A является *подмножеством* множества B); $A = B$ — любой элемент множества A является элементом множества B и наоборот, любой элемент множества B является элементом множества A.

Будем пользоваться обозначениями:

N - множество всех натуральных чисел;

Z - множество всех целых чисел;

Q - множество всех рациональных чисел;

R - множество всех действительных чисел;

C - множество всех комплексных чисел;

Z - множество всех неотрицательных целых чисел.

Запись $a \in A$ означает, что элемент a принадлежит множеству A.

Запись $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A. Множество В, все элементы которого принадлежат множеству A, называется подмножеством множества А, и при этом записывают $B \in A$ (см. рис. 1).

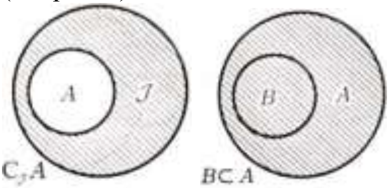


Рис. 1 Рис. 2

Всегда $A \in A$, так как каждый элемент множества, естественно, принадлежит А. Пустое множество, т. е. множество, не содержащее ни одного элемента, обозначим символом ø. Любое множество содержит пустое множество в качестве своего подмножества.

Если $A \subset B \wedge B \subset A$, то А и В называются равными множествами, при этом записывают А = В.

Если А⊂$\mathcal{J}$, то иногда дополнение множества В к множеству А называют разностью множеств А и В и обозначают *А\В* (см. рис. 3), т. е. $A \setminus B = \{x: \ x \in A \wedge x \notin B\}$.

Декартово произведение множеств.

Используя две цифры, например, 3 и 5, можно записать четыре двузначных числа: 35, 53, 33 и 55. Несмотря на то, что числа 35 и 53 записаны с помощью одних и тех же цифр, эти числа различные. В том случае, когда важен порядок следования элементов, в математике говорят об упорядоченных наборах элементов.

Упорядоченную пару, образованную из элементов *а* и *b*, принято записывать, используя круглые скобки: (а; *b*). Элемент *а* называют *первой координатой (компонентой) пары*, а элемент *b* - *второй координатой (компонентой) пары.*

Декартовым произведением множеств А и В называется множество всех пар, первая компонента которых принадлежит множеству А, а вторая компонента принадлежит множеству В.

Декартово произведение множеств *А* и *В* обозначают *А* х *В*. Используя это обо-значение, определение декартова произведения можно записать так:

$AB = \{(x; y) \mid xA$ и $yB\}$.

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения, получить оценку.

Ход работы:

1. Пусть $A = \{x \mid x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0\}$.

Тогда верным будет утверждение …

Решение: Множество *А* задано с помощью характеристического свойства: его элементы удовлетворяют равенству $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$.

Проверим истинность каждого утверждения.

Пусть $-1 \in A$,

тогда $(-1)^3 + 4 \cdot (-1)^2 + (-1) - 6 = -1 + 4 - 1 - 6 = -4 \neq 0$.

Значит, утверждение $-1 \in A$ ложное.

Пусть $0 \in A$, тогда $(0)^3 + 4 \cdot (0)^2 + (0) - 6 = 6 \neq 0$.

Значит, утверждение $0 \in A$ ложное.

Пусть $2 \in A$, тогда $(2)^3 + 4 \cdot (2)^2 + (2) - 6 = 8 + 4 \cdot 4 + 2 - 6 = 20 \neq 0$.

Значит, утверждение $2 \in A$ ложное.

Пусть $-2 \in A$, тогда

$(-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 + (-2) - 6 = -8 + 16 - 8 = 0$.

Значит, утверждение $-2 \in A$ верное.

2. Дано множество $A = \{n \mid n \in N \text{ и } n^2 + 2n \geq 10\}$. Тогда верным утверждением будет: «Множество *A* _________».

Решение: В задании указано свойство, которым обладают все элементы множества *A*: каждый элемент этого множества является натуральным числом и удовлетворяет неравенству $n^2 + 2n \geq 10$.

В этом случае говорят, что множество задано с помощью характеристического свойства.

Так как множество N бесконечно, то и множество *A* будет бесконечным.

Правильный ответ: «Множество *A* бесконечно и задано с помощью характеристического свойства».

Задачи для самостоятельного решения:

1. Множество **M** задано формулой: $M = \{x \mid n - 15\}, n \in N$. Задать данное множество перечислением его элементов.

2. Пусть ***A*** и ***B*** — два подмножества множества **M.** Множество **A** состоит из чисел множества **M** кратных **3,** множество **B** состоит из чисел множества **M** кратных **5**. Задать множества ***A*** и ***B*** формулами.

3. Пусть множество Q — множество диагоналей в правильном четырехугольнике ***ABCD.*** Опишите множество Q, перечислив все его элементы

4. Пусть $A = \{2\},\ B = \{5; 6; 7; 8\}$. Тогда прямое произведение $A \times B$ равно …

5. Даны множества:

$A = \{m, n, k, p\}$,

$B = \{k, p, l\}$,

$C = \{m, n, k, p, l\}$,

$D = \{k, p\}$,

$E = \{m, n\}$.

Тогда верным будет утверждение …

6. Пусть на рисунке изображены множества *A, B* и *C*. Тогда заштрихованная область соответствует множеству

7. Даны множества $A=\{a, b, c, d, e\}$ и $B=\{c, d, e, g, k\}$. Тогда множество $B \backslash A$ равно …

8. Дано множество $A = \{3, 12, 18, 10\}$. Из множества упорядоченных пар декартова произведения $A \times A$, выбрано подмножество ρ. Пара $(x, y) \in \rho$, если числа x и y при делении на 5 дают равные остатки.

Тогда количество пар, принадлежащих отношению ρ, равно …

Форма представления результата:

Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно

Тема 1.1. Множества, отношения между ними, операции над ними.

Практическое занятие № 2
Операции над множествами.

Цель работы:

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- использовать математические методы при решении прикладных (профессиональных) задач
- задавать множества разными способами
- совершать операции над множествами
- представлять их графически

Материальное обеспечение:

- комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;
- комплект дидактического раздаточного материала.

Задание:

Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

Краткие теоретические сведения:

Пересечение	**Объединение**	**Вычитание**
Пересечением множеств А и В называется новое множество, состоящие из элементов и множества А и множества В А={Р,И,С}, В={Р,О,С,А} А В={Р,С}	Объединением множеств А и В называется новое множество, состоящее из элементов или множества А или множества В А={Р,И,С}, В={Р,О,С,А} А В={Р,С,И,О,А}	Разностью множеств А и В называется множество, со-стоящее из элементов множества А, не принад-лежащих множеству В А={Р,И,С}, В={Р,О,С,А} А\В={И} В\А={О,А}

А=**{С,Т,О,Л,Б}, В={С,Т,О,Л}** **А В={С,Т,О,Л}**	А=**{С,Т,О,Л,Б}, В={С,Т,О,Л}** **А В={С,Т,О,Л,Б}**	А=**{С,Т,О,Л,Б}, В={С,Т,О,Л}** **А\В={Б} = В$_А$ - дополнение множества В до**
А={Н,О,С},В={С,О,Н} **А В=А=В={С,О,Н}**	**А={Н,О,С},В={С,О,Н}** **А В=А=В={С,О,Н}**	**А={Н,О,С},В={С,О,Н}** **А\В =**
А={С,О,Н}, В={М,И,Р} **А В=**	**А={С,О,Н}, В={М,И,Р}** **А В={С,О,Н,М,И,Р}**	**А={С,О,Н}, В={М,И,Р}** **А\В=А= {С,О,Н} В\А={М,И,Р}**

Объединением множеств А и В называется множество А⋂В(см. рис. 4) $A\bigcup B=\{x:\ x\in A\vee x\in B\}$.

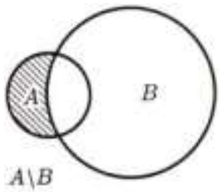


Рис. 3

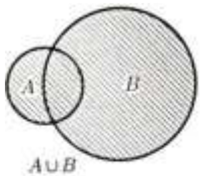


Рис. 4

Пересечением подмножеств А и В называется множество

$$A\bigcap B=\{x:\ x\in A\ x:\ x\in A\wedge x\in B\}.$$

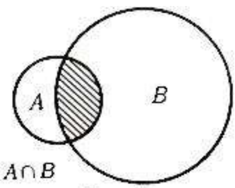


Рис. 5

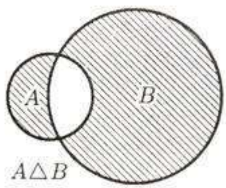


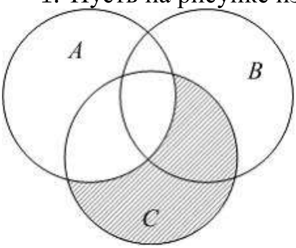
Рис. 6

Рисунки 1-6 называются диаграммы Эйлера-Венна.

Пример. Даны множества A={1, 2, 3, 4, 5} и B={3, 4, 5, 6, 7}. Их пересечением будет множество …

Решение: Проанализируем все предложенные варианты. 1) $D = A \cup B$. Множество D является объединением множеств A и B, то есть оно должно содержать все элементы множества A и все элементы множества B. Но это не так. Значит, утверждение, что $D = A \cup B$, ложное.
2) $C = A \cap B$. Множество C является пересечением множеств A и B, то есть оно должно содержать все элементы, которые принадлежат как множеству A так и множеству B. Но множество C содержит элементы m и n, которые есть во множестве A, но отсутствуют во множестве B. Поэтому утверждение $C = A \cap B$ ложное.
3) $E = B \setminus A$. Множество E является разностью множеств B и A, поэтому должно содержать элементы, которые принадлежат множеству B, и не принадлежат множеству A. Но элементы m и n принадлежат, наоборот, множеству A и не принадлежат множеству B. Утверждение $E = B \setminus A$ неверное, верным будет $E = A \setminus B$.
Решить самостоятельно:

1. Пусть на рисунке изображены множества A, B и C.



Тогда заштрихованная область соответствует множеству

2. Даны множества $A=\{a, b, c, d, e\}$ и $B=\{c, d, e, g, k\}$.
Тогда множество $B \setminus A$ равно …

3. Запишите элементы пересечения и объединения множеств А и В, если:
1)А= {к, е, р, ю, в, л, м}, В={м, л, ю, в, е, к, р}.
2) А= {к, л, м, н}, В={и, к, м, л, н, о, п}.
3) А= {3, 6, 9, 12,15}, В={6, 1, 2, 5, 9, 13}.
4) А= {1, 2, 3, 4,5,6}, В={12, 34, 56}.

4. Запишите элементы множества A\ B, если:

1) A= {к, l, f, t, u}, B={k,l,m, n, o, p }

2) A= {6, 3, 2, 5, 13}, B={6, 1, 2, 5, 9, 13 }

5. Какое множество является дополнением:

-множества хвойных деревьев до множества всех деревьев;

-множества четных чисел до множества натуральных чисел.

6. Известно, что A, B, C – подмножества универсального множества. Кроме того, множества A, B, C – попарно пересекаются. Изобразите при помощи кругов Эйлера следующие множества: (C\A) (C\B)

7. Даны множества: А - множество букв русского алфавита, В - множество гласных букв. В каком отношении находятся множества А и В? Изобразите данные множества при помощи кругов Эйлера.

8. Изобразите с помощью кругов Эйлера отношения между объемами понятий А: "Русский алфавит", В: "гласные буквы", С: "согласные буквы"

Форма представления результата:

Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

Тема 1.2. Элементы математической логики.

Практическое занятие № 3

Элементы математической логики. Способы обоснования истинности высказываний.

Цель работы:

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– использовать математические методы при решении прикладных (профессиональных) задач

– выполнять логические операции над высказываниями

Материальное обеспечение:

– комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;

– комплект дидактического раздаточного материала.

Задание:

Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

Краткие теоретические сведения:

Понятие высказывания

Высказывание – это основной элемент логики, повествовательное предложение (утверждение), содержание которого можно определить как истинное или ложное.

Об объектах можно судить верно, или неверно, то есть высказывание может быть истинным или ложным. Истинным будет высказывание, в котором связь понятий правильно отражает свойства и отношения реальных вещей.

Пример:

• Город Вашингтон – столица США (истинное);

• Число 2 является делителем числа 7 (ложное).

Высказывания могут быть представлены не только с помощью естественных языков, но и с помощью формальных языков (математических, химических и прочих знаков).

Пример:

• 5х5=25 (истинное);

• $H+O=H_2O$ (ложное).

К высказыванием не относятся предложения с переменной, вопросительные предложения, восклицательные предложения, предложения, зависящие от личностного восприятия, определения. Пример:

На улице идет дождь. Данное выражение не является высказыванием, так как в данном выражении не определены название города и улицы, не указано время. Поэтому нельзя установить истинность данного выражения.

Виды выражений

• Простое логическое выражение состоит из одного высказывания и не содержит логические операции.

Пример: В магазине можно купить молоко.

• Сложное логическое выражение содержит высказывания, объединенные логическими операциями.

Пример: В библиотеке можно взять книгу или встретить знакомого. (Объединение двух простых высказываний происходит при помощи логической операции или).

Простые логические высказывания обозначают заглавными латинскими буквами.

В качестве основных логических операций в сложных логических выражениях используются следующие:

• ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция);

• И (логическое умножение, конъюнкция);

• НЕ (логическое отрицание, инверсия).

Таким образом, основная задача логики высказываний заключается в том, чтобы на основании истинности или ложности простых высказываний определить истинность или ложность сложных высказываний.

Операции над высказываниями

- **Конъюнкцией** высказываний A и B называется составное высказывание A B истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания, входящие в состав конъюнкции

Рассмотрим пример. Пусть есть два высказывания: A = «*Москва — столица России*» и B = «*Сегодня солнечно*«. Тогда конъюнкция этих высказываний будет выглядеть так «*Москва — столица России* ***И*** *сегодня солнечно*«, а обозначаться так: $A \wedge B$

В алгебре множеств ***конъюнкции*** соответствует операция ***пересечения*** множеств, т.е. множеству получившемуся в результате умножения множеств ***A*** и ***B*** соответствует множество, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно двум множествам (рис 8.)

Таблица истинности	**Диаграмма Эйлера-Венна**

A	**B**	**A&B**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

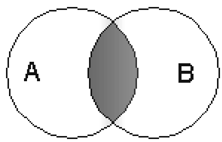


Рис 8.

Итак, если два высказывания соединены союзом ***"И"***, то полученное сложное высказывание истинно тогда и только тогда, когда истинны оба исходных высказывания. Запомнить довольно просто — **конъюнкция истинна только в одном случае — когда оба исходных высказывания истинны**. А еще проще запомнить таблицу истинности для конъюнкции, если представить ее **электрический аналог** — **два последовательно включенных выключателя**:

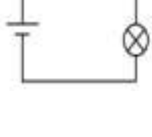


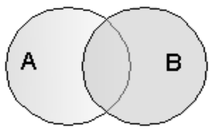
рис 9.

И теперь сразу понятно, что лампочка будет гореть только тогда, когда оба выключателя включены — цепь замкнута. Все также как и у конъюнкции (рис 9).

