

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»
Многопрофильный колледж



**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ**

по учебной дисциплине

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

для студентов специальности

**08.02.01 «Строительство и эксплуатация зданий и сооружений»
базовой подготовки**

Магнитогорск, 2017

ОДОБРЕНО

Предметной комиссией
Математических и естественнонаучных
дисциплин
Председатель: Е.С. Корытникова
Протокол №7 от 14 марта 2017 г.

Методической комиссией

Протокол №4 от 23 марта 2017 г.

Разработчик

Ю.Н. Садчикова, преподаватель МпК ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»

Методические указания по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика».

Содержание практических работ ориентировано на подготовку студентов к освоению профессиональных модулей основной профессиональной образовательной программы по специальности 08.02.01 «Строительство и эксплуатация зданий и сооружений» и овладению профессиональными компетенциями.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ	4
2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ.....	7
Раздел 1. Практическая геометрия	7
Практическая работа № 1 Вычисление площади квартир. Определение площади поверхности стен, периметра и объёма здания	7
Практическая работа № 2 Вычисление площадей нестандартных фигур	15
Раздел 2 Основы линейной алгебры.....	17
Практическая работа №3 Действия над матрицами. Вычисление определителей	17
Практическая работа №4 Нахождение обратной матрицы	21
Практическая работа №5 Решение систем линейных уравнений методами Гаусса и Крамера	24
Практическая работа №6 Решение систем линейных уравнений матричным способом	30
Практическая работа №7 Решение профессиональных задач.....	33
Раздел 3. Математический анализ	36
Практическая работа №8 Вычисление пределов. Раскрытие неопределённостей. Вычисление односторонних пределов. Исследование точек разрыва.....	36
Практическая работа №9 Вычисление производных элементарных и сложных функций	38
Практическая работа №10 Применение производной к исследованию функций	40
Практическая работа №11 Решение задач с использованием различных методов интегрирования	43
Практическая работа №12 Решение прикладных задач с использованием интегрального исчисления.....	46
Практическая работа №13 Решение дифференциальных уравнений первого порядка	49
Практическая работа №14 Решение дифференциальных уравнений второго порядка.....	51
Раздел 4. Основы дискретной математики	54
Практическая работа №15 Решение комбинаторных задач	54
Практическая работа №16 Нахождение вероятностных и статистических характеристик, их геометрическое изображение на примере раскладки междуэтажных плит	57

1 ВВЕДЕНИЕ

Важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки студентов составляют практические занятия.

Состав и содержание практических работ направлены на реализацию действующего федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование учебных практических умений (умений решать задачи по математике, физике, химии, информатике и др.), необходимых в последующей учебной деятельности по общим гуманитарным и социально-экономическим дисциплинам, математическим и естественно-научным, общепрофессиональным дисциплинам.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «математика» предусмотрено проведение практических занятий.

В результате их выполнения, обучающийся должен: уметь:

У1. выполнять необходимые измерения и связанные с ними расчеты;

У2. вычислять площади и объемы деталей строительных конструкций, объемы земляных работ;

У3. применять математические методы для решения профессиональных задач.

У01.1. оценивать социальную значимость своей будущей профессии для развития экономики и среды жизнедеятельности граждан российского государства;

У04.1. определять необходимые источники информации;

У05.1. использовать средства информационно-коммуникационных технологий для решения профессиональных задач;

У08.2. определять и выстраивать траектории профессионального развития и самообразования;;

У09.1. находить и анализировать информацию в области инноваций в профессиональной деятельности;

У06.1. работать в коллективе и команде;

Содержание практических работ ориентировано на подготовку студентов к освоению профессионального модуля основной профессиональной образовательной программы по специальности и овладению профессиональными компетенциями:

ПК 1.1. Подбирать строительные конструкции и разрабатывать несложные узлы и детали конструктивных элементов зданий.

ПК 1.3. Выполнять несложные расчеты и конструирование строительных конструкций.

ПК 1.4. Участвовать в разработке проекта производства работ с применением информационных технологий.

ПК 2.3. Проводить оперативный учет объемов выполняемых работ и расхода материальных ресурсов.

ПК 2.4. Осуществлять мероприятия по контролю качества выполняемых работ.

ПК 3.3. Контролировать и оценивать деятельность структурных подразделений.

ПК 4.1. Принимать участие в диагностике технического состояния конструктивных элементов эксплуатируемых зданий.

ПК 4.2. Организовывать работу по технической эксплуатации зданий и сооружений.

ПК 4.3. Выполнять мероприятия по технической эксплуатации конструкций и инженерного оборудования зданий.

ПК 4.4. Осуществлять мероприятия по оценке технического состояния и реконструкции зданий.

А также формированию общих компетенций:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

Выполнение студентами практических работ по учебной дисциплине «математика» направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление, развитие и детализацию полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины;

- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;

- формирование и развитие умений: наблюдать, сравнивать, сопоставлять, анализировать, делать выводы и обобщения, самостоятельно вести исследования, пользоваться различными приемами измерений, оформлять результаты в виде таблиц, схем, графиков;

- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;

- выработку при решении поставленных задач профессионально значимых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Продолжительность выполнения практической работы составляет не менее двух академических часов и проводится после соответствующей темы, которая обеспечивает наличие знаний, необходимых для ее выполнения.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Раздел 1. Практическая геометрия

Практическая работа № 1

Вычисление площади квартир. Определение площади поверхности стен, периметра и объёма здания

Цель работы: научить студентов вычислять площади квартир, окон, различных планировочных и объемных коэффициентов, использование ранее полученных знаний по геометрии, установить и показать наглядно связь математики со специальными дисциплинами, например, «Архитектура зданий»; выработать у студентов стремление к глубокому усвоению полученных знаний, обучение рациональным приемам труда и умение самостоятельно работать.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- выполнять необходимые измерения и связанные с ним расчеты; вычислять площади деталей строительных конструкций;
- применять математические методы для решения профессиональных задач.

Материальное обеспечение:

1. Таблица: «Вычисление площадей различных геометрических фигур на плоскости».
2. Карточки-задания для выполнения индивидуальных работ по 30 вариантам.
3. Таблица с ответами для преподавателя.
4. Микрокалькуляторы.

Задание:

1. Вычислить площадь квартиры.

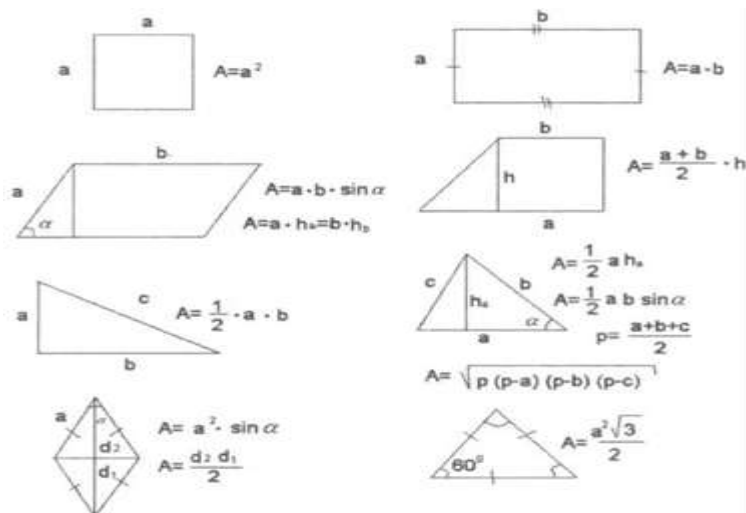
Порядок выполнения работы:

1. Повторение формул вычисления площадей

2. Раздача индивидуальных карточек. Алгоритм решения задачи.
3. Оценка работ студентов.
4. Подведение итогов.

Ход работы:

Повторение материала по планиметрии:



1. Алгоритм решения задачи:

1. Перечертить план квартиры в тетрадь, измеряя линейкой длины стен.

План квартиры вычерчивать в масштабе 1:100 (в 1 см — 1 м).

2. Записать размеры помещений и комнат, соблюдая масштаб 1:100.
3. Вычислить площадь каждой комнаты и подсобных помещений отдельно: $A = a \cdot b$.
4. Вычислить полезную площадь:

$$A_{пол} = A_1 + A_2 + A_3 + \dots$$

Площадь подсобных помещений:

$$A_{п.п} = A_k + A_v + A_m + A_{кл} + A_{пр} + A_{кор}$$

Общую площадь: $A_{общ} = A_{пол} + A_{п.п}$

5. Вычислить планировочный коэффициент:

$$K = A_{пол} / A_{общ} = A_{пол} / (A_{пол} + A_{пп})$$

6. Выбрать размеры окна или окон в комнате и в кухне, определить площадь каждого окна:

$$1,5 \cdot 1,2 = 1,8 \text{ м}^2$$

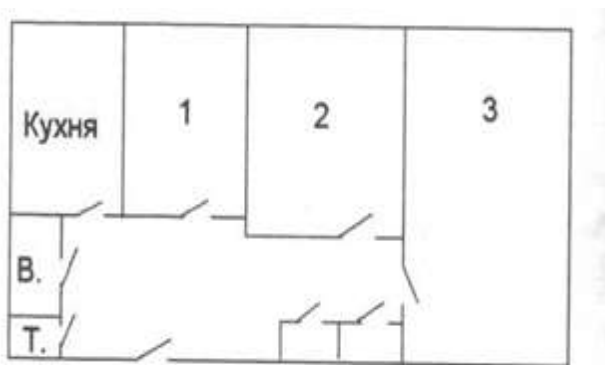
$$1,5 \cdot 1,5 = 2,25 \text{ м}^2$$

$$1,5 \cdot 1,8 = 2,70 \text{ м}^2$$

$$1,5 \cdot 2,1 = 3,15 \text{ м}^2$$

2. Объяснения преподавателя:

1. Дан план квартиры. Измерим размеры комнат и подсобных помещений и перенесем их в тетрадь с масштабом $1 \text{ см} = 1 \text{ м}$.