➢ **Дизъюнкцией** высказываний А и В называется составное высказывание А В ложное тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания, входящие в состав дизъюнкции

Рассмотрим пример. Пусть есть два высказывания: А = «*Париж — столица Франции*» и В = «*Сегодня пасмурно*«. Тогда **дизъюнкция этих высказываний** будет выглядеть так «*Париж — столица Франции* ***ИЛИ*** *сегодня пасмурно* «, а обозначаться так: $A \vee B$

В алгебре множеств ***дизъюнкции*** соответствует операция ***объединения*** множеств, т.е. множеству получившемуся в результате сложения множеств ***A*** и ***B*** соответствует множество, состоящее из элементов, принадлежащих либо множеству ***A***, либо множеству ***B*** (рис 10).

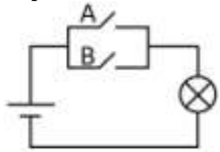
<table>
<tr><th>Таблица истинности</th><th>Диаграмма Эйлера-Венна</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>A + B</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>
</td><td>


</td></tr>
</table>

Рис 10.

Итак, если два высказывания соединены союзом ***"ИЛИ"***, то полученное сложное высказывание истинно когда истинно хотя бы одно из составляющих высказываний. Запомнить таблицу довольно просто — **дизъюнкция ложна только в одном случае — когда оба исходных высказывания ложны**. Так же можно запомнить **таблицу истинности**

для дизъюнкции, если представить ее **электрический аналог** — **два**



параллельно включенных выключателя: Рис 11.
По схеме сразу понятно, что лампочка будет гореть когда замкнуты оба выключателя, либо хотя бы один из них — аналогично дизъюнкции (рис 11).

- **Отрицанием** высказывания А называется высказывание А, которое ложно, если высказывание А истинно, и истинно, если высказывание А – ложно.

В алгебре множеств ***логическому отрицанию*** соответствует операция ***дополнения*** до универсального множества, т.е. множеству получившемуся в результате отрицания множества ***A*** соответствует множество, дополняющее его до универсального множества (рис 12).

<table>
<tr><th>Таблица истинности</th><th>Диаграмма Эйлера-Венна</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>A</th><th>¬ A</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td><td>


</td></tr>
</table>

Рис 12.
Итак, если исходное выражение истинно, то результат ***отрицания*** будет ложным, и наоборот, если исходное выражение ложно, то результат ***отрицания*** будет истинным.

- **Логическое следование (импликация)** - *в*ысказывание, составленное из двух высказываний при помощи связки ***«если ..., то ...»***, называется ***логическим следованием, импликацией*** (импликация от латинского implico - ***тесно связываю***).

A	B	A=>B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

A => B

"Из А следует В"

Итак, новое высказывание, полученное с помощью импликации, является ложным тогда и только тогда, когда условие (посылка *A*) - истинно, а следствие (заключение ***B***) - ложно и истинно во всех остальных случаях.

Пример: Дано сложное высказывание: «Если выглянет солнце, то станет тепло». Требуется записать его в виде логической формулы. Обозначим через ***A*** простое высказывание «выглянет солнце», а через ***B*** - «станет тепло». Тогда логической формулой этого сложного высказывания будет импликация: **A -> B**.

В алгебре логики логические связки и соответствующие им логические операции имеют специальные названия и обозначаются следующим образом:

Логическая связка	**Название логической операции**	**Обозначения**
не	Отрицание, инверсия	□□□□
и, а, но	Конъюнкция, логическое умножение	**&, • , □**
или	Дизъюнкция, логическое сложение	**V, +**
если ..., то	Импликация, следование	□□□□
тогда и только тогда, когда	эквивалентность, эквиваленция, равнозначность	□□□□□□□□□□

Примеры записи сложных высказываний с помощью обозначения логических связок:

1. "Быть иль не быть - вот в чем вопрос." (В. Шекспир) A V ¬ A <=> B
2. "Если хочешь быть красивым, поступи в гусары." (К. Прутков) A => B

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения, получить оценку.

Ход работы:

1. Установите, какие из следующих предложений являются логическими высказываниями, а какие — нет (объясните почему):

а) “*Солнце есть спутник Земли*”;
б) “*2+3□4*”;
в) “*сегодня отличная погода*”;
г) “*в романе Л.Н. Толстого “Война и мир” 3 432 536 слов*”;
д) “*Санкт-Петербург расположен на Неве*”;
е) “*музыка Баха слишком сложна*”;

ж) “*первая космическая скорость равна 7.8 км/сек*”;

з) “*железо — металл*”;

и) “*если один угол в треугольнике прямой, то треугольник будет тупоугольным*”;

к) “*если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей, то он прямоугольный*”.

Решение: Являются высказываниями: а), г), д), ж), з), и), к); не являются высказываниями: б); в); е).

2. Укажите, какие из высказываний предыдущего упражнения истинны, какие — ложны, а какие относятся к числу тех, истинность которых трудно или невозможно установить.

Решение Истинные: д), з), к);
ложные: а), и);
истинность трудно установить: г);
можно рассматривать и как истинное, и как ложное в зависимости от требуемой точности представления: ж).

3. Приведите примеры истинных и ложных высказываний:

а) из арифметики; **в)** из биологии; **д)** из геометрии;
б) из физики; **г)** из информатики; **е)** из жизни
.

Решение:
Истинные высказывания: **а)** “*2+2=4*”; **б)** *“сила притяжения тел обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними”* **в)** *“зайцы питаются растениями”*; **г)** *“бит - фундаментальная единица информации, используемая в теории информации”*; **д)** *“два треугольника равны, если две стороны и угол между ними одного треугольника равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника”*; **е)** *“понедельник - первый день недели.*

Ложные высказывания: **а)** *“4+3=5”*; **б)** *“тело падает на Землю с ускорением, пропорциональным своей массе”*; **в)** *“животные это неживая природа"* **г)** *“информатика - наука о термической обработке металлов”*; **д)** *“квадрат это фигура у которой пять сторон”*; **е)** *“лев - домашнее животное”*.

4. Сформулируйте отрицания следующих высказываний или высказывательных форм:

а) “*Эльбрус — высочайшая горная вершина Европы*”;

б) “*2>=5*”;

в) “*10<7*”;

г) “*все натуральные числа целые*”;

д) “*через любые три точки на плоскости можно провести окружность*”;

е) “*теннисист Кафельников не проиграл финальную игру*”;

ж) “*мишень поражена первым выстрелом*”;

з) “*это утро ясное и теплое*”;

и) “*число n делится на 2 или на 3*”;

к) “*этот треугольник равнобедренный и прямоугольный*”;

л) "*на контрольной работе каждый ученик писал своей ручкой*".

Решение: **а)** *“Эльбрус – не высочайшая горная вершина Европы”*; **б)** *“2<5”*; **в)** *“10>=7”*; **г)** *“не все натуральные числа целые”*; **д)** *“не через любые три точки на плоскости можно провести окружность”*; **е)** *“теннисист Кафельников проиграл финальную игру”*; **ж)** *“мишень не поражена первым выстрелом”*; **з)** *“это утро не ясное или оно не теплое”* (Пояснение. Пусть A = *“это утро ясное”*, а B = *“это утро теплое”*. Тогда *“это утро ясное и теплое”* можно записать как $A \bullet B$, отрицанием чего является , что соответствует высказывательной форме *“это утро не ясное или оно не не теплое*”; **и)** *“число n не делится на 2 и оно делится на 3”*; **к)** *“этот треугольник не равнобедренный или он не прямоугольный”*; **л)** *“не каждый ученик писал контрольную своей ручкой”* (вариант: *"кто-то писал контрольную не своей ручкой"*).

5. Определите, какие из высказываний (высказывательных форм) в следующих парах являются отрицаниями друг друга, а какие нет:

а) “*5<10*”, “*5>10*”;

б) “*10>9*”, “*10<=9*”;

в) “*мишень поражена первым выстрелом*”, “*мишень поражена вторым выстрелом*”;

г) “*машина останавливалась у каждого из двух светофоров*”, “*машина не останавливалась у каждого из двух светофоров*”,

д) “*человечеству известны все планеты Солнечной системы*”, “*в Солнечной системе есть планеты, неизвестные человечеству*”;

е) “*существуют белые слоны*”, “*все слоны серые*”;

ж) “*кит — млекопитающее*”, “*кит — рыба*”;

з) “*неверно, что точка A не лежит на прямой a*”, “*точка A лежит на прямой a*”;

и) “*прямая a параллельна прямой b*”, “*прямая a перпендикулярна прямой b*”;

к) “*этот треугольник равнобедренный и прямоугольный*”, “*этот треугольник не равнобедренный или он не прямоугольный*”.

Решение: **Являются отрицаниями друг друга: б), г), д), к); не являются отрицаниями друг друга: а), в), е), ж), з), и).**

6. Определите значения истинности высказываний:

а) “*наличия аттестата о среднем образовании достаточно для поступления в институт*”;

б) “*наличие аттестата о среднем образовании необходимо для поступления в институт*”;

в) “*если целое число делится на 6, то оно делится на 3*”;

г) “*подобие треугольников является необходимым условием их равенства*”;

д) “*подобие треугольников является необходимым и достаточным условием их равенства*”;

е) “*треугольники подобны только в случае их равенства*”;

ж) “*треугольники равны только в случае их подобия*”;

з) “*равенство треугольников является достаточным условием их подобия*”;

и) “*для того, чтобы треугольники были неравны, достаточно, чтобы они были неподобны*”;

к) “*для того, чтобы четырёхугольник был квадратом, достаточно, чтобы его диагонали были равны и перпендикулярны*”.

Решение: истины**: б), в), г), з), к), и);** ложны: **а), д), е), ж).**

7. Подставьте в приведённые ниже высказывательные формы вместо логических переменных *a, b, c, d* такие высказывания, чтобы полученные таким образом составные высказывания имели смысл в повседневной жизни:

а) *если* (a *или* (b *и* c)), *то* d;

б) *если* (*не* a *и не* b), *то* (c *или* d);

в) (a *или* b) *тогда и только тогда, когда* (c *и не* d).

8. Формализуйте предостережение, которое одна жительница древних Афин сделала своему сыну, собиравшемуся заняться политической деятельностью: “*Если ты будешь говорить правду, то тебя возненавидят люди. Если ты будешь лгать, то тебя возненавидят боги. Но ты должен говорить правду или лгать. Значит, тебя возненавидят люди или возненавидят боги*”.

Формализуйте также ответ сына: “*Если я буду говорить правду, то боги будут любить меня. Если я буду лгать, то люди будут любить меня. Но я должен говорить правду или лгать. Значит, меня будут любить боги или меня будут любить люди*”.

Решение:. Введем обозначения для логических высказываний: a – *“ты будешь говорить правду”*; b – *“тебя возненавидят люди”*; c – *“тебя возненавидят боги”*. Договоримся считать, что некоторое заданное высказывание *x* истинно, если нет оговорки. Тогда предостережение матери можно записать так:______. А ответ сына – так:_____.

9. Пусть a = “*это утро ясное*”, а b = “*это утро теплое*”. Выразите следующие формулы на обычном языке:

Решение:

а) *“это утро ясное и тёплое”*;

ж) *“это утро не ясное или не тёплое”*;

б) *“это утро ясное и оно не*

з) *“это утро не ясное и не*

тёплое”;

тёплое”;

в) *“это утро не ясное и оно не тёплое”*;

г) *“это утро не ясное или оно тёплое”*;

д) *“это утро ясное или оно не тёплое”*;

е) *“это утро не ясное или оно не тёплое”*;

и) *“это утро ясное или не тёплое”*;

к) *“если это тро ясное, то оно не тёплое”*;

л) *“если это утро не ясное, то оно тёплое”*;

м) *“это утро ясное и не тёплое”*.

Задания для самостоятельной работы:

1. Даны простые высказывания:

A: “Петя умеет плавать”

B: “Сергей умеет прыгать”

C: “Алеша умеет стрелять”

Даны формулы сложных высказываний, составленные из этих простых. Прочтите их, используя смысл каждого простого высказывания:

1. $A+B\cdot \overline{C}$

2. $\overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}$

3. $A\cdot B\cdot \overline{C}$

4. $A\cdot \overline{B}\cdot C$

5. $A\cdot \overline{C}\cdot \overline{B}$

6. $\overline{A\cdot B\cdot C}$

2. Даны простые высказывания:

A: “Данное число не кратное 3”

B: “Данное число больше 50”

Прочтите сложные высказывания:

1). $A\cdot \overline{B}$ 2). $\overline{A\cdot B}$ 3). $\overline{A}\cdot \overline{B}$

3. В состав истинного логического произведения входят три простых высказывания - A,B,C. Известно, что A и B - истинны. Может ли высказывание C быть одним из следующих:

а) “Дважды два равно семи”.

б) “Слоны живут в Африке и Индии”.

в) “5x + 3 = 11x”.

4. Дано высказывание: “Иванов является членом сборной команды “Алгоритм”. Какое из следующих высказываний есть логическим отрицанием данного?

а). Не Иванов является членом сборной команды “Алгоритм”.

б). Иванов является членом сборной команды не “Алгоритм”.

в). Иванов не является членом сборной команды “Алгоритм”.
г). Неверно, что Иванов является членом сборной команды “Алгоритм”.

5. Определите значения истинности высказываний:
а). “Если 16 делится на 4, то 16 делится на 2”.
б). “Если 17 делится на 4, то 17 делится на 2”.
в). “Если 18 делится на 4, то 18 делится на 2”.
г). “Если 18 делится на 2, то 18 делится на 4”.
д). “Если $2 \cdot 2=5$, то 8^3 № 500”.
е). “Если $2 \cdot 2=4$, то $7^2 =81$”.

6. Из двух данных высказываний a и b постройте составное высказывание, которое было бы:
а) истинно тогда и только тогда, когда оба данных выказывания ложны;
б) ложно тогда и только тогда, когда оба данных высказывания истинны.

Форма представления результата:

Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

Тема 1.2. Элементы математической логики.

Практическое занятие № 4
Формулы логики высказывания

Цель работы:

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– использовать математические методы при решении прикладных (профессиональных) задач

– выполнять логические операции над высказываниями

Материальное обеспечение:

– комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;

– комплект дидактического раздаточного материала.

Задание:

Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

Краткие теоретические сведения:

Построение таблиц истинности для логических функций

Алгебра логики – раздел математической логики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности или ложности) и логических операций над ними. Алгебра логики возникла в середине XIX века в трудах английского математика Джорджа Буля. Буль первым показал, что существует аналогия между алгебраическими и логическими действиями, так как и те, и другие предполагают лишь два варианта ответов – истина или ложь, нуль или единица.

На основе анализа логической связи между высказываниями делается логический вывод. Для получения логического вывода составляется *таблица истинности*, в которой записывают все возможные комбинации каждого простого высказывания.