2. Запишем размеры комнат и подсобных помещений в тетрадь:

- 1 комната $a = 3,2 \text{ м}; b = 2,6 \text{ м};$
- 2 комната $a = 3,6 \text{ м}; b = 2,4 \text{ м};$
- 3 комната $a = 5,0 \text{ м}; b = 3,2 \text{ м};$
- кухня $a = 3,2 \text{ м}; b = 2,8 \text{ м};$
- ванная $a = 1,1 \text{ м}; b = 1,5 \text{ м};$

- туалет $a = 0,7 \text{ м}; b = 1,5 \text{ м};$
- кладовая $a = 0,5 \text{ м}; b = 2,4 \text{ м};$
- прихожая $a = 1,8 \text{ м}; b = 3,9 \text{ м};$
- коридор $a = 0,9 \text{ м}; b = 2,4 \text{ м};$

3. Вычислим площади отдельно каждой комнаты и подсобно-наблюдаемого помещения.

$$A_1 = 3,2 \cdot 2,6 = 8,32 \text{ м}^2;$$

$$A_2 = 3,6 \cdot 2,4 = 8,64 \text{ м}^2;$$

$$A_3 = 5,0 \cdot 3,2 = 16,0 \text{ м}^2;$$

$$A_{\kappa} = 3,2 \cdot 2,8 = 8,96 \text{ м}^2;$$

$$A_{\sigma} = 1,1 \cdot 1,5 = 1,65 \text{ м}^2;$$

$$A_m = 0,71,5 = 1,05 \text{ м}^2;$$

$$A_{\kappa} = 0,5 \cdot 2,4 = 1,2 \text{ м}^2;$$

$$A_{np} = 1,8 \cdot 3,9 = 7,02 \text{ м}^2;$$

$$A_{кор} = 0,9 \cdot 2,4 = 2,16 \text{ м}^2;$$

4. Вычислим полезную площадь, площадь подсобных помещений и общую площадь квартиры:

$$A_{пол} = 8,32 + 8,64 + 16,0 = 32,96 \text{ м}^2.$$

$$A_{под,пом} = 8,96 + 1,65 + 1,05 + 1,2 + 7,02 + 2,16 = 22,04 \text{ м}^2.$$

$$A_{общ} = 32,96 + 22,04 = 55 \text{ м}^2.$$

5. Вычислим коэффициент планировочный:

$$K = 32,96/8,96 = 0,599 = 0,6.$$

6. Для кухни и комнат выбирают окна с площадью $1,5 \cdot 1,5 = 2,25 \text{ м}^2$.

7. Вычислим коэффициент остекленности:

$$K_{ост.кухни} = 2,25/8,96 = 0,25.$$

$$K_{ост. 1комн} = 2,25/8,32 = 0,27.$$

$$K_{ост. 2комн} = 2,25/8,64 = 0,26.$$

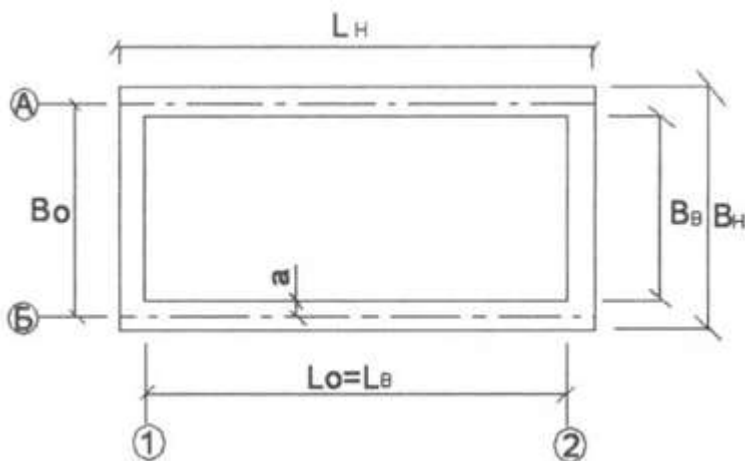
$$K_{ост. 3комн} = 2,25/16,00 = 0,14.$$

Задание 2.

1. Определить площадь поверхности стен.
2. Определить периметр здания.
3. Найти объем здания (кубатуру). Объем помещений и объем

и гн здания.

4. Общую площадь здания.
5. Вычислить относительный периметр здания.



Для кирпичных стен $t = 380 \text{ мм}, 510 \text{ мм}, 640 \text{ мм}, 770 \text{ мм}; a = 120 \text{ мм}$.

Для панельного здания $t = 270 \text{ мм}, 320 \text{ мм}, 300 \text{ мм}, 350 \text{ мм}, 400 \text{ мм}; a = 90 \text{ и } 70 \text{ мм}$.

Для здания из крупных блоков $l = 500 \text{ мм}, 600 \text{ мм}; a = 150 \text{ и } 200 \text{ мм}$.

Порядок выполнения работы:

1. Повторение формул для вычисления периметра и объема фигур.
2. Раздача индивидуальных карточек.
3. Составление алгоритма решения, объяснение преподавателя.
4. Самостоятельная работа.
5. Оценка работы студентов.
6. Подведение итогов.

Ход работы:

Перечертить план здания с карточки с пометками и размерами.

2. Размеры даны осевые, а поэтому необходимо найти:

$$L_{\text{н}} = L_o + 2t;$$

$$L_o = L_{\text{в}};$$

$$B_{\text{н}} = B_o + 2(t - a);$$

$$B_{\text{в}} = B_o - 2a;$$

$$B_{\text{н}} = B_o + 2(t - a) = B_{\text{в}} + 2t.$$

3. Вычислить площадь поверхности стен, учитывая, что $A_{\text{стены}} = P_{\text{нар}} \cdot H$.

4. Периметр здания $P = (L_{\text{н}} + B_{\text{н}}) \cdot 2$

5. Вычислить: $V_{\text{здания}} = L_{\text{н}} \cdot B_{\text{н}} \cdot H$; $V_{\text{пом}} = L_{\text{в}} \cdot B_{\text{в}} \cdot H$; $V_{\text{стен}} = P \cdot t \cdot H$;

$$V_{\text{стен}} = (B_{\text{в}} + B_{\text{н}} + L_o + L_{\text{п}}) \cdot t \cdot H$$

6. Вычислить общую площадь здания $A_{\text{общ}} = A_{1\text{эт}} \cdot n_{\text{эт}}$; $A_{\text{общ}} = (B_{\text{в}} \cdot L_o) \cdot n_{\text{эт}}$

Студентам раздаются карточки индивидуальные (16 вариантов) и они выполняют задание самостоятельно (если возникают вопросы, консультируются у преподавателя). После выполнения задания студенты сдают и защищают свою работу. Прилагаются 30 вариантов заданий.

Разберем решение одного задания.

Пусть здание имеет стены из кирпича:

$$B_o = 6000 \text{ мм}; H = 8,4 \text{ м}; L_o = 25000 \text{ мм} = L_{\text{в}}; n_{\text{эт}} = 3; a = 120 \text{ мм}; t = 640 \text{ мм}.$$

Решение:

Подсчитаем наружную длину здания:

$$L_{\text{н}} = L_o + 2t = 25000 + 2 \cdot 640 = 26280 \text{ мм} = 26,28 \text{ м}.$$

Найдем внутреннюю и наружную ширину здания:

$$B_{\text{в}} = B_o - 2a = 6000 - 2 \cdot 120 = 5760 \text{ мм} = 5,76 \text{ м};$$

$$B_{\text{н}} = B_{\text{в}} + 2t = 5760 + 2 \cdot 640 = 7040 \text{ мм} = 7,04 \text{ м}.$$

Найдем периметр наружных стен:

$$P = (L_{\text{н}} + B_{\text{н}}) \cdot 2 = 2(26,28 + 7,04) = 33,32 \cdot 2 = 66,64 \text{ м}.$$

Вычислим площадь поверхности стен:

$$A_{\text{стены}} = P_{\text{нар}} \cdot H = 66,64 \cdot 8,4 = 559,78 \text{ м}^2$$

Вычислим объем здания:

$$V_{\text{здания}} = L_{\text{н}} \cdot B_{\text{н}} \cdot H = 26,28 \cdot 7,04 \cdot 8,4 = 1554,09 \text{ м}^3$$

Подсчитаем объем внутреннего помещения:

$$V_{\text{пом}} = L_{\text{в}} \cdot B_{\text{в}} \cdot H = 25 \cdot 5,76 \cdot 8,4 = 1209,6 \text{ м}^3.$$

Найдем объем стен здания:

$$V_{\text{стен}} = L_{\text{срис}} \cdot t \cdot H = 64,08 \cdot 0,64 \cdot 8,4 = 344,49 \text{ м}^3;$$

$$V_{\text{стен}} = B_{\text{в}} + B_{\text{н}} + L_{\text{о}} + L_{\text{п}} = 64,08 \text{ м}.$$

Вычислим общую площадь помещений зданий:

$$A_{\text{общ}} = B_{\text{в}} \cdot L_{\text{о}} \cdot n_{\text{эт}} = 5,76 \cdot 25 \cdot 3 = 432 \text{ м}^2$$

№	$B_{\text{о}}$	$L_{\text{о}}$	H	$n_{\text{эт}}$	a	t
1	12000	25600	11,20	3	90	270
2	9000	20800	14,00	5	100	300
3	7200	23200	16,80	6	90	320
4	15000	38400	33,60	12	100	350
5	13500	28800	14,00	5	90	400
6	6000	18000	14,00	5	120	500
7	9000	22000	16,80	6	120	600
8	12000	24000	25,20	9	120	500
9	15000	30000	19,60	7	120	600
10	18000	32000	25,20	9	120	500
11	12000	26000	14,00	5	120	600
12	14000	28000	14,00	5	120	510
13	9000	26000	16,80	6	120	640
14	12000	30000	19,60	7	120	770
15	18200	32000	22,40	8	120	510
16	10000	24500	25,20	9	120	640
17	18400	33000	28,80	10	120	770
18	11500	24000	33,60	12	120	510
19	8600	28000	44,80	16	120	640
20	18100	36000	16,80	6	120	770
21	6600	25000	25,20	9	120	510
22	10800	23000	33,60	12	120	640
23	16200	31000	39,20	14	120	770
24	11400	29000	28,80	10	120	510
25	15600	33000	25,20	9	120	640
26	10600	27000	19,60	7	120	770
27	14100	29000	16,80	6	120	510
28	14800	30000	33,60	12	120	640
29	9200	26000	39,20	14	120	770
30	7200	25500	44,80	16	120	510

3. Оценка работы студентов. Подведение итогов.

Вопросы к учащимся к пункту №5:

1. Какое значение может принимать К?
2. Обсудить различные значения К и что означает для арендатора, квартиросъемщика и для...

Вопросы к учащимся к пункту №7:

1. Какие значения может принимать коэффициент остекленности К?
2. Какой коэффициент остекленности лучше: $K_1 = 1/5,5$ до $1/8$; $K_2 = 0,5$ (холодная); $K_3 = 0,1$ (темная) почему?

Осудить этот вопрос с преподавателем. Подвести итоги занятия.

Форма представления результата: Выполненные задания

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Раздел 1. Практическая геометрия

Практическая работа № 2

Вычисление площадей нестандартных фигур

Цель работы: научить студентов вычислять площади квартир, окон, различных планировочных и объемных коэффициентов, использование ранее полученных знаний по геометрии, установить и показать наглядно связь математики со специальными дисциплинами, например, «Архитектура зданий»; выработать у студентов стремление к глубокому усвоению полученных знаний, обучение рациональным приемам труда и умение самостоятельно работать.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- выполнять необходимые измерения и связанные с ним расчеты; вычислять площади деталей строительных конструкций;
- применять математические методы для решения профессиональных задач.

Материальное обеспечение:

5. Таблица: «Вычисление площадей различных геометрических фигур на плоскости».

6. Карточки-задания для выполнения индивидуальных работ по 30 вариантам.

Задание:

m- количество букв в имени

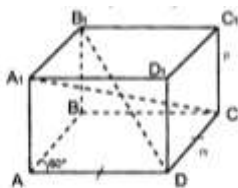
n- количество букв в фамилии

p- месяц рождения

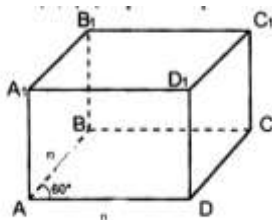
1. Ребро куба равно p см. Найти его объем и площадь полной поверхности

2. В прямоугольном параллелепипеде диагональ основания $(m+n)$ см, а боковое ребро p см. Найти площадь диагонального сечения.

3. Решить задачу на чертежах. Дан прямоугольный параллелепипед. Найти A_1C , B_1D



4. Решить задачу на чертежах. Дан прямоугольный параллелепипед. $AC=B_1D$. Найти полную поверхность



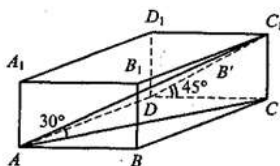
Порядок выполнения работы:

- 1) Выполнить чертеж
- 2) Записать кратко условие задачи

Ход работы:

Задача 1: Угол между диагональю AC , прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, и плоскостью основания $ABCD$ равен 30° , а диагональ боковой грани DC , наклонена к плоскости основания под углом 45° . Высота параллелепипеда равна 3 см. Найдите его объем.

Решение:



$$\angle C_1DC = \angle DC_1C = 45^\circ \rightarrow DC = CC_1 = 3$$

$$AC_1 = 2CC_1 = 6$$

$$AC = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$$

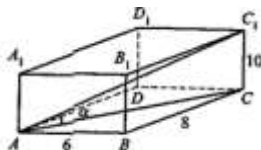
$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{27 - 9} = 3\sqrt{2}$$

$$V = AB \cdot BC \cdot CC_1 = 3 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3 = 27\sqrt{2}$$

Ответ: $27\sqrt{2} \text{ см}^3$

Задача 2: Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 6 м и 8 м, боковое ребро равно 10 м. Найдите угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью его основания.

Решение:



$$AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$AC=CC_1$ следовательно $\triangle ACC_1$ – равнобедренный, а значит $\alpha=45^\circ$

Ответ: $\alpha=45^\circ$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Раздел 2 Основы линейной алгебры

Практическая работа №3

Действия над матрицами. Вычисление определителей

Цель работы: научить выполнять действия над матрицами, вычислять определители, находить обратную матрицу, вычислять ранг матрицы, приводить матрицу к ступенчатому виду.

Выполнив работу, Вы будете:

Уметь: выполнять действия над матрицами, приводить матрицу к ступенчатому виду, находить обратную матрицу, вычислять определитель 2-го и 3-его порядка, вычислять ранг матрицы, приводить матрицу к ступенчатому виду.

Материальное обеспечение:

Тетрадь с конспектом, таблица «Матрицы и определители», Карточки-задания для выполнения индивидуальных работ, таблица с ответами для преподавателя.

Задание: 1. Вычислить матрицу X .

Задание: 2. Для данной матрицы A найти обратную.

Задание: 3. Найти ранг матрицы A

Порядок выполнения работы:

- 1) Повторение правил и формул
- 2) Объяснение преподавателя
- 3) Оценка выполненных заданий
- 4) Подведение итогов.

Ход работы:

1) Повторение правил и формул

1. Что называется матрицей, элементами матрицы, размером матрицы? Какие матрицы называются равными?
2. По какому правилу складываются матрицы?
3. Можно ли сложить матрицы размерами 2×3 и 3×1 ?
4. Можно ли из одной матрицы вычесть другую? Как это сделать? Каким условиям должны удовлетворять при этом матрицы? Какие размеры имеет матрица, являющаяся результатом этой операции?
5. Как умножить матрицу на число?
6. Как перемножаются матрицы? Какие матрицы можно перемножать? Какие размеры имеет матрица, являющаяся результатом этой операции?
7. Можно ли умножить матрицу с размерами 2×3 на матрицу с такими же размерами?
8. Какими свойствами обладает операция умножения матриц?
9. Что такое транспонирование матриц?

1) Объяснение преподавателя

Задание 1: Вычислите матрицу $X = 2CB + 3A^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

Выполним задание по действиям:

$$1) \quad 2xC = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad 2CB =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ 0 \cdot 2 + (-6) \cdot (-1) & 0 \cdot (-1) + (-6) \cdot 2 & 0 \cdot 2 + (-6) \cdot 0 \\ 6 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & 6 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & 6 \cdot 2 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 6 & -12 & 0 \\ 8 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу, транспонированную к A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$1) \quad 3A^T = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad 2CB + 3A^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 6 & -12 & 0 \\ 8 & 2 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 11 \\ 6 & -9 & 3 \\ 2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

Задание 2: Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Найдите матрицу, обратную данной A.