Работа ЭВМ как автоматических устройств основана исключительно на математически строгих правилах выполнения команд, программ и интерпретации данных. Тем самым работа компьютеров допускает строгую однозначную проверку правильности своей работы в плане заложенных в них процедур и алгоритмов обработки информации. Это позволяет использовать математический аппарат для анализа и разработки логических устройств вычислительной техники. Функцией логических переменных называют взаимосвязь логических переменных по законам логики. Значения входных переменных и выходных функций связаны некоторым преобразованием, которое реализует логическую функцию.

Логические операции

Инверсия (логическое отрицание)

Операция, выражаемая словом "не", называется *логическим отрицанием (инверсией)* делает истинное выражение ложным и, наоборот, ложное – истинным. Обозначается « $\overline{\ }$ ».

Обозначение: НЕ, О*A*, $\overline{A}$, NOT *A*

Таблица истинности для логического выражения *A* имеет вид

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Конъюнкция (логическое умножение)

Операция, выражаемая связкой *"и",* называется *логическим умножением* (конъюнкцией) и обозначается " U" (может также обозначаться знаками «?» (точка) или &). Высказывание AUB истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания *A* и *B* истинны.

Обозначение: *A* и *B*, *A*U*B*, *A*?*B*, *A* AND *B*

Таблица истинности для логических переменных *A* и *B*

A	*B*	*A∧B*
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**0**
0	**0**	**0**

Дизъюнкция (логическое сложение)

Операция, выражаемая связкой "или" (в неисключающем смысле этого слова), называется логическим сложением (дизъюнкцией) и обозначается знаком U (или +). Высказывание *A* U *B* ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания *A* и *B* ложны.

Обозначение: *A* ИЛИ *B, A*U*B, A*+*B, A* OR *B*

Таблица истинности для логических переменных A и B

A	*B*	*A* **U** *B*
1	**1**	**1**
1	**0**	**1**
0	**1**	**1**
0	**0**	**0**

В алгебре логики любую логическую функцию можно выразить через основные логические операции, записать ее в виде логического выражения и упростить ее, применяя законы логики и свойства логических операций. По формуле логической функции легко рассчитать ее таблицу истинности. Необходимо только учитывать порядок выполнения логических операций (приоритет) и скобки. Операции в логическом выражении выполняются слева направо с учетом скобок. Приоритет выполнения логических операций:

- инверсия,
- конъюнкция,
- дизъюнкция.

Задание 1.

Построить таблицу истинности для логической функции $F = A \wedge (B \vee \overline{B} \wedge \overline{C})$

1. Определить *количество строк* в таблице истинности, которое равно количеству возможных комбинаций значений логических переменных, входящих в логическое выражение: количество строк = 2*n*, где n – количество переменных

Количество логических переменных – 3 (*A*, *B*, *C*) поэтому количество строк – 2*n* = 8.

A	$\overline{B}$	C	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{B}\wedge\overline{C}$	$B\vee\overline{B}\wedge\overline{C}$	$A\wedge(B\vee\overline{B}\wedge\overline{C})$
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

2. Определить *количество столбцов*:
количество столбцов=количество переменных+количество операций.
Количество логических операций -5 (умножение – 2, сложение – 1, отрицание – 2), поэтому количество столбцов 3+5=8
3. *Построить таблицу истинности* с указанным количеством строк и столбцов, обозначить столбцы и внести возможные наборы значений исходных логических переменных.

A		C	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{B}\wedge\overline{C}$	$B\vee\overline{B}\wedge\overline{C}$	$A\wedge(B\vee\overline{B}\wedge\overline{C})$
0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1

4.*Заполнить таблицу истинности* по столбцам, выполняя базовые логические операции в необходимой последовательности и в соответствии с их таблицами истинности

Задание 2.

Построить таблицы истинности для логических функций

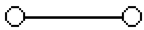
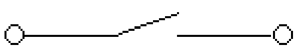
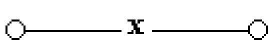
1) $F = A\vee\overline{B}\wedge(\overline{A\vee B})$.

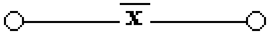
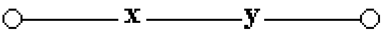
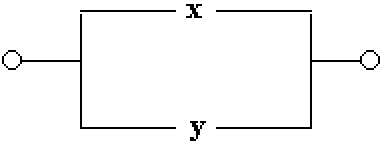
2) $F = \overline{A} \wedge B \vee (\overline{A \wedge B}).$

3) $F = A \wedge B \wedge (C \vee \overline{A \wedge B}).$

Часть 2. Построение логических выражений для переключательных схем.
Переключательная схема — это схематическое изображение некоторого устройства, состоящего из переключателей и соединяющих их проводников, а также из входов и выходов, на которые подаётся и с которых снимается электрический сигнал.
В компьютерах и других автоматических устройствах широко применяются электрические схемы, содержащие сотни и тысячи переключательных элементов: реле, выключателей и т.п. При разработке схем используется аппарат алгебры логики.
Каждый переключатель имеет только два состояния: замкнутое и разомкнутое. Переключателю **X** поставим в соответствие логическую переменную **x**, которая принимает значение 1 в том и только в том случае, когда переключатель **X** замкнут и схема проводит ток; если же переключатель разомкнут, то **x** равен нулю.

Будем считать, что два переключателя **X** и $\overline{\mathbf{X}}$ связаны таким образом, что когда **X** замкнут, то $\overline{\mathbf{X}}$ разомкнут, и наоборот. Следовательно, если переключателю X поставлена в соответствие логическая переменная **x**, то переключателю $\overline{\mathbf{X}}$ должна соответствовать переменная $\overline{\ }$.
Всей переключательной схеме также можно поставить в соответствие логическую переменную, равную единице, если схема проводит ток, и равную нулю — если не проводит. Эта переменная является функцией от переменных, соответствующих всем переключателям схемы, и называется **функцией проводимости**.
Функции проводимости F некоторых переключательных схем:

1)		Схема не содержит переключателей и проводит ток всегда, следовательно **F=1**;
2)		Схема содержит один постоянно разомкнутый контакт, следовательно **F=0**;
3)		Схема проводит ток, когда переключатель **x** замкнут, и не проводит, когда x разомкнут, следовательно, **F(x) = x**;

4)		Схема проводит ток, когда переключатель **x** разомкнут, и не проводит, когда x замкнут, следовательно, **(x) =** $\bar{x}$;
5)		Схема проводит ток, когда оба переключателя замкнуты, следовательно, **F(x,y) = x Uy**;
6)		Схема проводит ток, когда хотя бы один из переключателей замкнут, следовательно, **F(x,y)=x U y;**

Любая сложная схема может быть преобразована в отдельные группы и представлена в виде логических функций нескольких переменных.

Задание 3.

Определить и проанализировать функцию проводимости переключательной схемы

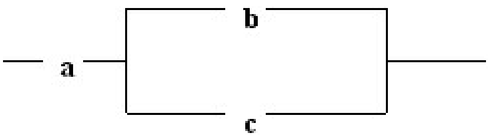


рис.1

Функция проводимости имеет вид: **F(a,b,c) = aU(bUc)**

Построим таблицу истинности

a	b	c	bUc	aU(bUc)
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Анализируя таблицу истинности, можно сделать логический вывод, что для прохождения тока необходимо и достаточно, чтобы были замкнуты переключатели **a** и **b** или **a** и **c**, или все три **a**, **b**, **c**.

Задание 4.

Определить и проанализировать функции проводимости переключательных схем.

1)

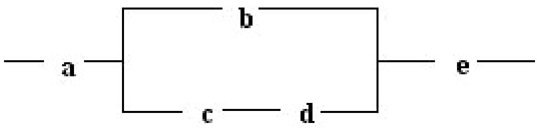


рис. 2

2)

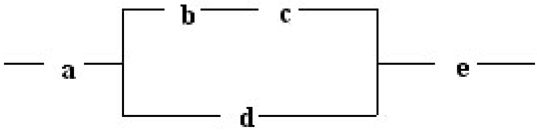


рис. 3

3)

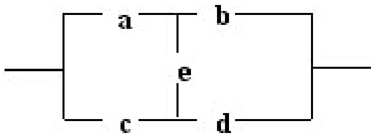


рис. 4

Форма представления результата:

Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

Раздел 2. Числа и величины. Положительная скалярная величина. Стандартные единицы величин

Практическое занятие № 5

Положительная скалярная величина. Процесс измерения величин. Стандартные единицы величин и соотношения между ними.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– использовать математические методы при решении прикладных (профессиональных) задач

– анализировать, сравнивать результаты измерения величин

– вычислять цену деления измерительных приборов

– использовать стандартные единицы величин при решении задач

Материальное обеспечение:

– комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;

– комплект дидактического раздаточного материала.

Задание:

Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

Краткие теоретические сведения:

Понятие положительной скалярной величины

Длина, площадь, масса, скорость, стоимость — величины. Величины — это особые свойства реальных объектов или явлений. Однородные величины выражают одно и то же свойство объектов некоторого множества. Разнородные величины выражают различные свойства объектов. Так, длина и площадь — это разнородные величины.

Величины — длина, площадь, масса и другие обладают рядом свойств:

1. Любые две *величины одного рода сравнимы:* они либо равны, либо одна меньше другой.
2. Величины одного рода можно *складывать,* в результате сложения получится величина того же рода.
3. Величину *умножают на действительное число,* получая в результате величину того же рода.
4. Величины одного рода *вычитают.*
5. Величины одного рода *делят,* определяя частное через произведение величины на число: *частным* величин a и b называется такое неотрицательное действительное число x, что $a = x \cdot b$.

2. Измерение величин.

Измерение заключается в сравнении данной величины с некоторой величиной того же рода, принятой за единицу. В результате измерения величина получает определенное численное значение при выбранной единице.

Вообще *если дана величина а и выбрана единица величины е, то в результате измерения величины а находят такое действительное число х, что а =х·е. Это число х называют численным значением величины а при единице величины е.*

Величины, которые вполне определяются одним численным значением, называются *скалярными величинами.*

Стандартные единицы величин и соотношения между ними

Некоторые единицы, не входящие в СИ, по решению Генеральной конференции по мерам и весам «допускаются для использования совместно с СИ».

Наименование	**Наименование**		**Обозначение**	
	русско	**французское/анг**	**русск**	**международн**
Длина	метр	mètre/metre	м	m
Масса	килограмм	kilogramme/kilogram	кг	kg
Время	секунда	seconde/second	с	c
Сила электрического тока	ампер	ampère/ampere	А	A
Термодинамическая температура	кельвин	kelvin	К	K
Количество вещества	моль	mole	моль	mol
Сила света	кандела	candela	кд	cd

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения, получить оценку.

Ход работы:

1) Начертите круг радиуса 3см на клетчатой бумаге и найдите его площадь, используя клетчатую бумагу как палетку, состоящую из квадратов со стороной 1см. Вычислите площадь этого круга по формуле,

принял π=3.14

2) Площадь фигуры 87, 678 $см^2$. Каким будет численное значение площади этой фигуры, если измерить ее в квадратных дециметрах, в квадратных миллиметрах?

3) Углы ВАН и РАМ – прямые. Угол РАН равен а°. Найдите величину угла ВАМ.

4) Внутри прямого угла провели луч. Вычислите градусную меру каждого из полученных углов, если половина одного из них равна трети другого

5) Постройте отрезок, длина которого 5,8Е. Каким будет численное значение длины этого отрезка, если единицу длины Е увеличить в 3 раза, уменьшить в 1,5 раза.

6) Длину стола измеряли сначала в сантиметрах, потом в дециметрах. В первом случае получили число на 108 больше, чем во втором. Чему равна длина стола?

Форма представления результата:

Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

Раздел 3. Основы численных методов.
Приближенные значения величин.

Практическое занятие № 6

Приближенные значения величин. Абсолютная и относительная погрешности. Правила приближенных вычислений

Цель работы:

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– использовать математические методы при решении прикладных (профессиональных) задач

– выполнять приближенные вычисления

– применять правила приближенных вычислений

– анализировать результаты измерения величин с допустимой погрешностью, представлять их графически

Материальное обеспечение:

– комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;
– комплект дидактического раздаточного материала.

Задание:

Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

Краткие теоретические сведения:

Действительное число - любое положительное, отрицательное число или нуль. Посредством действительных чисел выражаются результаты измерения всех физических величин.

Результат измерений подсчетов и вычисления являются числами. Числа полученные в результате измерения лишь приблизительны с некоторой точностью характеризуют искомые величины.

Погрешностью называют разность точного и приближенного знач величины.

Абсолютная погрешность - это разность между измеренным и истинным значениями измеряемой величины. Абсолютная погрешность выражается в единицах измеряемой величины.

Относительная погрешность — это отношение абсолютной погрешности измерения к истинному (действительному) значению измеряемой величины (она обычно выражается в процентах).

Правила вычислений

1. **При сложении и вычитании** приближенных чисел окончательный результат округляют так, чтобы он не имел значащих цифр в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из приближенных данных.

2. **При умножении** следует округлять сомножители так, чтобы каждый из них содержал столько значащих цифр, сколько их имеет сомножитель с наименьшим числом таких цифр.

3. **При возведении в квадрат** или куб следует в степени брать столько значащих цифр, сколько их имеется в основании степени.

4. **При умножении** следует округлять сомножители так, чтобы каждый из них содержал столько значащих цифр, сколько их имеет сомножитель с наименьшим числом таких цифр.

5. **При вычислении** сложных выражений следует применять указанные правила в соответствии с видом производимых действий.

Кроме того, при обработке результатов используются ***правила нахождения погрешности*** суммы, разности, произведения и частного.

Правило 1. Предельная абсолютная погрешность суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей отдельных слагаемых, но при значительном числе погрешностей слагаемых обычно происходит взаимная компенсация погрешностей, поэтому истинная погрешность суммы лишь в исключительных случаях совпадает с предельной погрешностью или близка к ней.

- ***Правило 2.*** Предельная абсолютная погрешность разности равна сумме предельных абсолютных погрешностей уменьшаемого или вычитаемого.

- ***Правило 3.*** Предельная относительная погрешность суммы (но не разности) лежит между наименьшей и наибольшей из относительных погрешностей слагаемых.

Если все слагаемые имеют одну и ту же предельную относительную погрешность, то и сумма имеет ту же предельную относительную погрешность. Иными словами, в этом случае точность суммы (в процентном выражении) не уступает точности слагаемых.

В противоположность сумме разность приближенных чисел может быть менее точной, чем уменьшаемое и вычитаемое. Потеря точности особенно велика в том случае, когда уменьшаемое и вычитаемое мало отличаются друг от друга.

- ***Правило 4.*** Предельная относительная погрешность произведения приближенно равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей: $\delta=\delta_1+\delta_2$, или, точнее, $\delta=\delta_1+\delta_2+\delta_1\delta_2$ где δ – относительная погрешность произведения, $\delta_1\delta_2$ - относительные погрешности сомножителей.

• ***Правило 5.*** Предельная относительная погрешность частного приближенно равна сумме предельных относительных погрешностей делимого и делителя. Точная величина предельной относительной погрешности всегда превышает приближенную. Процент превышения примерно равен предельно относительной погрешности делителя.

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения, получить оценку.