Решение:

Обратную матрицу найдем по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

1. Вычислим определитель матрицы A: $|A| = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

2. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

3. Найдем матрицу, обратную данной $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Правильность вычислений можно проверить, используя равенство $A^{-1} \cdot A = E$.

Задание 3: Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Решение:

Чтобы найти ранг матрицы A надо привести ее к ступенчатому виду и подсчитать у последней число ненулевых строк. Это число и будет рангом матрицы A.

Выполним последовательно следующие элементарные преобразования, которые приводят матрицу A к ступенчатому виду:

1) к 2-ой строке прибавим соответствующие элементы 1-ой строки, предварительно умноженной на -2; к 3-ей строке прибавим соответствующие элементы 1-ой строки, предварительно умноженной на -5; 2) к 3-ей строке прибавим соответствующие элементы 2-ой строки, предварительно умноженной на -2. Получаем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ранг матрицы равен 2}$$

2) **Оценка работ студентов.** Форма предоставления результата: выполненные задания

3) **Подведение итогов.**

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Раздел 2 Основы линейной алгебры

Практическая работа №4

Нахождение обратной матрицы

Цель работы: научиться находить обратные матрицы различными методами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- находить обратную матрицу с помощью алгебраических дополнений;
- находить обратную матрицу методом Гаусса - Жордана.

Материальное обеспечение:

Тетрадь с конспектом, таблица «Матрицы и определители», Карточки-задания для выполнения индивидуальных работ, таблица с ответами для преподавателя.

Задание: Для данной матрицы A найти обратную.

Порядок выполнения работы:

- 5) Повторение правил и формул
- 1) Объяснение преподавателя
- 2) Оценка выполненных заданий
- 3) Подведение итогов.

Ход работы:

Повторение правил и формул

1. Что называется матрицей, элементами матрицы, размером матрицы? Какие матрицы называются равными?
2. По какому правилу складываются матрицы?
3. Можно ли сложить матрицы размерами 2×3 и 3×1 ?
4. Можно ли из одной матрицы вычесть другую? Как это сделать? Каким условиям должны удовлетворять при этом матрицы? Какие размеры имеет матрица, являющаяся результатом этой операции?
5. Как умножить матрицу на число?
6. Как перемножаются матрицы? Какие матрицы можно перемножать? Какие размеры имеет матрица, являющаяся результатом этой операции?
7. Можно ли умножить матрицу с размерами 2×3 на матрицу с такими же размерами?
8. Какими свойствами обладает операция умножения матриц?

Задание: Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Найдите матрицу, обратную данной A .

Решение:

Обратную матрицу найдем по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

1. Вычислим определитель матрицы A: $|A| = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

2. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

3. Найдем матрицу, обратную данной $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Правильность вычислений можно проверить, используя равенство $A^{-1} \cdot A = E$.

Оценка работ студентов. Форма предоставления результата: выполненные задания

Подведение итогов.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в

ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Раздел 2 Основы линейной алгебры

Практическая работа №5

Решение систем линейных уравнений методами Гаусса и Крамера

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений, используя формулы Крамера и метод Гаусса.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными методом Крамера;

решать системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Крамера;

решать системы линейных уравнений методом Гаусса.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, учебники, конспекты лекций.

Задание1:

Решить системы линейных уравнений:

$$1) \begin{cases} 3x - 5y = 11 \\ 2x + 3y = 20 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 3y - 5z = -2 \\ x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + 7z = 27 \end{cases}$$

Задание 2: Решить систему n линейных уравнений с n неизвестными методом Гаусса.

Задание 3: Методом Гаусса решить систему m линейных уравнений с n неизвестными

Краткие теоретические сведения:

Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель называется определителем системы: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Составим определители каждой неизвестной. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель Δ_3 получается из определителя Δ путем замены третьего столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Чтобы вычислить значения неизвестных, воспользуемся формулами Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

Порядок выполнения работы:

1. Запишите систему уравнений.
2. Запишите и вычислите определитель системы.
3. Вычислите определители каждой неизвестной.
4. Найдите значения неизвестных, используя формулы Крамера.
5. Какая система уравнений называется неоднородной?
6. Для каких систем уравнений применяется метод Гаусса?
7. В чем суть метода Гаусса?
8. Как записывается формула Крамера? Когда систему уравнений можно решить по формулам Крамера?
9. Как записывают неоднородную систему уравнений в матричном виде?
10. Всякую ли систему можно решить матричным способом?
Запишите формулу для нахождения решения матричным методом.

Ход работы:

Задание 1. Рассмотрим пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Вычислим определители каждой переменной:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 40 - 15 + 10 - 0 = 20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 30 + 0 + 45 - 0 - 20 = -10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 30 - 0 - 20 - 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{10} = -1; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0$$

Ответ: (2;-1;0).

Задание 2. Решить систему:
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 27 \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 11 \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 3 \end{cases}$$

а) методом Гаусса;

б) средствами матричного исчисления.

Решение: *методом Гаусса.*

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных. Матрицу системы с помощью элементарных преобразований приводят к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида (прямой ход), из которой последовательно, начиная с последних по номеру переменных, находятся все остальные переменные (обратный ход).

Преобразования Гаусса удобно проводить, осуществляя преобразования не с самими уравнениями, а с матрицей их коэффициентов. При выполнении прямого хода используют элементарные преобразования матриц.

Для заданной системы уравнений запишем расширенную матрицу и, выполняя элементарные преобразования, приведем ее к диагональному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 13 & 27 \\ 3 & 14 & 12 & 11 \\ 5 & 25 & 16 & 3 \end{array} \right)$$

Умножим 1-ую строку на (-2) и прибавим полученную строку ко 2-ой и 3-ей, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 13 & 27 \\ -1 & 0 & -14 & -43 \\ 1 & 11 & -10 & -51 \end{array} \right)$$

Поменяем местами 1-ую строку со 2-ой, 2-ую с 3-ей, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -14 & -43 \\ 1 & 11 & -10 & -51 \\ 2 & 7 & 13 & 27 \end{array} \right)$$

Умножим 1-ую строку на (1) и прибавим полученную ко 2-ой, затем 1-ую умножим на (2) и

прибавим полученную к 3-ей, получим
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 43 \\ 0 & 11 & -24 & -94 \\ 0 & 7 & -15 & -59 \end{array} \right)$$

Умножим 2-ую строку на (-7),а 3-ью на (11) и прибавим полученную 2-

ую строку к 3-ей, получим
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 43 \\ 0 & 11 & -24 & -94 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

Умножим 3-ью строку на (8) и полученную прибавим ко 2-ой, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 43 \\ 0 & 11 & 0 & -22 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

Разделим 3-ью строку на 3, затем умножим полученную на (-14) и прибавим к 1-ой,

получим матрицу $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) E$, которая соответствует системе

$$\text{уравнений} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

б) средствами матричного исчисления

$$\text{Система запишется } A \cdot X = B; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 3 & 14 & 12 \\ 5 & 25 & 16 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 27 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Решение: } X = A^{-1} \cdot B.$$

$$\text{Составим обратную матрицу } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Вычислим определитель матрицы A:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 3 & 14 & 12 \\ 5 & 25 & 16 \end{vmatrix} = 2 \cdot 14 \cdot 16 + 7 \cdot 12 \cdot 5 + 3 \cdot 25 \cdot 13 - 5 \cdot 14 \cdot 13 - 3 \cdot 7 \cdot 16 - 2 \cdot 25 \cdot 12 = -3$$

$\neq 0 \rightarrow$ обратная матрица существует.

Вычислим алгебраические дополнения матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 14 & 12 \\ 25 & 16 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 25 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot (56 - 75) = -76; \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 5 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$12; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 14 \\ 5 & 25 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 7 & 13 \\ 25 & 16 \end{vmatrix} = 213; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 5 & 16 \end{vmatrix} = -33;$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 25 \end{vmatrix} = -15; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 13 \\ 14 & 12 \end{vmatrix} = -98; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$15; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 14 \end{vmatrix} = 7$$

Найдем X: $X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -76 & 213 & -98 \\ 12 & -33 & 15 \\ 5 & -15 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -76 \cdot 27 + 213 \cdot 11 - 98 \cdot 3 \\ 16 \cdot 27 - 33 \cdot 11 + 15 \cdot 3 \\ 5 \cdot 27 - 15 \cdot 11 + 7 \cdot 3 \end{pmatrix} =$
 $-\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2052 + 2343 - 294 \\ 324 - 369 + 45 \\ 135 - 165 + 21 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

1. Алгоритм решения системы линейных уравнений матричным методом:

1. Составить матрицу A из коэффициентов при неизвестных, матрицу B из свободных членов и матрицу X из неизвестных.
2. Найти обратную матрицу A^{-1} .
3. Найти произведение обратной матрицы A^{-1} на матрицу-столбец свободных членов B.