Ход работы:

1. Найти сумму, разность, произведение и частное приближенных чисел и границы абсолютной и относительной погрешностей результата:

1) $a_1 = 25{,}74 \pm 0{,}2$; $a_2 = 96{,}42 \pm 0{,}3$.

2) $a_1 = 37{,}375 \pm 0{,}03$; $a_2 = 3{,}042 \pm 0{,}004$.

3) $a_1 = 879{,}03 \pm 0{,}1$; $a_a = 653{,}84 \pm 0{,}4$.

2. Выполнить действия, округляя промежуточные результаты до четырех цифр, и сравнить результаты: (0,3644 + 423)-0,125 и 0,364-0,125 4 0,423-0,125.

3. При вычислении значения выражения $z = 8x - 2y$ данные в условии задачи значения $x = 50{,}4$ и $y = 100{,}3$ округлили до целых и получили $z = 8 \cdot 50 - 2 \cdot 100 = 200$. Тогда абсолютная погрешность полученного результата равна …

Решение: модуль разности между точным числом и его приближенным значением называется абсолютной погрешностью приближенного значения числа. Значит, абсолютная погрешность числа 50 равна $|50{,}4 - 50| = 0{,}4$ и абсолютная погрешность числа 100 равна $|100{,}3 - 100| = 0{,}3$. Абсолютная погрешность суммы и разности приближенных чисел равна сумме абсолютных погрешностей. Тогда абсолютная погрешность полученного числа 200 будет равна $8 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 = 3{,}8$.

4. Известно, что ребра прямоугольного параллелепипеда равны 56 см, 19 см и 122 см. Для упрощения вычислений эти числа округлили до 50 см, 20 см и 120 см соответственно. Нашли объем $V = 60 \cdot 20 \cdot 120 = 144000$ (куб. см.). Полученный результат имеет относительную погрешность, равную …

Решение: относительная погрешность приближенного положительного числа равна отношению абсолютной погрешности числа к точному значению этого числа.
Так как точное значение числа, как правило, неизвестно, то под относительной погрешностью понимают отношение абсолютной погрешности числа к его приближенному значению.

Тогда относительные погрешности чисел 50, 20 и 120 равны $\delta_1 = \frac{\Delta_1}{50} = \frac{|56-50|}{60} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$,

$\delta_2 = \frac{\Delta_2}{20} = \frac{|19-20|}{20} = \frac{1}{20}$,

$\delta_3 = \frac{\Delta_3}{120} = \frac{|122-120|}{120} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$; соответственно.

Относительная погрешность произведения приближенных чисел равна сумме относительных погрешностей сомножителей. Значит, $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$.

5. Пусть *a=3,8* и *b=6,2*. Необходимо найти значение *a+4b*. Сначала числа округлили до целых, а потом проделали вычисления. Получили $3,8 + 4 \cdot 6,2 \approx 4 - 4 \cdot 6 = -20$.

Тогда абсолютная погрешность полученного результата равна …

<u>Решение:</u> модуль разности между точным числом a и его приближенным значением x называется абсолютной погрешностью приближенного значения числа x и обозначается Δx. Имеем $x = 4,\ y = 6$.

$\Delta x = |3,8 - 4| = 0,2$.

$\Delta y = |6,2 - 6| = 0,2$.

Абсолютная погрешность полученного результата можно найти по формуле $\Delta(x - 4y) = \Delta x + 4 \cdot \Delta y$.

Получим: $\Delta(x - 4y) = 0,2 + 4 \cdot 0,2 = 1$.

Задачи для самостоятельной работы:

1. Модуль разности между точным числом *a* и его приближенным значением *x* называется абсолютной погрешностью приближенного значения числа *x* и обозначается Δx.

Имеем $x = 9,\ y = 9$.

$\Delta x = |9,2 - 9| = 0,2$.

$\Delta y = |8,9 - 9| = 0,1$.

2. При измерении линейкой длины и ширины фанерного листа были получены размеры *a*=120 см. и *b*=60 см. Известно, что погрешность измерения линейкой равна 2 см.

Была найдена площадь листа S=120·60=7200 кв.см. Полученный результат имеет относительную погрешность равную …

3) Пусть *a=3,8* и *b=6,2*.

Необходимо найти значение *a+4b*.

4) Сначала числа округлили до целых, а потом проделали вычисления. Получили $3,8+4\cdot 6,2\approx 4-4\cdot 6=-20.$
Тогда абсолютная погрешность полученного результата равна …

5) Вычислили значение функции $f(x;y)=x^3y$ при $x=2$ и $y=5,$ получили результат 40.

6) Известны относительные погрешности чисел 2 и 5:
$\delta_x=0{,}01;\ \delta_y=0{,}04.$

Тогда относительная погрешность полученного результата равна …

7) Форма записи рациональной дроби $\frac{3}{14}$ в виде бесконечной десятичной дроби имеет вид …
Поделить числитель дроби на знаменатель:

Форма представления результата:

Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

Раздел 3. Основы численных методов. Приближенные значения величин.

Практическое занятие № 7
Проект по теме
«Оценка границ погрешности при измерениях силы тока»

Цель работы:

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– использовать математические методы при решении прикладных (профессиональных) задач

– выполнять приближенные вычисления

– применять правила приближенных вычислений

– анализировать результаты измерения величин с допустимой погрешностью, представлять их графически

Материальное обеспечение:

– комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;

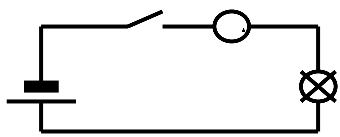
– комплект дидактического раздаточного материала.

Задание:

Цель работы: Приобретение умений самостоятельно рассчитывать границы абсолютной и относительной погрешностей измерений по приведенным данным.

Проблема: В некотором эксперименте собрали электрическую цепь из источника постоянного тока, электрической лампы, амперметра, соединительных проводов и электрического ключа, соединив их последовательно (см. рис 1.). Измерили амперметром (см.табл. №3) три раза силу тока $\mathbf{I_1}$,$\mathbf{I_2}$ **и** $\mathbf{I_3}$ через лампу, записали часть результатов измерений в таблицу №1. Произведите расчеты и сделайте вывод, существенны ли в данном эксперименте случайные погрешности измерений.

Указания к выполнения работы:



1. Запишите план работы (какие из данных пригодятся для расчетов в первую очередь, какие способы расчетов погрешностей использовать, указать используемые ресурсы).
2. Записать все результаты вычислений в отчетную таблицу.

3. Продукт данной работы: расчетные данные на тему «Оценка границ погрешности при измерениях силы тока».
4. Ответить на контрольные вопросы в тетради.

Таблица результатов №1

№	I_1	I_2	I_3	Единица измерения	Класс точности	Цена деления
1	60	65	55			
2	0.5	0,7	0,6			
3	75	70	72			
4	22	18	20			
5	70	80	70			
6	130	120	140			
7	2,7	3	2,8			
8	1,2	0,9	1			
9	250	240	250			
10	520	530	500			

Отчётная таблица №2:

№	$\varepsilon_{инстр}$	$\Delta I_{инстр}=\varepsilon_{инстр}\cdot I_1$	$\Delta I_{отс} = C/2$	$\Delta I_1 = \Delta I_{инстр}+\Delta I_{отс}$	$I = I_1 \pm \Delta I_1$
	%	**А**	**А**	**А**	**А**
1					
2					
3					

Контрольные вопросы:

- Что называется границей погрешностей измерений?
- Как определяются границы абсолютной и относительной погрешности?
- От чего зависит инструментальная погрешность?
- Приведите примеры погрешностей отсчёта.

- Приведите примеры погрешностей метода измерения.
- Какие погрешности называют систематическими и какие случайными?
- Можно ли учесть систематические и случайные погрешности измерений?

Таблица №3

№ Варианта	
1	
2	
3	

4	
5	
6	

7	0 1 2 3 4 5 A VOLTCRAFT
8	0,5 1 1,5 kA
9	A 100 200 300 600 CG-72
10	A

Тема 4.1 Неопределенный интеграл

Практическое занятие № 8

Методы вычисления неопределенных интегралов. Применение математических преобразований

Цель работы:

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– использовать математические методы при решении прикладных (профессиональных) задач

– вычислять неопределенный интеграл различными методами

Материальное обеспечение:

– комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;

– комплект дидактического раздаточного материала.

Задание:

Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

Краткие теоретические сведения:

$\int f(x)dx = F(x) + C, где\ C = const$

$\int$ – значок интеграла.

$f(x)$ – подынтегральная функция.

dx – знак дифференциала.

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

$F(x)$ – первообразная функции.

$F(x) + C$ – множество первообразных функций.

C - константа.

Решить интеграл – это значит найти определенную функцию $F(x) + C$, пользуясь некоторыми правилами, приемами и таблицей**.**

*Непосредственное интегрирование – это нахождение неопределенных интегралов с использованием таблицы интегралов и свойств неопределенного интеграла***.**

1) $\int dx = x + C$;

2) $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $(n \neq -1)$;

3) $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$;

4) $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{ln\, a} + C$;

5) $\int e^x dx = e^x + C; \int e^{kx+b}\, dx = \frac{1}{k} e^{kx+b} + C$

6) $\int sin\, x\, dx = -\cos x + C$;

$\int \sin(kx+b)dx = -\frac{1}{k}\cos(kx+b)$

7) $\int cos\, x\, dx = sin\, x + C; \int \cos(kx+b)dx = \frac{1}{k}\sin(kx+b)$

8) $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$;

9) $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$;

Метод непосредственного интегрирования

Задача нахождения неопределенных интегралов от многих функций решается методом сведения их к одному из табличных интегралов.

Правило интегрирования суммы (разности)

$$\int (u \pm v \pm w)dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx \pm \int w\, dx.$$

Пример

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

$$\int\left(x + \sqrt{x} - 3x^5 + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{\sin^2 x} + tg5\right)dx$$

Решение:

$$\int\left(x + \sqrt{x} - 3x^5 + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{\sin^2 x} + tg5\right)dx \overset{(1)}{=}$$

$$= \int xdx + \int \sqrt{x}dx - \int 3x^5 dx + \int \frac{2dx}{x^3} - \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int tg5dx \overset{(2)}{=}$$

$$= \int xdx + \int x^{\frac{1}{2}}dx - 3\int x^5 dx + 2\int x^{-3}dx - \int \frac{dx}{\sin^2 x} + tg5\int dx \overset{(3)}{=}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot \frac{1}{6}x^6 + 2 \cdot \frac{1}{(-2)} \cdot x^{-2} - (-ctgx) + tg5 \cdot x + C \overset{(4)}{=}$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x^2} + ctgx + tg5 \cdot x + C,\ \text{где } C = const$$

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения, получить оценку.

Ход работы:

Найти неопределённый интеграл, использую таблицу интегралов.

1.1	$\int(x^3+2x^2-5)dx$	**1.6**	$\int(4x^2+x^5+3)dx$	**1.11**	$\int(6x^5-2x^3+x-1)dx$
1.2	$\int(\frac{5}{3}x^4-x^6+4x-8)dx$	**1.7**	$\int(x^3+\frac{3}{2}x^2-x^4)dx$	**1.12**	$\int(\frac{16}{3}x^3+2x^2+x)dx$
1.3	$\int\sqrt{x^5}\,dx$	**1.8**	$\int\sqrt{x^7}\,dx$	**1.13**	$\int\sqrt{x^6}\,dx$
1.4	$\int(\sqrt[3]{x^4}+x^6)dx$	**1.9**	$\int(\sqrt[4]{x^5}+\frac{1}{2}x^3)dx$	**1.14**	$\int(\sqrt[3]{x^4}-5x^3)dx$
1.5	$\int(x^4+\sqrt[3]{x^2}+3x^2)dx$	**1.10**	$\int(\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x^3}+9x^2)dx$	**1.15**	$\int(4x^7-\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^6})dx$

Форма представления результата:

Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

Тема 4.1 Неопределенный интеграл

Практическое занятие № 9
Методы вычисления неопределенных интегралов. Метод замены.

Цель работы:

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– использовать математические методы при решении прикладных (профессиональных) задач

– вычислять неопределенный интеграл различными методами

Материальное обеспечение:

– комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;

– комплект дидактического раздаточного материала.

Задание:

Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

Краткие теоретические сведения:

$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{где } C = const$

$\int$ – значок интеграла.

$f(x)$ – подынтегральная функция.

dx – знак дифференциала.

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

$F(x)$ – первообразная функции.

$F(x)+C$ – множество первообразных функций.

C - константа.

Решить интеграл – это значит найти определенную функцию $F(x)+C$, пользуясь некоторыми правилами, приемами и таблицей**.**

*Непосредственное интегрирование – это нахождение неопределенных интегралов с использованием таблицы интегралов и свойств неопределенного интеграла***.**

10) $\int dx = x + C$;

11) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $(n \neq -1)$;

12) $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C;$

13) $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{ln\, a} + C;$

14) $\int e^x dx = e^x + C; \int e^{kx+b}\, dx = \frac{1}{k} e^{kx+b} + C$

15) $\int sin\, x\, dx = -cos\, x + C;$

$\int \sin(kx+b)dx = -\frac{1}{k}\cos(kx+b)$

16) $\int cos\, x\, dx = sin\, x + C; \int \cos(kx+b)dx = \frac{1}{k}\sin(kx+b)$

17) $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C;$

18) $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C;$

Метод подстановки (интегрирование заменой переменной)

Алгоритм вычисления неопределенного интеграла методом подстановки:

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).
2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.
3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.
4. Производят замену под интегралом.
5. Находят полученный интеграл.
6. В результате производят обратную замену, т.е. переходят к старой переменной. Результат полезно проверять дифференцированием.

Пример типового расчета:

$\int (2x^3 + 1)^4 xdx$

Введем подстановку:

$t = 2x^3 + 1.$

Дифференцируя это равенство, имеем: $dt = 6x^2 dx.$

Выразив отсюда x^2dx, получим: $x^2dx = \frac{dt}{6}$. Подставив в данный интеграл вместо $2x^3+1$ и x^2dx их выражения, получим:

$$\int (2x^3+1)^4 x^2dx = \int t^4 \cdot \frac{dt}{6} = \frac{1}{6}\int t^4\,dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^5}{5} + C = \frac{t^5}{30} + C = \frac{(2x^3+1)^5}{30} + C.$$

1. Метод интегрирования по частям

$$\int u\,du = uv - \int v\,du$$

Если подынтегральная функция представляет собой произведение либо тригонометрической функции на алгебраическую, либо показательной на алгебраическую, то за u следует принимать алгебраическую функцию.

Пример 1.