Задание 3. Методом Гаусса решить систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases} \quad \text{Запишем расширенную}$$

матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & -3 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{Запишем систему}$$

$$\text{уравнений} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ -x_3 - 2x_4 - 4x_5 = -3 \\ -x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{Система совместна.}$$

Ранг равен 3. Решений бесчисленное множество. Оставим в левой части переменные x_2 и x_3 и x_4 , которые берем за основные, а остальные неосновные переменные x_1 и x_5 переносим в правую часть уравнения. В результате получим систему:

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 - 3x_5 - 2x_1 \\ -x_3 - 2x_4 = -3 + 4x_5 \\ -x_4 = 0 \end{cases}, \text{ откуда } x_4 = 0, -x_3 - 0 = -3 +$$

$$4x_5, x_3 = 3 - 4x_5; -x_2 + (3 - 4x_5) + 2 \cdot 0 =$$

$$2 - 3x_5 - 2x_1. \text{ Итак, получим } x_2 = 1 - x_5 + 2x_1; x_3 = 3 - 4x_5; x_4 = 0.$$

Задавая не основным переменным произвольные значения $x_1 = c_1, x_5 = c_2$. Найдем бесконечное множество решений системы: $X =$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ 1 - c_2 + 2c_1 \\ 3 - 4c_2 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}, \text{ где } c_1, c_2 \in R.$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Раздел 2 Основы линейной алгебры

Практическая работа №6

Решение систем линейных уравнений матричным способом

Цель работы: научить приводить матрицу к ступенчатому виду, решать систему линейных уравнений методом Гаусса, матричным методом, решать профессиональные задачи

Выполнив работу, Вы будете: Уметь: решать систему линейных уравнений матричным методом, решать профессиональные задачи.

Материальное обеспечение: Тетрадь с конспектом, карточки-задания для выполнения индивидуальных работ, таблица с ответами для преподавателя.

Задание : Решить систему n линейных уравнений с n неизвестными средствами матричного исчисления

Порядок выполнения работы:

1. Повторение теоретического материала
2. Объяснение преподавателя
3. Оценка выполненных заданий
4. Подведение итогов.

Ход работы:

Повторение теоретического материала:

- Какая система уравнений называется неоднородной?
- Для каких систем уравнений применяется метод Гаусса?
- В чем суть метода Гаусса?
- Как записывается формула Крамера? Когда систему уравнений можно решить по формулам Крамера?
- Как записывают неоднородную систему уравнений в матричном виде?
- Всякую ли систему можно решить матричным способом? Запишите формулу для нахождения решения матричным методом.

2. Объяснение преподавателя

Задание. Решить систему :
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 27 \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 11 \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 3 \end{cases}$$
 средствами матричного исчисления.

Решение:

Система запишется $A \cdot X = B$; $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 3 & 14 & 12 \\ 5 & 25 & 16 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 27 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$.

Решение: $X = A^{-1} \cdot B$.

Составим обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$

Вычислим определитель матрицы A:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 3 & 14 & 12 \\ 5 & 25 & 16 \end{vmatrix} = 2 \cdot 14 \cdot 16 + 7 \cdot 12 \cdot 5 + 3 \cdot 25 \cdot 13 - 5 \cdot 14 \cdot 13 - 3 \cdot 7 \cdot 16 - 2 \cdot 25 \cdot 12 = -3$$

$\neq 0 \rightarrow$ обратная матрица существует.

Вычислим алгебраические дополнения матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 14 & 12 \\ 25 & 16 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 25 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot (56 - 75) = -76; \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 5 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$12$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 14 \\ 5 & 25 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 7 & 13 \\ 25 & 16 \end{vmatrix} = 213; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 5 & 16 \end{vmatrix} = -33;$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 25 \end{vmatrix} = -15; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 13 \\ 14 & 12 \end{vmatrix} = -98; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$15; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 14 \end{vmatrix} = 7$$

Найдем X: $X = A^{-1} \cdot B = -$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -76 & 213 & -98 \\ 12 & -33 & 15 \\ 5 & -15 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -76 \cdot 27 + 213 \cdot 11 - 98 \cdot 3 \\ 16 \cdot 27 - 33 \cdot 11 + 15 \cdot 3 \\ 5 \cdot 27 - 15 \cdot 11 + 7 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$-\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2052 + 2343 - 294 \\ 324 - 369 + 45 \\ 135 - 165 + 21 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. Алгоритм решения системы линейных уравнений матричным методом:

4. Составить матрицу A из коэффициентов при неизвестных, матрицу B из свободных членов и матрицу X из неизвестных.
5. Найти обратную матрицу A^{-1} .
6. Найти произведение обратной матрицы A^{-1} на матрицу-столбец свободных членов B.

7. Оценка работ студентов. Форма предоставления результата: выполненные задания.

8. Подведение итогов.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Раздел 2 Основы линейной алгебры

Практическая работа №7

Решение профессиональных задач

Цель работы: научить приводить матрицу к ступенчатому виду, решать систему линейных уравнений методом Гаусса, матричным методом, решать профессиональные задачи

Выполнив работу, Вы будете: Уметь: решать систему линейных уравнений матричным методом, решать профессиональные задачи.

Материальное обеспечение: Тетрадь с конспектом, карточки-задания для выполнения индивидуальных работ, таблица с ответами для преподавателя.

Задание : Решить систему n линейных уравнений с n неизвестными средствами матричного исчисления

Порядок выполнения работы:

5. Повторение теоретического материала
6. Объяснение преподавателя
7. Оценка выполненных заданий
8. Подведение итогов.

Ход работы:

Повторение теоретического материала:

- Какая система уравнений называется неоднородной?
- Для каких систем уравнений применяется метод Гаусса?
- В чем суть метода Гаусса?

- Как записывается формула Крамера? Когда систему уравнений можно решить по формулам Крамера?
- Как записывают неоднородную систему уравнений в матричном виде?
- Всякую ли систему можно решить матричным способом? Запишите формулу для нахождения решения матричным методом.

4. Объяснение преподавателя

Задание. Решить систему:
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 27 \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 11 \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 3 \end{cases}$$

средствами матричного исчисления.

Решение:

Система запишется $A \cdot X = B$; $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 3 & 14 & 12 \\ 5 & 25 & 16 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B =$

$$\begin{pmatrix} 27 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Решение: $X = A^{-1} \cdot B$.

Составим обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$

Вычислим определитель матрицы A:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 3 & 14 & 12 \\ 5 & 25 & 16 \end{vmatrix} = 2 \cdot 14 \cdot 16 + 7 \cdot 12 \cdot 5 + 3 \cdot 25 \cdot 13 - 5 \cdot 14 \cdot 13 - 3 \cdot 7 \cdot 16 - 2 \cdot 25 \cdot 12 = -3$$

$\neq 0 \rightarrow$ обратная матрица существует.

Вычислим алгебраические дополнения матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 14 & 12 \\ 25 & 16 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 25 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot (56 - 75) = -76; \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 5 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$12; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 14 \\ 5 & 25 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 7 & 13 \\ 25 & 16 \end{vmatrix} = 213; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 5 & 16 \end{vmatrix} = -33;$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 25 \end{vmatrix} = -15; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 13 \\ 14 & 12 \end{vmatrix} = -98; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$15; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 14 \end{vmatrix} = 7$$

Найдем X: $X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -76 & 213 & -98 \\ 12 & -33 & 15 \\ 5 & -15 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -76 \cdot 27 + 213 \cdot 11 - 98 \cdot 3 \\ 16 \cdot 27 - 33 \cdot 11 + 15 \cdot 3 \\ 5 \cdot 27 - 15 \cdot 11 + 7 \cdot 3 \end{pmatrix} =$
 $-\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2052 + 2343 - 294 \\ 324 - 369 + 45 \\ 135 - 165 + 21 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

5. Алгоритм решения системы линейных уравнений матричным методом:

9. Составить матрицу A из коэффициентов при неизвестных, матрицу B из свободных членов и матрицу X из неизвестных.
10. Найти обратную матрицу A^{-1} .
11. Найти произведение обратной матрицы A^{-1} на матрицу-столбец свободных членов B.

12. Оценка работ студентов. Форма предоставления результата: выполненные задания.

13. Подведение итогов.

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Раздел 3. Математический анализ

Практическая работа №8

Вычисление пределов. Раскрытие неопределённостей. Вычисление односторонних пределов. Исследование точек разрыва

Цель работы: научить вычислять пределы функций в точке и на бесконечности; раскрывать неопределённости, вычислять замечательные пределы.

Выполнив работу, Вы будете:

Уметь: вычислять пределы функций в точке и на бесконечности, раскрывать неопределённости.

Материальное обеспечение:

Тетрадь с конспектом, таблица «Свойства пределов», , карточки-задания для выполнения индивидуальных работ.

Задание №1. Решить задачи на числовую последовательность.