Вычислить интеграл:

$$\int x^2 \ln x\,dx$$

Решение:

Здесь подынтегральное выражение содержит логарифм. Тогда

$$du = \frac{d\ln x}{dx}\,dx = (\ln x)'dx = \frac{dx}{x},$$

$$v = \int x^2dx = \frac{1}{2+1}\,x^{2+1} = \frac{1}{3}\,x^3.$$

$$I = \int x^2 \ln x\,dx = \int \ln x \cdot x^2\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = \ln x \cdot \frac{1}{3}\,x^3 - \int \frac{1}{3}\,x^3\,\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx.$$

Вычисляем оставшийся интеграл:

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{2+1}\,x^{2+1} = \frac{1}{3}\,x^3.$$

Тогда

$$I = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}\,x^3 + C.$$

Пример 2.

$$\int x\cos x\,dx = \left| \begin{matrix} u=x & du=u'(x)\cdot dx = x'dx = dx \\ dv=\cos x\,dx & v=\int \cos x\,dx=\sin x \end{matrix} \right| = x\cdot\sin x - \int \sin x\,dx = x\cdot\sin x - (-\cos x) + C.$$

<u>Пример</u> 3.

$$\int (3x-2)e^{2x-5}dx = \left| \begin{matrix} u=3x-2 & du=u'(x)\cdot dx=3dx \\ dv=e^{2x-5} & v=\int e^{2x-5}dx=\frac{1}{2}e^{2x-5} \end{matrix} \right| =$$

$$\frac{1}{2}(3x-2)e^{2x-5}-\frac{3}{2}\int e^{2x-5}dx$$

$$=\frac{1}{2}(3x-2)e^{2x-5}-\frac{3e^{2x-5}}{4}+C.$$

<u>Пример</u> 4.

$$\int \ln x dx = \left| \begin{matrix} u=\ln x & du=u'(x)\cdot dx=\frac{1}{x}dx \\ dv=dx & v=\int dx=x \end{matrix} \right| = x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$x\ln x-\int 1dx=x\ln x-x+C.$$

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения, получить оценку.

Ход работы:

1. **Найти неопределённый интеграл, использую таблицу интегралов.**

2.1	$\int (4cosx+2sinx)dx$	**2.6**	$\int \left(\frac{1}{x}+3e^x\right)dx$	**2.11**	$\int (\frac{4}{cos^2x}-2e^x)dx$
2.2	$\int (\frac{5}{x^3}+\frac{1}{sin^2x})dx$	**2.7**	$\int (\frac{2}{x^5}-3cosx)dx$	**2.12**	$\int \left(2e^x-\frac{8}{x}\right)dx$
2.3	$\int \frac{dx}{1+sin^2x}$	**2.8**	$\int \sqrt{(1-cos2x)}\ dx$	**2.13**	$\int tg^2xdx$
2.4	$\int \frac{x^2-4}{x+2}dx$	**2.9**	$\int \frac{2x^2+3x-2}{x+2}dx$	**2.14**	$\int \frac{x^2+2x-15}{x-3}dx$
2.5	$\int \frac{3x^2+x^7}{x^2}dx$	**2.10**	$\int \frac{x^2+7x+12}{x(x+3)}dx$	**2.15**	$\int \frac{x-1}{x^2-x}dx$

2. **Найти неопределённый интеграл методом подстановки.**

3.1 $\int (4x-2)^3 dx$	3.6 $\int (8x+1)^5 dx$	3.11 $\int (3-5x)^6 dx$
3.2 $\int \frac{5}{2x-7} dx$	3.7 $\int \frac{4}{2+7x} dx$	3.12 $\int \frac{2}{4x-8} dx$
3.3 $\int \sin\left(5x-\frac{\pi}{3}\right) dx$	3.8 $\int 3\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) dx$	3.13 $\int 4\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) dx$
3.4 $\int e^{6x-9} dx$	3.9 $\int 2e^{4-2x} dx$	3.14 $\int 5e^{10x+2} dx$
3.5 $\int \frac{2}{cos^2(4x+1)} dx$	3.10 $\int \frac{6}{sin^2(2x-1)} dx$	3.15 $\int \frac{3}{cos^2(9x-2)} dx$

3. Найти неопределённый интеграл методом подстановки.

4.1 $\int \frac{2xdx}{6+x^2}$ $z = 6+x^2$	4.4 $\int \frac{dx}{x\sqrt{lnx}}$ $z = lnx$	4.7 $\int tgxdx$
4.2 $\int \frac{e^x dx}{2+3e^x}$ $z = 2+3e^x$	4.5 $\int \frac{x^2-x}{(x-3)^2} dx$ $z = x-3$	4.8 $\int x\sqrt{2-x}\, dx$ $z^2 = 2-x$
4.3 $\int \frac{e^{2x} dx}{e^x-1}$ $z = e^x-1$	4.6 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ $x = \frac{1}{z}$	4.9 $\int \frac{cosxdx}{\sqrt{1-cos2x}}$

Форма представления результата:

Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

Тема 4.2 Определенный интеграл

Практическое занятие № 10

Применение формулы Ньютона – Лейбница для вычисления определенного интеграла.

Цель работы:

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– использовать математические методы при решении прикладных (профессиональных) задач

– вычислять определенный интеграл с помощью формулы Ньютона - Лейбница

Материальное обеспечение:

– комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;

– комплект дидактического раздаточного материала.

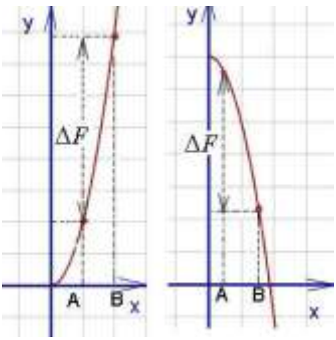
Задание:

Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

Краткие теоретические сведения:

Определённым интегралом от непрерывной функции $f(x)$ на конечном отрезке $[a, b]$ (где $a \neq b$) называется приращение какой-нибудь её первообразной на этом отрезке. При этом употребляется запись

$$\int_a^b f(x)dx.$$



Как видно на графиках внизу (приращение первообразной функции обозначено ΔF), **определённый интеграл может быть как положительным, так и отрицательным числом** (Вычисляется как разность между значением первообразной в верхнем пределе и её же значением в нижнем пределе, т. е. как $F(b) - F(a)$).

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, а отрезок $[a, b]$ – отрезком интегрирования.

Таким образом, если $F(x)$ – какая-нибудь первообразная функция для $f(x)$, то, согласно определению,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Равенство называется формулой Ньютона-Лейбница.
Разность $F(b) - F(a)$ кратко записывают так:

$$F(x)\Big|_a^b.$$

Поэтому формулу Ньютона-Лейбница будем записывать и так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Докажем, что определённый интеграл не зависит от того, какая первообразная подынтегральной функции взята при его вычислении. Пусть $F(x)$ и $\Phi(x)$ – произвольные первообразные подынтегральной функции. Так как это первообразные одной и той же функции, то они отличаются на постоянное слагаемое: $\Phi(x) = F(x) + C$. Поэтому

$$\Phi(b) - \Phi(a) =$$
$$= \left[F(b) + C\right] - \left[F(a) + C\right] = F(b) - F(a).$$

Тем самым установлено, что на отрезке $[a, b]$ приращения всех первообразных функции $f(x)$ совпадают.
Таким образом, для вычисления определённого интеграла необходимо найти любую первообразную подынтегральной функции, т.е. сначала следует найти неопределённый интеграл. Постоянная C из последующих вычислений исключается. Затем применяется формула Ньютона-Лейбница: в первообразную функцию подставляется значение верхнего предела b, далее - значение нижнего предела a и вычисляется разность $F(b)$ - $F(a)$. Полученное число и будет определённым интегралом..
При $a = b$ по определению принимается

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Пример 1**.** Вычислить определённый интеграл

$$\int_0^8 \sqrt[3]{x}\, dx.$$

<u>Решение</u>: сначала найдём неопределённый интеграл:

$$\int \sqrt[3]{x}\, dx = \int x^{1/3}dx = \frac{x^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + C.$$

Применяя формулу Ньютона-Лейбница к первообразной

$$\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$$

(при $C = 0$), получим

$$\int_0^8 \sqrt[3]{x}\ dx = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\Big|_0^8 = \frac{3}{4}\bullet 8\sqrt[3]{8} - 0 = 12.$$

Однако при вычислении определённого интеграла лучше не находить отдельно первообразную, а сразу записывать интеграл в виде (39).

Пример 2. Вычислить определённый интеграл

$$\int_1^2 e^{2x}dx.$$

Решение: используя формулу

$$\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C,$$

получим

$$\int_1^2 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(e^4 - e^2) = \frac{1}{2}e^2(e^2 - 1).$$

Свойства определённого интеграла

1. *Определённый интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю*, т.е.

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0.$$

Это свойство содержится в самом определении определённого интеграла. Однако его можно получить и по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^a f(x)\ dx = F(a) - F(a) = 0.$$

2. *Величина определённого интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования*, т.е.

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt.$$

3. *Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла*, т.е.

$$\int_a^b kf(x)\ dx = k\int_a^b f(x)\ dx.$$

4. *Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от этих функций*, т.е.

$$\int_a^b \left[f(x) + \varphi(x) - \psi(x)\, dx \right] =$$

$$= \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b \varphi(x)\ dx - \int_a^b \psi(x)\ dx.$$

5. *Если отрезок интегрирования разбит на части, то определённый интеграл по всему отрезку равен сумме определённых интегралов по его частям*, т.е. если

$c \in [a,b]$,

то

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$$

6. *При перестановке пределов интегрирования абсолютная величина определённого интеграла не меняется, а изменяется лишь его знак*, т.е.

$$\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx.$$

Пример 3**.** Вычислить определённый интеграл

$$\int_1^2 \left(\frac{4}{x} - 5x^4 + 2\sqrt{x} \right) dx.$$

<u>Решение</u> : используя теоремы 4 и 3, а при нахождении первообразных – табличные интегралы (7) и (6), получим

$$\int_1^2 \left(\frac{4}{x} - 5x^4 + 2\sqrt{x}\right) dx =$$

$$= 4\int_1^2 \frac{dx}{x} - 5\int_1^2 x^4 dx + 2\int_1^2 \sqrt{x}\, dx =$$

$$= 4\ln|x|\Big|_1^2 - 5\frac{x^5}{5}\Big|_1^2 + 2\frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_1^2 =$$

$$= 4(\ln 2 - \ln 1) - (2^5 - 1^5) + \frac{4}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\sqrt{1}\right) =$$

$$= 4\ln 2 + \frac{8}{3}\sqrt{2} - 32\frac{1}{3}.$$

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения, получить оценку.

Ход работы:

1. Вычислить определённый интеграл.

1.1 $\int_{-1}^{2} 25x^4 dx$	**1.6** $\int_{-1}^{2} 8x^3 dx$	**1.11** $\int_{-1}^{2} 64x^7 dx$
1.2 $\int_0^1 (2x^2 + x - 1)dx$	**1.7** $\int_0^2 (x^3 - 1)dx$	**1.12** $\int_0^4 (3 + x^3)dx$
1.3 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2cosx dx$	**1.8** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^2 x}$	**1.13** $\int_0^{\frac{\pi}{3}} sinx dx$
1.4 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^2 x}$	**1.9** $\int_0^4 \frac{dx}{16 + x^2}$	**1.14** $\int_1^2 \frac{2dx}{x}$
1.5 $\int_1^2 \frac{dx}{(2x+1)^2}$	**1.10** $\int_0^{\pi} cos\frac{x}{2} dx$	**1.15** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} sin2x dx$

Форма представления результата:

Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

Тема 4.2 Определенный интеграл

Практическое занятие № 11

Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

Цель работы:

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– использовать математические методы при решении прикладных (профессиональных) задач

– выполнять точные расчеты площадей фигур неправильной формы

Материальное обеспечение:

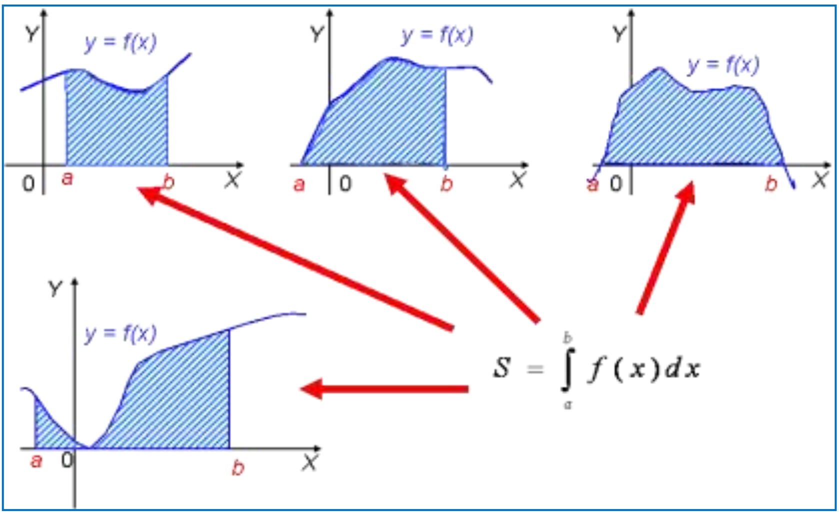
– комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;

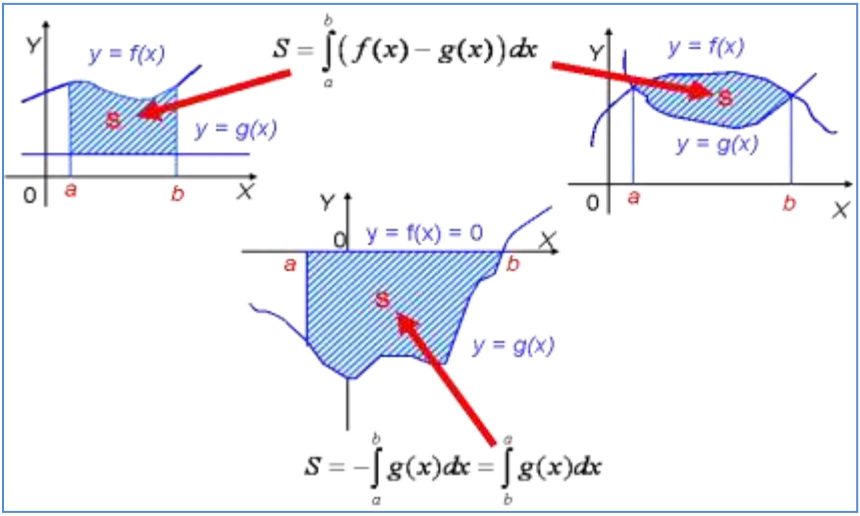
– комплект дидактического раздаточного материала.

Задание:

Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

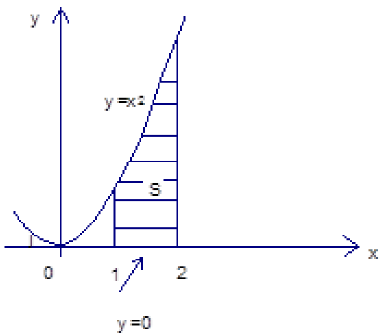
Краткие теоретические сведения:





Пример 1.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2, y = 0, x = 1, x = 2.$



Решение. Построим фигуру на координатной плоскости. Вот искомая площадь:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Это общая формула. Конкретно к нашему случаю она применима так:

Пределы интегрирования

$a = 1, b = 2, f(x) = x^2$.

$$S = \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3|_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}.$$

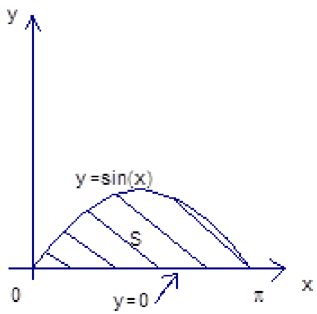
Ответ: $\frac{7}{3}$

Пример 2.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x\,, y = 0, x = 0,\ \ x = \pi.$

Решение: Построим фигуру на координатной плоскости.

Фигура, ограниченная линиями $y = \sin x\,, y = 0, x = 0,\ \ x = \pi$



Формула та же самая: $S = \int\limits_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

В нашем случае $a = 0, b = \pi, f(x) = \sin x$.

Итак, надо найти определенный интеграл

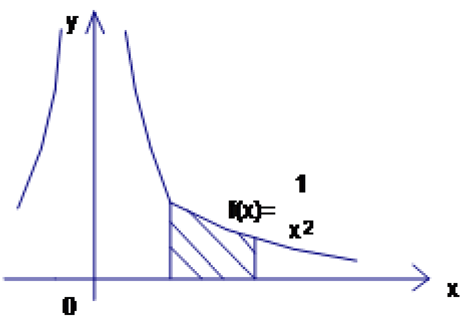
$S = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = (-\cos x)|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0)$ =-(-1)+1=1+1=2.

Искомая площадь найдена, и ответ получен.

Ответ: 2

Пример 3. ***Найти площадь фигуры, ограниченной линиями*** $y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x = 1,\ \ x = 2.$

Решение. Построим фигуру на координатной плоскости.



Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x = 1,\ \ x = 2$

Формула для площади та же самая: $S = \int\limits_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

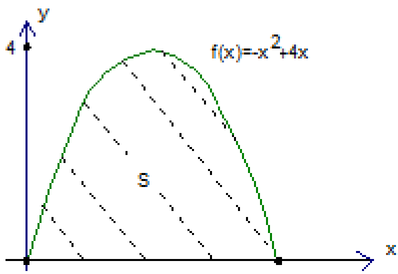
В нашем случае $a = 1, b = 2, f(x) = \frac{1}{x^2}$

$$S = \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \int_1^2 x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{(-1)}|_1^2 = -\frac{1}{x}|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

Пример 4. ***Найти площадь фигуры, ограниченной линиями*** $y = -x^2 + 4x, y = 0.$

<u>Решение</u>. Схематически изобразим параболу $y = -x^2 + 4x$. Корни $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$.



Парабола $y = -x^2 + 4x$

Применим известную формулу

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

И применим ее для данной функции $y = -x^2 + 4x$ и пределов интегрирования $a = 0, b = 4.$

$$S = \int_0^4 (-x^2 + 4x)dx = (-\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2)|_0^4 = (-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2)|_0^4 = (-\frac{4^3}{3} + 2 * 4^3) - 0 = \quad = \frac{-64+96}{3}$$

$\frac{32}{3}$.Искомая площадь найдена. $S = \frac{32}{3}.$

Ответ: $\frac{32}{3}$

В предыдущих задачах площадь образовывалась с помощью разных кривых, но эта площадь находилась над осью x. В следующей задаче наоборот.

Пример 5**. *Случай, если фигура находится под осью: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями*** $y = \sin x, y = 0, x \in [\pi, 2\pi]$.

<u>Решение.</u> Посмотрим, что это за фигура. График $y = \sin x$ в пределах от π до 2π расположен под осью Ox .

1. Сначала вычисляем определенный интеграл от π до 2π от подынтегральной функции $y = \sin x.$

Надо найти первообразную.

По таблице первообразных: $\int \sin x dx = -\cos x + c$.

$S=\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx=(-\cos x)|_{\pi}^{2\pi}=-\cos 2\pi-(-\cos\pi)$=-1-1=-2.

2. Для того чтобы найти площадь, надо взять модуль $S=|-2|$=2.

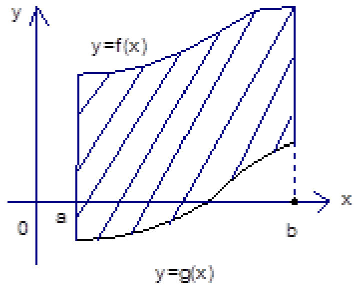
Ответ: 2.

Пример 6. *Общий случай для нахождения площади плоской фигуры, ограниченной двумя кривыми.*

Следующее усложнение – искомая площадь расположена между двумя кривыми. А именно:

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями
$y=f(x), y=g(x), x=a, x=b, g(x)\le f(x)$.

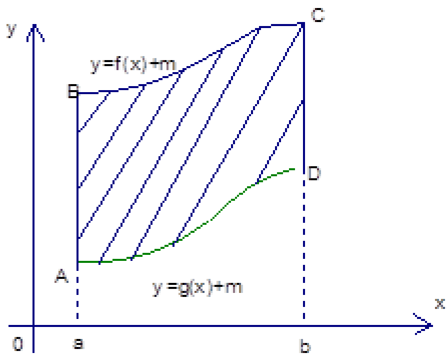
Площадь фигуры, ограниченной линиями $y=f(x), y=g(x), x=a, x=b, g(x)\le f(x)$



Решение. Итак, площадь образуют 2 кривые, одна из них может находиться под осью *Ох*.

Каким образом мы будем решать эту задачу?

Во-первых, мы можем сдвинуть фигуру на такое положительное m, что площадь находится над осью x.



Сдвиг фигуры, затем мы возьмем соответствующий определенный интеграл и найдем площадь. Искомая площадь равна разности двух площадей.

Площадь под верхней кривой $y=f(x)$ минус площадь под нижней кривой $y=g(x)$.

Каждую из площадей мы умеем находить.

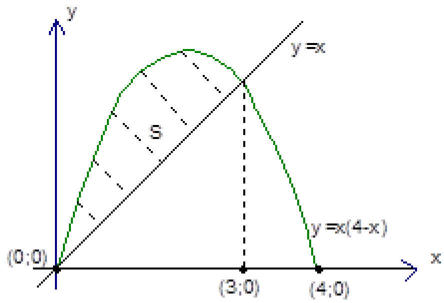
$$S=\int_a^b (f(x)+m)dx-\int_a^b (g(x)+m)\,dx=\int_a^b (f(x)+m-g(x)-m)dx$$

$$=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$

Пример 6. ***Найти площадь фигуры, ограниченную линиями***
$y = -x^2 + 4x$ и $y = x$.

Решение. Для начала построим графики этих линий и поймем, где та площадь, которую нам надо искать. График квадратичной функции – парабола. Корни – 0, 4, ветви вниз. График прямой *y* = *x* – биссектриса первого координатного угла. Вот площадь, которую надо найти:

Но для этого сначала надо найти точки пересечения и решить стандартную задачу.



1. Находим точки пересечения. Для этого решаем систему:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ y = x \end{cases}.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение относительно *x*:

$$-x^2 + 4x = x$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x = 0, x = 3$$

Мы нашли *x*, то есть, пределы интегрирования. Это первое важное действие. Теперь стандартное действие:

2. $S = \int_0^3(-x^2 + 4x - x)dx = \int_0^3(-x^2 + 3x)dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}$

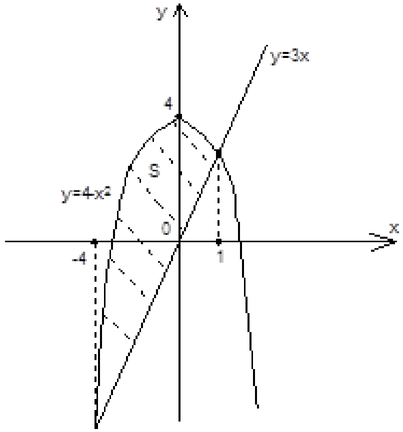
$\Big|_0^3 = \left(-\frac{3^3}{3} + \frac{3*3}{2}\right) - 0 == 27\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 27\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{9}{2}$

Ответ: 4,5

Пример 7. *Случай, когда часть площади плоской фигуры лежит под осью.* Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 4 - x^2, y = 3x$$

Решение. Сначала построим графики, посмотрим, какую площадь нам нужно найти. Первая функция – парабола, ветви вниз. График второй функции – прямая линия. Есть две точки пересечения, их придется найти, а именно взять пределы интегрирования, и тогда будем решать задачу по знакомому нам плану.



Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 3x$

Первое действие – найти пределы интегрирования и второе – найти площадь.

Пределы интегрирования найдем из системы $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 3x \end{cases}$.

$3x = 4 - x^2$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$x = -4, x = 1$

То есть, пределы интегрирования найдены.

$S = \int_{-4}^{1}(4 - x^2 - 3x)dx = 4x - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}$

$|_{-4}^{1} = \left(4 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) - (-16 + \frac{64}{3} - \frac{3*16}{2}) =$

$= (4 + 16 + 24) - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{44*6 - 65*2 - 3*3}{6} = \frac{164 - 139}{6} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}$

Ответ: $20\frac{5}{6}$

Порядок выполнения работы:

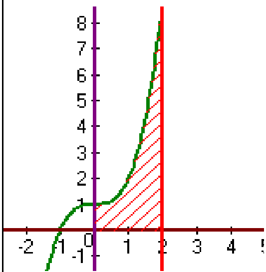
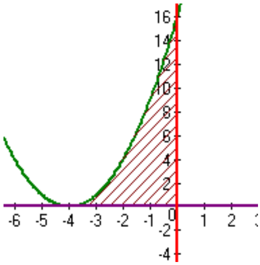
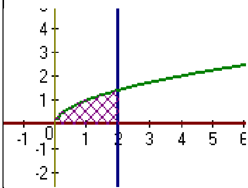
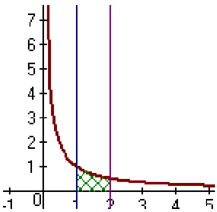
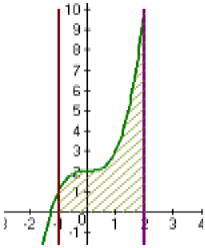
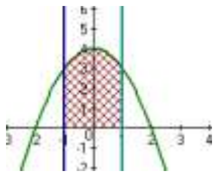
1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения, получить оценку.

Ход работы:

1. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной заданными линиями. Результат округлить до 10^{-2}.

2.1 $y = 0$ $x = 0$ $y = x^2 - 4x + 4$	**2.6** $y = x^2 - 4x + 3$ $y = 0$ $x = 0$	**2.11** $y = x^2 + 5x + 6$ $y = 0$ $x = 0$
2.2 $y = x^2 - 4x + 3$ $x = -1$ $y = 0$	**2.7** $y = x^2 + 5x + 6$ $x = -4$ $y = 0$	**2.12** $y = x^2 - 6x + 8$ $x = 0$ $y = 0$
2.3 $y = x^2 - 6x + 8$ $x = 1$ $y = 0$	**2.8** $y = 2x^2 + 4x + 7$ $x = -1$ $x = 0$	**2.13** $y = -2x^2 + 4$ $x = 1$ $x = -1$
2.4 $y = 2x^2 + 4x + 7$ $x = -2$ $x = -1$	**2.9** $y = 2\sqrt{x}$ $x = 4$ $x = 1$	**2.14** $y = x^4$ $x = 1$ $x = 0$
2.5 $y = \frac{4}{x}$ $x = 2$ $x = 3$	**2.10** $x = 2$ $x = 0$ $y = 2x + 3$	**2.15** $y = -4x + 1$ $x = 0$ $x = -2$

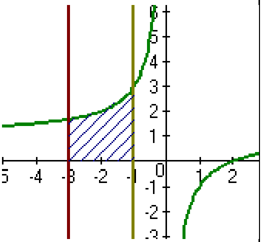
2. Найти площадь криволинейной трапеции, изображённой на рисунке.

3.1 $y = x^3 + 1$ $y = 0, x = 0, x = 2$ 	**3.6** $y = x^2 + 8x + 16$ $y = 0, x = 0$ 	**3.11** $y = \sqrt{x}$ $y = 0$ $x = 2$ 
3.2 $x = 2$ $y = 0 \quad y = \dfrac{1}{x^2}$ 	**3.7** $y = x^3 + 2$ $x = -1$ $x = 2$ 	**3.12** $y = 4 - x^2$ $x = -1$ $x = 1$ 

3.3

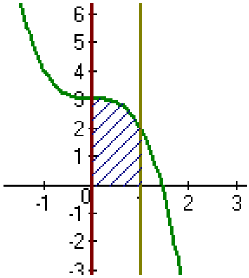
$x = -3$
$x = -1$

$$y = \frac{-2}{x} + 1$$



3.8

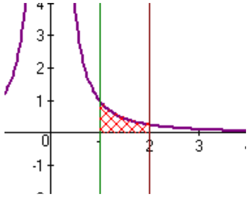
$y = -x^3$
$x = 0$
$x = 1$



3.13

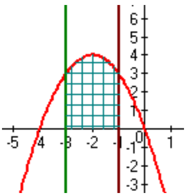
$$y = \frac{1}{x^2}$$

$x = 1$
$x = 2$



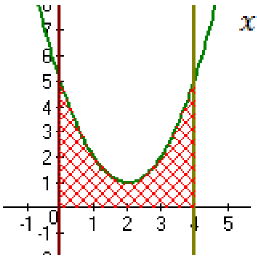
3.4

$y = -x^2 - 4x$
$x = -3$
$x = -1$



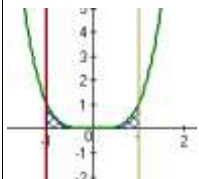
3.9

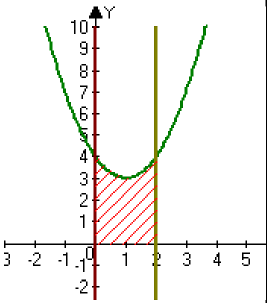
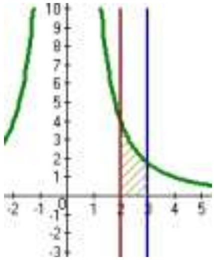
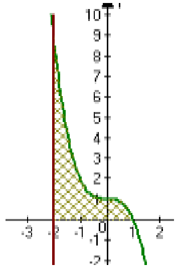
$y = x^2 - 4x + 5$
$x = 0$
$x = 4$



3.14

$y = x^4$
$x = -1$
$x = 1$



3.5	**3.10**	**3.15**
$y = x^2 - 2x + 4$ $x = 0 \quad x = 2$	$y = \dfrac{16}{x^2} \quad x = 2$ $x = 3$	$y = 1 - x^3$ $x = -2$
		

Форма представления результата:

Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

Тема 4.2 Определенный интеграл

Практическое занятие № 12
Физические приложения определенного интеграла.

Цель работы: Научиться решать физические и технические задачи с применением дифференциального и интегрального исчисления.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

решать физические и технические задачи с применением интегрального исчисления

Материальное обеспечение:

Раздаточный материал (карточки с заданиями), таблицы интегралов.

Задание:

1. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 18t - 6t^2$.

2. Найдите путь, пройденный точкой за четвертую секунду, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 3t^2 - 2t - 3$.