Задание №2. Вычислить пределы функций.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно ознакомьтесь с условием задания.
1. Пользуясь своими школьными знаниями (в случае затруднения воспользуйтесь справочными материалами), выполните задание

Ход работы:

Задание №1

1. Девятый член последовательности $c_n =$

$\left(\frac{2n-1}{\sqrt{n^3+3}}\right)$ равен?

$$c_9 = \left(\frac{2 \cdot 9 - 1}{\sqrt{9^3 + 3}}\right) = \frac{17}{\sqrt{732}} = \frac{17}{2\sqrt{183}}; \Rightarrow c_9 = \frac{17}{2\sqrt{183}}$$

2. Номер числа 6, являющегося членом последовательности $a_n = n^2 - 5n$ равен?

$$6 = n^2 - 5n$$

$$n^2 - 5n - 6 = 0$$

$$n_1 = 6$$

$n_2 = -1$ – посторонний корень т.к. номер не может быть отрицательным числом.

Ответ: $n=6$.

Задание №2

Найдите пределы предварительно избавившись от неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$1. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{x^2 - 9x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)(x+9)}{x(x-9)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x+9}{x} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{18}{9} = \lim_{x \rightarrow 9} 2 = 2;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+5)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 5) = \lim_{x \rightarrow 1} (1 + 5) = \lim_{x \rightarrow 1} (6) = 6$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 x_2 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x})(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})}{x(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{a+x})^2 - (\sqrt{a-x})^2}{x(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a+x-a+x}{x(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{a+0} + \sqrt{a-0}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{2\sqrt{a}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}};$$

Вычислить пределы имеющие неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} + \frac{2x^2}{x^3} + \frac{3x}{x^3} + \frac{4}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3} + \frac{2x}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{4 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+0+0+0}{4+0+0+0} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4};$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{x^2 + 4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} + \frac{4}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+0+0}{0+0} =$$

$$\left(\frac{2}{0}\right) = +\infty$$

(0 в знаменателе принимаем за бесконечно малую величину.)

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Раздел 3. Математический анализ

Практическая работа №9

Вычисление производных элементарных и сложных функций

Цель работы: научить вычислять производные элементарных и сложных функций, учить проводить исследование функции и строить ее график.

Выполнив работу, Вы будете:

Уметь: вычислять производные элементарных и сложных функций, используя правила и формулы дифференцирования, проводить исследование функции и строить ее график.

Материальное обеспечение:

Тетрадь с конспектом, таблица «Правила и формулы дифференцирования», таблица «Полное исследование функции и построение графика», карточки-задания для выполнения индивидуальных работ, таблица с ответами для преподавателя.

Задание: 1. Найти производную функции

Задание2. Провести полное исследование функции и построить ее график

Порядок выполнения работы:

4. Повторение правил и формул
5. Объяснение преподавателя
6. Оценка выполненных заданий
7. Подведение итогов.

Ход работы:

1.Повторение правил и формул

Дайте определение производной функции.

Сформулируйте общее правило нахождения производной функции.

Какая связь существует между непрерывностью функции и ее производной?

Чему равна производная постоянной?

Чему равна производная аргумента?

Как вычисляется алгебраической суммы функций, произведения и частного функций?

Какая функция называется сложной?

Как вычисляется производная сложной функции?

1.Объяснение преподавателя

Задание . Найти производные функций

Задания	Пояснения
8. $(x^{10})' = 10x^{10-1} = 10x^9$	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

9.	$\left(\frac{5}{x^{11}}\right)' = (5 \cdot x^{-11})' = 5(x^{-11})' = 5(-11)x^{-11-1} = -55x^{-12}$	$x^{-n} = \frac{1}{x^n};$ $(cx)' = c(x)';$ $(x^n)' = nx^{n-1}$
10.	$(2x^{10} - x^8 + 3x^3)' = (2x^{10})' - (x^8)' + (3x^3)' = 2(x^{10})' - (x^8)' + 3(x^3)' = 2 \cdot 10x^9 - 8x^7 + 9x^2$	$(u+v)' = u' + v'$ $(cx)' = c(x)'$
11.	$Y = (7x^4 - 2x + 3)^5;$ $Y = u^5,$ где $u = 7x^4 - 2x + 3;$ $y' = 5u^4 \cdot u';$ $y' = 5(7x^4 - 2x + 3)^4 \cdot (7x^4 - 2x + 3)';$ $y' = 5(7x^4 - 2x + 3)^4 \cdot (28x^3 - 2);$ Найти y'_x при $x = 0;$ $y'_0 = 5 \cdot 3^4 \cdot (-2) = -810$	Воспользуемся формулой $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u',$ где $n = 5$ $(cx^n)' = c(x^n)'$ $(c)' = 0$
12.	$((x+1) \cdot \sqrt{x})' = (x+1)' \cdot \sqrt{x} + (x+1)(\sqrt{x})' = \sqrt{x} + (x+1) \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ $(u+v)' = u' + v'$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x)' = 1$
13.	$((2x-7)^{14})' = 14(2x-7)^{13}(2x-7)' = 282x - 713$	$y' = f'(u) \cdot u'(x),$ $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

6. Оценка выполненных заданий

Форма предоставления результата: выполненные задания

7. Подведение итогов

Составление таблицы «Полное исследование функции и построение графиков»

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет

получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Раздел 32. Математический анализ

Практическая работа №10

Применение производной к исследованию функций

Цель работы: научить вычислять производные элементарных и сложных функций, учить проводить исследование функции и строить ее график .

Выполнив работу, Вы будете:

Уметь: вычислять производные элементарных и сложных функций, используя правила и формулы дифференцирования, проводить исследование функции и строить ее график.

Материальное обеспечение:

Тетрадь с конспектом, таблица «Правила и формулы дифференцирования», таблица «Полное исследование функции и построение графика», карточки-задания для выполнения индивидуальных работ, таблица с ответами для преподавателя.

Задание: 1. Найти производную функции

Задание2. Провести полное исследование функции и построить ее график

Порядок выполнения работы:

14. Повторение правил и формул
15. Объяснение преподавателя
16. Оценка выполненных заданий
17. Подведение итогов.

Ход работы:

1.Повторение правил и формул

Дайте определение производной функции.

Сформулируйте общее правило нахождения производной функции.

Какая связь существует между непрерывностью функции и ее производной?

Чему равна производная постоянной?

Чему равна производная аргумента?

Как вычисляется алгебраической суммы функций, произведения и частного функций?

Какая функция называется сложной?

Как вычисляется производная сложной функции?

1.Объяснение преподавателя

Задание. Провести полное исследование функции $y = \frac{x^2}{x+1}$ и построить ее график.

Решение:

1. $D(y) = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

2. Так как область определения функции не симметрична относительно начала координат, то исследуемая функция не является ни четной, ни нечетной; кроме того она не периодична.

3. Функция терпит разрыв при $x = -1$, следовательно график функции имеет вертикальную асимптоту $x = -1$. Для отыскания наклонной асимптоты найдем $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x(x+1)} =$

$1; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$. Значит прямая $y = x - 1$ служит наклонной асимптотой графика.

4. Определим интервалы монотонности и экстремум функции.

Дифференцируя данную функцию, получим $y' = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} =$

$\frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$. Производная обращается в нуль при $x = -2$ и $x = 0$ и терпит разрыв при $x = -1$. Этими точками числовая прямая делится на четыре промежутка:

$(-\infty, -2), (-2, -1), (-1, 0), (0, +\infty)$. найдем знак

производной в каждом из них: на $(-\infty, -2)$ $y' > 0$;

на $(-2, -1)$ имеем $y' < 0$; на $(-1, 0)$ также $y' < 0$;

на $(0, +\infty)$ имеем $y' > 0$. следовательно, в

промежутках

$(-\infty, -2)$ и $(0, +\infty)$ функция возрастает, а в промежутках $(-2, -1)$ и $(-1, 0)$

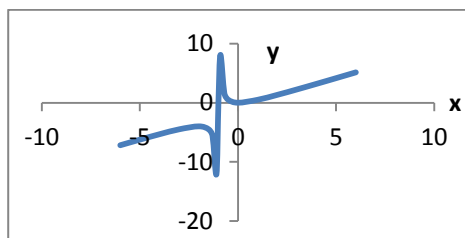
убывает. точки $x = -2$ и $x = 0$

являются соответственно точками максимума и минимума.

Находим значения функции экстремальных точках

$y_{\max} = y(-2) = -4, y_{\min} = y(0) = 0.$

5. Определим интервалы выпуклости и точки перегиба функции. Найдем $y'' = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+2x)}{(x+1)^4} = 2 \frac{x^2+2x+1-x^2-2x}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^3}$. Вторая производная терпит разрыв при $x = -1$. Этой точкой числовая ось разбивается на два промежутка: $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$. Определим знак второй производной в этих промежутках: в первом из них $y'' < 0$, а во втором $y'' > 0$. Таким образом, в промежутке $(-\infty, -1)$ кривая выпукла вверх, а в промежутке $(-1, +\infty)$ выпукла вниз. Точек перегиба нет. Используя полученные данные строим график:



8. Оценка выполненных заданий

Форма предоставления результата: выполненные задания

9. Подведение итогов

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Раздел 3. Математический анализ

Практическая работа №11

Решение задач с использованием различных методов интегрирования

Цель работы: научить применять метод непосредственного интегрирования, метод подстановки, метод интегрирования по частям; научить вычислять площади плоских фигур с помощью определенного интеграла; познакомить студентов с применением определенного интеграла к решению некоторых физических и технических задач.