3. Сила упругости пружины, растянутой на 0,05 м, равна 3Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,05м?

4. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05м, если сила 100Н растягивает пружину на 0,01м.

5. Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 20 м, а высота 5 м (считая шлюз доверху заполненным водой).

Краткие теоретические сведения:

Путь, пройденный телом

Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью v=v(t). Найдем путь S, пройденный ею за промежуток времени от t_1 до t_2.

Из физического смысла производной известно, что при движении точки в одном направлении «скорость прямолинейного движения равна производной от пути по времени», т. е . $v(t) = \frac{dS}{dt}$. Отсюда следует, что dS = v(t)dt. Интегрируя полученное равенство в пределах от t_1 до t_2, получаем $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$

Пусть материальная точка перемещается вдоль оси ох под действием переменной силы $F = F(x)$, направленной параллельно оси. Тогда работа, произведённая силой F при перемещении точки из положения $x = a$ в положение $x = b\,(a < b)$ вычисляется по формуле:

$$A = \int_a^b F(x)dx$$

Вычисление работы с помощью определённого интеграла.

Пусть под действием некоторой силы $f(x)$ материальная точка М движется по прямой в направлении оси OX. Требуется найти работу, произведённую силой $f(x)$ при перемещении точки М из положения $x = x_1$ в положение $x = x_2$.

1) Если сила постоянна $f(x) = C$, то работа выражается следующим образом $A = C(x_2 - x_1)$.

2) Если сила переменная величина, то $A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$.

Определение силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку.

Из физики известно, что сила Р давления жидкости на горизонтально расположенную площадку S, глубина погружения которой равна h, определяется по формуле:

$P = 9{,}81\gamma hS$ (4), где γ – плотность жидкости.

$$P = 9{,}81\gamma \int_a^b xy\,dx\ (5).$$

Если верхний край пластинки совпадает с поверхностью жидкости, то а=0 и формула (5) примет вид

$$P = 9{,}81\gamma \int_a^b xy\,dx\ (5).$$

Ширина каждой полосы зависит от формы пластинки и является функцией глубины х погружения данной полосы.

Для пластинки постоянной ширины формула (5) упрощается, т.к. эту постоянную можно вынести за знак интеграла:

$$P = 9{,}81\gamma \int_a^b xy\,dx = 9{,}81\gamma y \int_a^b x\,dx = 9{,}81\gamma y \frac{x^2}{2} \int_a^b = 9{,}81\gamma y \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Порядок выполнения работы:

1. Прочитать задачу и определить способ ее решения.

2. Применить формулу интегрального исчисления для решения задачи.

3. Записать ответ.

Ход работы:

Пример 1. Задание. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела v(t) = 10t + 2 (м/с).

Решение: Если v(t)=10t+2 (м/с), то путь, пройденный телом от начала движения (t=0) до конца 4-й секунды, равен

$$S=\int_0^4(10t+2)\,dt=5t^2\Big|_0^4+2t\Big|_0^4=80+8=88\quad(\text{м}).$$

Ответ. S = 88 (м).

Пример 2. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

Решение: По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x, т. е. F = kx, где k — коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила F = 100 Н растягивает пружину на x = 0,01 м; следовательно, 100 = k*0,01, откуда k = 10000; следовательно,F = 10000x.

Искомая работа на основании формулы равна

$$A=\int_0^{0,05}10000x\,dx=5000x^2\Big|_0^{0,05}=12,5\ (\text{Дж}).$$

Пример 3. В воду опущена прямоугольная пластинка, расположенная вертикально. Ее горизонтальная сторона равна 1 м, вертикальная 2 м. Верхняя сторона находится на глубине 0,5 м. Определить силу давления воды на пластинку.

Решение:

Здесь y = 1, a = 0,5, b = 2 + 0,5 = 2,5 (м), γ = 1000 кг/$м^3$. Следовательно,

$$P=9810\int_a^b xy\,dx=9810\int_a^b x\,dx=9810\,\frac{x^2}{2}\Big|_{0,5}^{2,5}=9810\,\frac{2,5^2-0,5^2}{2}=29430\ (H).$$

Выполнить задания:

1. Найти работу производимую при сжатии пружины на 0,03 м, если для сжатия её на 0,005 м нужно приложить силу в 10 Н.

Ответ: 0,9 Дж.

2. Сила упругости пружины, растянутой на 0,05 м, равна 3 Н. Найти работу, которую надо произвести, чтобы растянуть эту пружину на 0,05 м

Ответ: 0,075 Дж.

3. Масса стержня, расположенного на отрезке $[0;3]$, если плотность задается функцией $\rho(x)=x^4-3x$, равна …

4. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м

Ответ: 125 Дж.

5. Вычислить работу, совершаемую при сжатии пружины на 15 см, если известно, что для сжатия пружины на 1 см необходима сила в 30 Н.

Ответ: 33,75 Дж.

6. Вычислить работу, совершаемую при сжатии пружины а 0,08 м, если для сжатия её на 0,01 м нужна Сида в 25 Н.

Ответ: 8 Дж.

7. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)=2t^2-t+1$ (м/с). Найти путь, пройденный за первые 3 с.

Ответ: 16,5 м.

8. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)=2t+a$ (м/с). найти значение параметра a, если известно, что за промежуток времени от $t_1=0$ до $t_2=2$ (с) тело прошло путь длиной 40 м.

Ответ: $a=18$.

9. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)=12t-t^2$ (м/с). Найти длину пути, пройденного телом от начала пути, до его остановки.

Указание: в моменты начала и остановки скорость тела равна нулю.

Ответ: 288 м.

10. Найти путь, пройденный точкой за третью секунду, зная скорость её прямолинейного движения $v(t)=3t^2-2t-3$ (м/с).

Ответ: 11 м.

11. Два тела начали двигаться по прямой в один и тот же момент из одной точки в одном направлении. одно тело двигалось со скоростью $v_1(t)=3t^2+2t$ (м/с), другое со скоростью $v_2(t)=2t$ (м/с). определить расстояние между телами через 2 секунды.

Ответ: 8м.

12. Масса стержня, расположенного на отрезке $[0;2]$, если плотность задается функцией $\rho(x)=6x^2-3x$, равна …

13. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)=(3t^2+8t)$. Тогда путь, пройденный телом за промежуток времени от $t=1$ до $t=4$, равен …

14. Скорость тела, движущегося прямолинейно, задается формулой $v(t)=(12t-3t^2)$ (м/с). Тогда длина пути, пройденного телом от начала его движения до остановки, равна …

Пример 4.1. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м

По закону Гука упругая сила F, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x, т.е. $F = kx$, где k – коэффициент пропорциональности. По условию сила $F = 100$ Н растягивает пружину на $x = 0{,}01$ м, т.е. $100 = k \cdot 0{,}01 \Rightarrow k = 10000$. Тогда $F = kx = 10000x$.

Вычислим работу:

$$A = \int_0^{0{,}05} 10000x dx = 10000 \frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}05} = 5000x^2\Big|_0^{0{,}05} = 5000 \cdot 0{,}05^2 = 12{,}5 \text{ (Дж)}$$

Определённый интеграл применяют для вычисления пути S прямолинейного движения.

Путь S, пройденный материальной точкой за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$, равен определённому интегралу от скорости $v(t)$:

$$S = \int_a^b v(t)dt$$

Пример 4.2. Вычислить путь, пройденный точкой за 4 секунды от начала движения, если скорость точки $v = 2t + 4$ (м/с).

По условию: $v(t) = 2t + 4, a = 0, b = 4$.

Тогда $S = \int_0^4 (2t+4)dt = 2\frac{t^2}{2}\Big|_0^4 + 4t\Big|_0^4 = 4^2 + 4 \cdot 4 = 32$ (м/с).

Пример 4.3. Масса стержня, расположенного на отрезке $[0;6]$, если плотность задается функцией $\rho(x) = 2x^2 + 3$, равна …

В качестве модели стержня принимается отрезок $[a;b]$ на оси OX, длина которого совпадает с длиной стержня и в каждой точке которого задано значение плотности $\rho(x)$. Тогда массу стержня можно вычислить по формуле $m = \int_a^b \rho(x)dx$.

Используя условие задачи, получим

$$m=\int_0^6\left(2x^2+3\right)dx=\left(\frac{2x^3}{3}+3x\right)\Bigg|_0^6=\frac{2\cdot 6^3}{3}+18=$$

$$=144+18=162.$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Тема 5.1. Предварительный анализ статистических данных

Практическое занятие № 13

Нахождение числовых характеристик выборки. Объем выборки. Выборочное среднее. Размах. Мода. Медиана

Цель работы:

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– использовать математические методы при решении прикладных (профессиональных) задач

– проводить элементарную статистическую обработку информации и результатов исследований

Материальное обеспечение:

- комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;
- комплект дидактического раздаточного материала.

Задание:

Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

Краткие теоретические сведения:

Статистика - это наука, которая занимается получением, обработкой и анализом количественных данных о разнообразных явлениях, происходящих в природе и обществе. Одна из основных задач статистики состоит в надлежащей обработке информации. У статистики есть много других задач: получение и хранение информации, выработка различных прогнозов, оценка их достоверности и т. д. Ни одна из этих целей не достижима без обработки данных.

Математическая статистика — раздел математики, посвященный методам и правилам обработки и анализа статистических данных.

Средним арифметическим ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на их количество. Среднее арифметическое является важной характеристикой ряда чисел, но иногда полезно рассматривать и другие средние.

Модой называют число ряда, которое встречается в этом ряду наиболее часто. Мода – показатель, который широко используется в статистике. Одним из наиболее частых использований моды является изучение спроса. Заметим, что в рядах, рассматриваемых в реальных статистических исследованиях, иногда выделяют больше одной моды. Когда в ряду много данных, то интересными бывают все те значения, которые встречаются гораздо чаще других. Их статистики тоже называют модой.

Одним из статистических показателей различия или разброса данных является размах. *Размах* — это разность между наибольшим и наименьшим значениями ряда данных.

Еще одной важной статистической характеристикой ряда данных является его *медиана*. Обычно медиану ищут в случае, когда числа в ряду являются какими-либо показателями и надо найти, например, человека, показавшего средний результат, фирму со средней годовой прибылью, авиакомпанию, предлагающую средние цены на билеты, и т. д. Медианой ряда, состоящего из нечетного количества чисел, называется число данного ряда, которое окажется посередине, если этот ряд упорядочить. Медианой ряда, состоящего из четного количества чисел, называется среднее арифметическое двух стоящих посередине чисел этого ряда.

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения, получить оценку.

Ход работы:

1. Задан закон распределения случайной величины X (в первой строке таблицы указаны возможные значения величины X, а во второй строке указаны вероятности p этих возможных значений). **Найти :**

1. Объем выборки.
2. Выборочное среднее.
3. Размах.
4. Мода.
5. Медиана

2. По данным таблицы (возраст студентов в группе из 20 человек) провести статистическое исследование.

№ п\п	Возраст (лет)	№ п\п	Возраст (лет)	№ п\п	Возраст (лет)	№ п\п	Возраст (лет)
1	18	6	20	11	22	16	21
2	18	7	19	12	19	17	19
3	19	8	19	13	19	18	19
4	20	9	19	14	20	19	19
5	19	10	20	15	20	20	19

Форма представления результата:

Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

Тема 5.1. Предварительный анализ статистических данных

Практическое занятие № 14
Нахождение числовых характеристик выборки. Математическое ожидание, среднеквадратичное отклонение, дисперсия

Цель работы:

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– использовать математические методы при решении прикладных (профессиональных) задач

– проводить элементарную статистическую обработку информации и результатов исследований

Материальное обеспечение:

– комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;

– комплект дидактического раздаточного материала.

Задание:

Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

Краткие теоретические сведения:

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений ее возможных значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n .$$

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Пример 1. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины, зная закон ее распределения:

X	5	4	3
p	0,2	0,5	0,3

Решение: По формуле находим математическое ожидание:
$M(X) = 5*0,2 + 4*0,5 + 3*0,3 = 3,3$.

Пример 2. Найти дисперсию случайной величины *X*, которая задана следующим законом распределения:

X	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2

Решение: По формуле находим математическое ожидание:
$M(X) = 1*0,3 + 2*0,5 + 5*0,2 = 2,3$.

Записываем все возможные значения квадрата отклонения:
$[X_1 - M(X)]^2 = (1 - 2,3)^2 = 1,69$;
$[X_2 - M(X)]^2 = (2 - 2,3)^2 = 0,09$;
$[X_3 - M(X)]^2 = (5 - 2,3)^2 = 7,29$.

Тогда закон распределения квадрата отклонения имеет следующий вид:

$[X - M(X)]^2$	1,69	0,09	7,29
p	0,3	0,5	0,2

По формуле находим дисперсию:
$D(X) = 1,69*0,3 + 0,09*0,5 + 7,29*0,2 = 2,01$.

Найти:

1. Математическое ожидание,
2. Дисперсию,
3. Построить многоугольник распределения.

1.1

x	23	25	28	29
p	0,3	0,2	0,4	0,1

1.2

x	17	21	25	27
p	0,2	0,4	0,3	0,1

1.3

x	24	26	28	30
p	0,2	0,2	0,5	0,1

1.4

x	12	16	19	21
p	0,1	0,5	0,3	0,1

1.5

x	25	27	30	32
p	0,2	0,4	0,3	0,1

1.6

x	30	32	35	40
p	01	0,5	0,2	0,2

1.7

x	12	14	16	20
p	0,1	0,2	0,5	0,2

1.8

x	21	25	28	31
p	0,1	0,4	0,2	0,3

1.9

x	18	22	23	26
p	0,2	0,3	0,4	0,1

1.10

x	25	28	30	33
p	0,1	0,2	0,4	0,3

Тема 5.2. Графическое представление выборочного распределения

Практическое занятие № 15

Графическое изображение рядов распределения: полигон частот по данным вариационного ряда.

Цель работы:

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– использовать математические методы при решении прикладных (профессиональных) задач

– проводить элементарную статистическую обработку информации и результатов исследований**,** представлять их графически

Материальное обеспечение:

- комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;
- комплект дидактического раздаточного материала.

Задание:

Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

Краткие теоретические сведения:

В целях наглядности строят различные графики статистического распределения. Они позволяют лучше представить характер распределения элементов выборки, а иногда и сделать предположения о законе распределения генеральной совокупности.

Ряд распределения – это ряд чисел, в котором значение изучаемого признака (варианта) расположены в определенном порядке. Либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания. Наряду с вариантами ряд распределений включают в частоты (величины, показывающие сколько раз каждая из вариантов встречаются в данной совокупности). Сумма частот равна объему совокупности. Таким образом, ряд распределения состоит из вариант и частот.

В зависимости от прерывности и непрерывности варьирующего признака ряды распределения удобно представлять в виде двух разновидностей: *дискретного и вариационного (интервальных)*

Дискретный ряд представляет собой ряд прерывных чисел.

Например: распределение семей по числу членов.

При непрерывной вариации распределением признака называется интервальным.

Например: распределение совхозов области по % выполнению плана.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка. Наблюдаемые значения x_i - называют вариантами, n_i - числа наблюдения частотами, $n = \sum n_i$ - объем выборки, отношения частот к объему выборки называется **относительными частотами** $W_i = \frac{n_i}{n}$

Ход работы:

Пример 1. Составить распределения относительных частот, если задано распределение частот выборки объема.

n=20

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

Решение. Найдём относительные частоты.

$$w_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{3}{20}$$

$$w_2 = \frac{10}{20}$$

$$w_3 = \frac{7}{20}$$

x_i	2	6	12
W_i	0,15	0,5	0,35

0,15+0,5+0,35=1 .

Сумма относительных частот равна единице.

В целях наглядности строят различные графики *полигон* и *гистограмма*.

Полигоном частот называется ломаная линия вершиной, которой являются точки $(x_1, n_1), (x_2, n_2) \dots (x_k, n_k)$ определяемые элементами статистического ряда. Для его построения по оси абсцисс откладывают варианты x_i , а по оси ординат соответствующая им частота n_i .

Построенные точки соединяют отрезками прямых.

Гистограммой частот называется ступенчатая фигура составленная из прямоугольников построенных на интервалах так что площадь каждого прямоугольника численно равна частоте варианты расположенной в середине i интервала. То есть площадь гистограммы частот равна объему выборки

Пример: Построить полигон и гистограмму частот.

Дано время недельной загрузки электрических духовых шкафов 50-ти обследованных предприятий общественного питания в часах.

38	60	41	51	33	42	45	21	53	60

60	52	47	46	49	49	14	57	54	59
77	47	28	48	58	32	42	58	61	30
61	35	47	72	41	45	44	56	30	40
67	65	39	48	43	60	54	42	59	50

Разобьем ряд распределения на 7 интервалов, определим размах выборки.

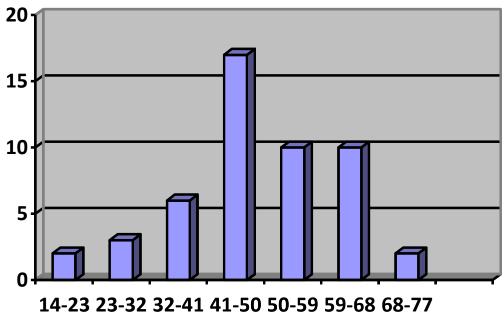
77-14=63

Найдем длину интервала.

$$h = \frac{63}{7} = 9$$

	Границы интервалов	Середина интервалов	x_i
1	14-23	18,5	2
2	23-32	27,5	3
3	32-41	36,5	6
4	41-50	45,5	17
5	50-59	54,5	10
6	59-68	63,5	10
7	68-77	72,5	2

Чтобы построить гистограмму найдём относительные частоты.

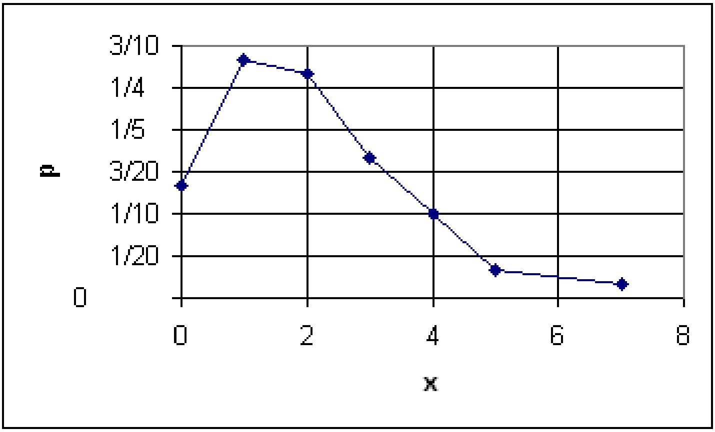


Пример 2. Для рассмотренного примера ряд имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4	5	7
m_i	8	17	16	10	6	2	1
$\hat{p}_i$	8/60	17/60	16/60	10/60	6/60	2/60	1/60

По данным дискретного вариационного ряда строят *полигон частот или относительных частот: ломаную, отрезки которой соединяют точки*

$$(x_i, m_i)((x_i, \hat{p}_i)):$$



Полигон относительных частот

Задание для самостоятельной работы:

По индивидуальным данным определить по каждой семье месячный доход на одного члена семьи, постройте интервальный ряд распределения по данному показателю образовав семь равных интервалов, построить полигон частот.

Шаблон выполнения задания

1. Вначале необходимо определить месячный доход на одного человека в каждой семье, так как в данных он указан на всю семью сразу, для этого необходимо всю сумму денег разделить на количество членов семьи.

2. Затем необходимо найти длину интервала Н, которая находится по формуле Н=(X max-X min)/7,

где X max это максимальный доход на 1 человека, а X min минимальный, 7 –количество интервалов.

3. Данные заносятся в таблицу 2:

№	Месячный доход	Средний доход	Частота	N1/n
1				
2				
3				
4				
5				
6				

7				

Средний доход для каждого интервала находится либо путем прибавление ½ интервала для минимального значения, либо путем вычитания ½ интервала из максимального значения в каждой группе.

Частота находится путем визуального осмотра данных полученных в результате изучения таблицы 1.

N1/n находится путем деления частоты на длину интервала

Все данные заносятся в таблицу 2

4.Затем необходимо построить полигон, гистограмму и эмпирическую функцию исходя из полученных данных в таблице 2.

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения, получить оценку.

Форма представления результата: Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

Тема 5.2. Графическое представление выборочного распределения

Практическое занятие № 16

Графическое изображение рядов распределения: гистограмма по данным вариационного ряда

Цель работы:

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– использовать математические методы при решении прикладных (профессиональных) задач

– проводить элементарную статистическую обработку информации и результатов исследований, представлять их графически

Материальное обеспечение:

- комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;
- комплект дидактического раздаточного материала.

Задание:

Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

Краткие теоретические сведения

В целях наглядности строят различные графики статистического распределения. Они позволяют лучше представить характер распределения элементов выборки, а иногда и сделать предположения о законе распределения генеральной совокупности.

Ряд распределения – это ряд чисел, в котором значение изучаемого признака (варианта) расположены в определенном порядке. Либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания. Наряду с вариантами ряд распределений включают в частоты (величины, показывающие сколько раз каждая из вариантов встречаются в данной совокупности). Сумма частот равна объему совокупности. Таким образом, ряд распределения состоит из вариант и частот.

В зависимости от прерывности и непрерывности варьирующего признака ряды распределения удобно представлять в виде двух разновидностей: *дискретного и вариационного (интервальных)*

Дискретный ряд представляет собой ряд прерывных чисел.

Например: распределение семей по числу членов.

При непрерывной вариации распределением признака называется интервальным.

Например: распределение совхозов области по % выполнению плана.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка. Наблюдаемые значения x_i - называют вариантами, n_i - числа наблюдения частотами, $n = \sum n_i$ - объем выборки, отношения частот к объему выборки называется **относительными частотами** $W_i = \frac{n_i}{n}$

Гистограммой частот называется ступенчатая фигура составленная из прямоугольников построенных на интервалах так что площадь каждого прямоугольника численно равна частоте варианты расположенной в середине i интервала. То есть площадь гистограммы частот равна объему выборки

Пример: Построить полигон и гистограмму частот.

Дано время недельной загрузки электрических духовых шкафов 50-ти обследованных предприятий общественного питания в часах.

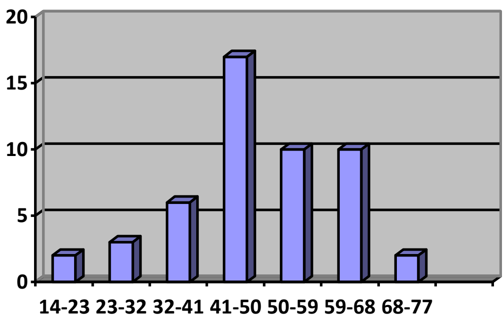
38	60	41	51	33	42	45	21	53	60
60	52	47	46	49	49	14	57	54	59
77	47	28	48	58	32	42	58	61	30
61	35	47	72	41	45	44	56	30	40
67	65	39	48	43	60	54	42	59	50

Разобьем ряд распределения на 7 интервалов, определим размах выборки.
77-14=63
Найдем длину интервала.

$$h = \frac{63}{7} = 9$$

	Границы интервалов	Середина интервалов	x_i
1	14-23	18,5	2
2	23-32	27,5	3
3	32-41	36,5	6
4	41-50	45,5	17
5	50-59	54,5	10
6	59-68	63,5	10
7	68-77	72,5	2

Чтобы построить гистограмму найдём относительные частоты.



По индивидуальным данным определить по каждой семье месячный доход на одного члена семьи, постройте интервальный ряд распределения по данному показателю образовав семь равных интервалов, построить гистограмму.

Шаблон выполнения задания

1. Вначале необходимо определить месячный доход на одного человека в каждой семье, так как в данных он указан на всю семью сразу, для этого необходимо всю сумму денег разделить на количество членов семьи.
2. Затем необходимо найти длину интервала H, которая находится по формуле H=(X max-X min)/7,
где X max это максимальный доход на 1 человека, а X min минимальный, 7 –количество интервалов.
3. Данные заносятся в таблицу 2:

№	Месячный	Средний	Частота	N1/n

	доход	доход		
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				

Средний доход для каждого интервала находится либо путем прибавление ½ интервала для минимального значения, либо путем вычитания ½ интервала из максимального значения в каждой группе.
Частота находится путем визуального осмотра данных полученных в результате изучения таблицы 1.
N1/n находится путем деления частоты на длину интервала
Все данные заносятся в таблицу 2
4.Затем необходимо построить полигон, гистограмму и эмпирическую функцию исходя из полученных данных в таблице 2.

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения, получить оценку.

Форма представления результата: Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.

Тема 5.2. Графическое представление выборочного распределения

Практическое занятие № 17

Построение эмпирической функции распределения выборки.

Цель работы:

Сформировать практические навыки по решению задач данной темы.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

– использовать математические методы при решении прикладных (профессиональных) задач

– проводить элементарную статистическую обработку информации и результатов исследований, представлять их графически

Материальное обеспечение:

- комплект учебно-наглядных пособий для индивидуальных домашних работ;
- комплект дидактического раздаточного материала.

Задание:

Повторить теоретический материал, выполнить практическую работу.

Краткие теоретические сведения

В целях наглядности строят различные графики статистического распределения. Они позволяют лучше представить характер распределения элементов выборки, а иногда и сделать предположения о законе распределения генеральной совокупности.

Ряд распределения – это ряд чисел, в котором значение изучаемого признака (варианта) расположены в определенном порядке. Либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания. Наряду с вариантами ряд распределений включают в частоты (величины, показывающие сколько раз каждая из вариантов встречаются в данной совокупности). Сумма частот равна объему совокупности. Таким образом, ряд распределения состоит из вариант и частот.

В зависимости от прерывности и непрерывности варьирующего признака ряды распределения удобно представлять в виде двух разновидностей: *дискретного и вариационного (интервальных)*

Дискретный ряд представляет собой ряд прерывных чисел.

Например: распределение семей по числу членов.

При непрерывной вариации распределением признака называется интервальным.

Например: распределение совхозов области по % выполнению плана.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка. Наблюдаемые значения x_i - называют вариантами, n_i - числа наблюдения частотами, $n = \sum n_i$ - объем выборки, отношения частот к объему выборки называется **относительными частотами** $W_i = \frac{n_i}{n}$

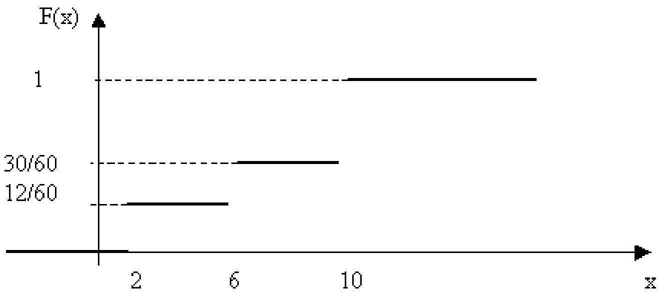
Пример 3. Построить эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

x_i	2	6	10
m_i	12	18	30

1. Объем выборки n = 12+ 18+ 30 =60.
2. $X_{наим}$= 2, значит при X ≤ 2, $\hat{F}(x) = 12/60$
3. X<6 наблюдалось 12 раз, следовательно, при X< 6 $\hat{F}(x) = 12/60$.
4. Значение X<10 наблюдалось 12+18= 30 раз, значит при X<10 $\hat{F}(x) = 30/60$
5. Так как $x_{наиб}$ =10, то при X ≥ 10 $\hat{F}(x) = 1$
6. Искомая эмпирическая функция имеет вид:

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} 0, x \le 2; \\ 12/60, x < 6; \\ 30/60, x < 10; \\ 1, x \ge 10. \end{cases}$$

График строится так же, как и график интегральной функции распределения.



Если результаты наблюдений представлены в виде интервального вариационного ряда, то в качестве x принимают концы частичных интервалов и, пользуясь данным выше определением вычисляют значения эмпирической функции. Причем, при $X < x_{нач}$

$\hat{F}(x) = 0$,

а при $X \ge x_{кон}$

$\hat{F}(x) = 1.$

Для рассмотренного примера получим таблицу:

x	6,67	6,69	6,71	6,73	6,75	6,77	6,79	6,81	6,83	6,85
$\hat{F}(x)$	0	0,01	0,085	0,17	0,39	0,65	0,87	0,94	0,995	1

Так как таблица определяет функцию не полностью, то при изображении графика доопределяем функцию, соединяя точки графика, соответствующие концам интервалов, отрезками. *График эмпирической функции для интервального вариационного ряда есть непрерывная линия.*

По индивидуальным данным определить по каждой семье месячный доход на одного члена семьи, постройте интервальный ряд распределения по данному показателю образовав семь равных интервалов, построить эмпирическую функцию распределения.

Шаблон выполнения задания

1. Вначале необходимо определить месячный доход на одного человека в каждой семье, так как в данных он указан на всю семью сразу, для этого необходимо всю сумму денег разделить на количество членов семьи.
2. Затем необходимо найти длину интервала H, которая находится по формуле H=(X max-X min)/7,

где X max это максимальный доход на 1 человека, а X min минимальный, 7 –количество интервалов.

3. Данные заносятся в таблицу 2:

№	Месячный доход	Средний доход	Частота	N1/n
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				

Средний доход для каждого интервала находится либо путем прибавление ½ интервала для минимального значения, либо путем вычитания ½ интервала из максимального значения в каждой группе.

Частота находится путем визуального осмотра данных полученных в результате изучения таблицы 1.

N1/n находится путем деления частоты на длину интервала

Все данные заносятся в таблицу 2

4.Затем необходимо построить полигон, гистограмму и эмпирическую функцию исходя из полученных данных в таблице 2.

Порядок выполнения работы:

1. Получить задание.
2. Выполнить задание.
3. Предоставить результат выполнения, получить оценку.

Форма представления результата: Предоставить выполненные задания в тетради для практических работ.