Выполнив работу, Вы будете: Уметь использовать основные свойства интеграла для нахождения простейших интегралов; находить интегралы методом непосредственного интегрирования, методом подстановки, методом интегрирования по частям; уметь вычислять площади плоских фигур с помощью определенного интеграла; иметь понятие о применении интеграла для решения прикладных задач.

Материальное обеспечение:

Тетрадь с конспектом, таблица интегралов, карточки-задания для выполнения индивидуальных работ, таблица с ответами для преподавателя.

Задание 1. Найти неопределенный интеграл

Задание 2. Вычислить определенный интеграл

Задание 3. Вычислить площадь фигуры

Порядок выполнения работы:

1. Повторение правил и формул
2. Объяснение преподавателя
3. Оценка выполненных заданий
4. Подведение итогов.

Ход работы:

1. Повторение правил и формул

- Какое действие называется интегрированием?
- Какая функция называется первообразной для данной функции $f(x)$?
- Чем отличаются друг от друга различные первообразные функции для данной функции $f(x)$?
- Дайте определение неопределенного интеграла.

- Дайте определение подинтегральной функции и подинтегрального выражения.
- Каков геометрический образ соответствует неопределенному интегралу $\int f(x)dx$?
- Как проверяется результат интегрирования?
- Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла.
- В чем заключается метод замены переменных при отыскании неопределенного интеграла?
- Приведите основные свойства определенного интеграла.
- Объясните в чем заключается геометрический смысл определенного интеграла.

2. Объяснение преподавателя

Задание: 1. Найти неопределенный интеграл

Непосредственное интегрирование

Пример 1 $\int \left(\frac{3}{x} + 2 \sin x \right) dx$

Решение: Используя свойства неопределенного интеграла: интеграл от суммы равен сумме интегралов, и постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, затем используя таблицу интегралов, получаем:

$$\int \left(\frac{3}{x} + 2 \sin x \right) dx = 3 \int \frac{1}{x} dx + 2 \int \sin x dx = 3 \ln|x| - 2 \cos x + C.$$

Пример 2 $\int \frac{x^4 - 5x^3 + 1}{x} dx = \int x^3 dx - 5 \int x^2 dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} - 5 \frac{x^3}{3} + \ln|x| + C$

Метод подстановки (метод замены переменной)

Пример 3

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^3}{(x+1)^3} dx, \text{ положим } x+1=t, \text{ тогда } x=t-1, x^2 = \\ & (t-1)^2, (x+1)^3 = t^3, \\ & \int \frac{x^3}{(x+1)^3} dx \Big|_{x^2=(t-1)^2, (x+1)^3=t^3} = \int \frac{(t-1)^2}{t^3} dt = \\ & \int \frac{t^2 - 2t + 1}{t^3} dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \ln t - 2t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + C = \\ & \ln t - 2t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + C = \ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + C \end{aligned}$$

Пример 4

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C\end{aligned}$$

Пример 5

$$\int \frac{7dx}{\sqrt{3-5x^2}} = \frac{7}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{5}{3}x^2}} = \frac{7}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}x + C$$

Интегрирование по частям

Пример 6

$$\begin{aligned}\int (x+1)e^{2x} dx &= \left| \begin{array}{l} P(x) = x+1, \quad u = x+1, \quad du = dx \\ dv = e^{2x} dx, \quad v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right| = \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \\ \frac{1}{2} \int e^{2x} dx &= \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}e^{2x} + C = \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}(x+1)e^{2x} + C\end{aligned}$$

3. Оценка выполненных заданий

4. Подведение итогов

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Раздел 3. Математический анализ

Практическая работа №12

Решение прикладных задач с использованием интегрального исчисления

Цель работы: научиться вычислять площади фигур и объемы тел, используя определенные интегралы

Выполнив работу, Вы будете уметь:

2. находить интеграл
3. вычислять в простейших случаях площади и объемы с использованием определенного интеграла.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, справочные материалы, конспекты лекций.

Задание:

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

a) $y = -x^2 + 4, y = 0$

b) $y = x^2, y = x^3$

c) $y = e^x, y = e^{-x}, y = 4$

1. 2. Вычислить объем тела

$y = x^2, y = 1$, вокруг оси OY

Порядок выполнения работы:

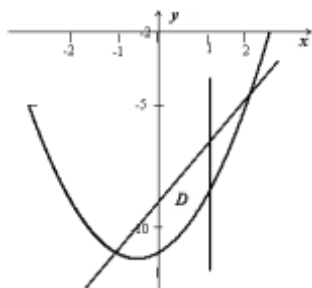
2. построить графики функций
3. найти область, ограниченную этими графиками
4. составит определенный интеграл, для нахождения площади найденной области

Ход работы:

5. Пример1: Найти площадь области **D**, ограниченной кривыми $y = x^2 + x + 11, y = 2x - 9$, при условии,
6. $x \leq 1$

$$D: \begin{cases} y = x^2 + x - 11, \\ y = 2x - 9, \\ x \leq 1. \end{cases}$$

При решении таких задач следует обязательно изобразить исследуемый геометрический объект. Для определения нижнего предела интегрирования надо найти точку пересечения кривых; уравнение $x^2 + x + 11 = 2x - 9$ имеет два корня: $x = -1$ и $x = 2$. Подходящий корень - $x = -1$. Область ограничена сверху параболой, снизу - прямой, справа - прямой $x = 1$, крайняя левая точка - $x = -1$ (рис. 14), поэтому



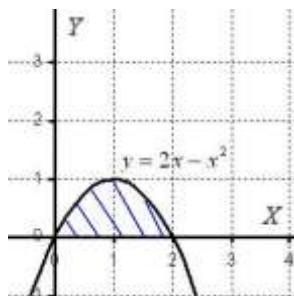
$$S(D) = \int_{-1}^1 [(2x - 9) - (x^2 + x - 11)] dx = \int_{-1}^1 (2 - x^2 + x) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^1 = \left(2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) - \left(-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{10}{3}$$

Если область имеет более сложную структуру, её следует разбить на простые части.

Пример 2

Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$ вокруг оси OX .

Решение: Как и в задаче на нахождение площади, **решение начинается с чертежа плоской фигуры**. То есть, на плоскости XOY необходимо построить фигуру (рис.15), ограниченную линиями $y = 2x - x^2$



Искомая плоская фигура заштрихована синим цветом, именно она и вращается вокруг оси OX . В результате вращения получается такая немного яйцевидная летающая тарелка, которая симметрична относительно оси OX .

Объем тела вращения можно вычислить по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Вычислим объем тела вращения, используя данную формулу:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \\ &= \pi \cdot \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \pi \cdot \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - 0 \right) = \frac{16\pi}{15} \\ V &= \frac{16\pi}{15} \text{ ед}^3 \approx 3,35 \text{ ед}^3. \end{aligned}$$

Ответ:

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Раздел 3. Математический анализ

Практическая работа №13

Решение дифференциальных уравнений первого порядка

Цель работы: Научиться решать дифференциальные уравнения I порядка с разделяющимися переменными. Научиться находить общие и частные решения.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- разделять переменные для решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными;
- находить общее решение дифференциального уравнения;
- выделять из общего решения частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (решать задачу Коши).

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Найти общее решение дифференциального уравнения

а)
$$\frac{dy}{\sqrt{x}} = \frac{3dx}{\sqrt{y}}$$

б)
$$(y - 1)^2 dx + (1 - x^3) dy = 0$$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $dy = (3x^2 - 2x)dx$, если $y=4$ при $x=$

Порядок выполнения работы:

- 1) Привести данное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными, т. е. произвести разделение переменных, для этого:
 - а) Производные функции заменить её дифференциалами;

- б) Сгруппировать члены с одинаковыми дифференциалами и записать их в разных частях равенства, вынеся дифференциалы за скобки;
 в) Поделить или умножить обе части равенства на такие выражения, чтобы все функции стояли при „своих” дифференциалах, т. е. привести к виду: $\varphi(y)dy = \varphi(x)dx$
- 2) Проинтегрировать обе части равенства и найти общее решение.
- 3) Для выделения частного решения из общего задается точка $(x_0; y_0)$, через которую должна проходить интегральная кривая. Находим значение постоянной C , а затем C подставляем в общее решение и записываем частное решение.

Ход работы:

- 1) Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(6x dx + 3xy^2 dx) - (6y dy + 2x^2 y dy) = 0$$

Сгруппируем члены с dx и dy

$$3x(2 + y^2)dx - 2y(3 + x^2)dy = 0$$

-Разделим переменные

$$\frac{3x dx}{3 + x^2} = \frac{2y dy}{2 + y^2}$$

-Интегрируем

$$3 \int \frac{x dx}{3 + x^2} = 2 \int \frac{y dy}{2 + y^2}$$

-Решаем по отдельности каждый интеграл методом подстановки

$$\frac{3}{2} \ln(3 + x^2) = \ln(2 + y^2) + \ln c$$

$$\ln(3 + x^2)^{\frac{3}{2}} = \ln(2 + y^2) \cdot c$$

-Потенцируем это уравнение

$$\sqrt{(3 + x^2)^3} = (2 + y^2) \cdot c$$

-Записываем общее решение:

$$\frac{(3 + x^2)\sqrt{3 + x^2}}{2 + y^2} = c$$

- 2) Найти частные решение дифференциальных уравнений

$$2(y - 3)dx - dy = 0 \text{ при } x=0, y=4$$

-Разделим переменные

$$dy = 2(y - 3)dx$$

$$\frac{dy}{y-3} = 2dx$$

-Проинтегрируем обе части уравнения

$$\int \frac{dy}{y-3} = \int 2dx$$

$$\ln(y-3) = 2x + \ln c$$

-По определению логарифма $2x = \ln e^{2x}$

$$\ln(y-3) = \ln(e^{2x} \cdot c)$$

-Запишем общее решение

$$y = e^{2x} \cdot c + 3$$

-Подставим в это уравнение начальные условия $x=0$, $y=4$

$$4 = e^0 \cdot c + 3 \Rightarrow c=1$$

-Запишем частное решение

$$y = e^{2x} + 3$$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Раздел 3. Математический анализ

Практическая работа №14

Решение дифференциальных уравнений второго порядка

Цель работы: Научиться решать дифференциальные уравнения II порядка и линейные однородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка;
- находить общее и частное решение простейших дифференциальных уравнений второго порядка;
- находить общее и частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, таблицы, справочники, учебники, конспекты лекций.

Задание:

1. Решить дифференциальные уравнения II порядка:

a) $\frac{d^2 y}{dx^2} = 5$

b) $y' = x, A(1; 0); B(1; 1)$

2. Найти частное решение однородного дифференциального уравнения II порядка.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} - 3y = 0 \text{ при } x = 0; y = 0; \frac{dy}{dx} = 0$$

Порядок выполнения работы:

- 1) Дифференциальные уравнения II порядка решаются двукратным интегрированием, путём введения новой переменной $p = \frac{dy}{dx}$

Приводим к уравнению с разделяющимися переменными и решаем относительно p .

Подставляем p и решаем уравнение разделением переменных относительно y .

Если даны начальные условия, то подставляем в общее решение, составляем систему линейных уравнений и решаем относительно C_1 и C_2 .

Подставляя C_1 и C_2 в общее решение, находим частные решения.

- 2) Однородное дифференциальное уравнение II порядка.

Путем замены $y = e^{kx}$

$$y' = k e^{kx}$$

$$y'' = k^2 e^{kx}$$

Составляем характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$ из которого находим k_1 и k_2 .

Общее решение при $D > 0$ будет:

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$$

При $D = 0$ будет: $y = e^{kx} (c_1 + c_2 x)$

При $D < 0$ будет: $y = e^{ax} (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$

При заданных начальных условиях составляем систему линейных уравнений и решаем её относительно C_1 и C_2 .

Ход работы:

- I. Решить дифференциальное уравнение порядка

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 1 - 2x$$

-Заменим $p = \frac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}; \frac{dp}{dx} = 1 - 2x$$

-Разделим переменные

$$dp = (1 - 2x) dx$$

-Проинтегрируем

$$\int dp = \int (1 - 2x) dx$$

$$p = x - x^2 + c_1$$

-Заменим p на $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = x - x^2 + c_1$$

-Разделим переменные

$$dy = (x - x^2 + c_1) dx$$

-Проинтегрируем и получим общее решение

$$\int dy = \int (x - x^2 + c_1) dx$$

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2$$

- II. Решить однородное дифференциальное уравнение II порядка

a) $y'' - 5y' + 6 = 0$

-Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 5k + 6 = 0, \text{ решаем квадратное уравнение, получим}$$

$$k_1 = 2, k_2 = 3$$

-Общее решение будет:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

b) $y'' + 4y' + 4y = 0$

-Составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 4k + 4 = 0, \quad (k + 2)^2 = 0 \quad k = -2$$

-Запишем общее решение для $D=0$

$$y = e^{-2x} (c_1 + c_2 x)$$

c) $y'' - 6y' + 13y = 0$

-Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 6k + 12 = 0; \quad D = 36 - 4 \cdot 13 = -16 \quad D < 0 \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{16i^2}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2ia = 3; \quad b = 2$$

-Запишем общее решение

$$y = e^{3x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочёта.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Раздел 4. Основы дискретной математики

Практическая работа №15

Решение комбинаторных задач

Цель работы: Осмыслить основные понятия комбинаторики, научиться отличать одну выборку от другой, применять формулы для их нахождения.

Выполнив работу, Вы будете:
уметь:

- Находить отличия одной выборки от другой;
- Применять формулы для подсчёта выборок без повторений.

Материальное обеспечение:

Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. В соревнованиях участвует 10 человек, трое из них займут 1-е, 2-е и 3-е место. Сколько существует различных вариантов?
2. Из группы, в которой учится 12 человек, необходимо выбрать 3 человека в совет колледжа. Сколько существует различных способов такого выбора.
3. На книжной полке выставлены 8 книг различных авторов. Сколько способов имеется для расстановки этих книг в разном порядке?

Краткие теоретические сведения:

В основе решения задач на комбинаторику лежат два правила:

1.Правило сложения. Если некоторый элемент A можно выбрать m способами, а другой элемент B — n способами, исключаящими друг друга, то выбор какого-нибудь одного из этих элементов (либо A , либо B) можно осуществить $m + n$ способами.

2.Правило умножения. Если некоторый элемент A можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора элемент B можно выбрать n способами, то выбор пары элементов (A, B) в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Перестановки.

Перестановками из n — элементов называются такие соединения из n — элементов, которые отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Обозначение: $P_n = n !$

Размещения.

Размещениями из n — элементов называются такие соединения, каждое из которых содержит m элементов, выбранных из числа данных n — элементов, отличающихся либо составом, либо порядком их расположения, либо и тем, и другим.

Обозначение $A_n^m = \frac{n!}{(n - m)!}$

Замечание. Рассмотренные ранее перестановки — частный случай размещений из n — элементов по n — элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$$

Сочетания.

Сочетаниями из n -элементов называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Обозначение: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Порядок выполнения работы:

1. Определите вид выборки без повторения.
2. Выберите соответствующую формулу для вычисления возможных комбинаций.
3. Произведите вычисления, используя понятие факториала.

Ход работы:

1. Кодовый замок открывается последовательным набором четырёх разных цифр. Требуется определить число возможных кодов, которые можно подобрать для этого замка.

Решение.

1. Возможных цифр всего десять (1,2,3,4,5,6,7,8,9,0). Каждая набранная комбинация кода отличается от другой комбинации хотя бы одной цифрой (1,4,5,7 ≠ 2,4,5,7), либо порядком набора одинаковых цифр (1,4,5,7 ≠ 4,5,7,1), поэтому для подсчёта числа возможных комбинаций кодов используем формулу числа размещений.

2. Формула размещений имеет вид: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$. В нашем случае

$$n = 4, m = 10.$$

$$3. \text{ Производим расчёт: } A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

2. Сколько существует способов выбора трёх человек из десяти?
- Решение.

1. В данном случае при выборе для нас важен только состав по три человека, порядок выбора роли не играет, поэтому в отличие от первого примера число способов подсчитаем по формуле сочетаний.

2. Формула сочетаний имеет вид: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. В нашем

случае $n=10, m=3$.

$$3. \text{ Производим расчёт: } C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = 120.$$

3. Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,9 (цифры не повторяются)?

Решение.

1. По условию дано множество из четырёх элементов, которые требуется расположить в определённом порядке. Значит, требуется найти количество перестановок их четырёх элементов.

2. Формула перестановок из n элементов имеет вид: $P_n = n!$ В нашем случае $n = 4$.

3. Произведём расчёт: $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Форма представления результата: выполненное задание.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочёта.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Раздел 5. Основы теории вероятностей и математической статистики **Практическая работа №16**

Нахождение вероятностных и статистических характеристик, их геометрическое изображение на примере раскладки междуэтажных плит

Цель работы: Научиться выполнять сложение и умножение вероятностей и решать задачи на совместные действия.

Выполнив работу, Вы будете:

уметь:

- решать задачи на сложение вероятностей несовместных событий;
- решать задачи на умножение вероятностей независимых событий;
- пользоваться при решении задач формулой полной вероятности.

Материальное обеспечение: Индивидуальные задания, конспекты лекций.

Задание:

1. В урне 40 шариков: 15 голубых, 3 зелёных и 20 белых. Какова вероятность того, что из урны будет извлечён цветной шарик?
2. Симметрическая монета подбрасывается три раза. Какова вероятность того, что цифра выпадет ровно два раза?
3. Найти вероятность совместного появления цифры при одном подбрасывании двух монет.

Краткие теоретические сведения:**Теорема сложения вероятностей п несовместных событий**

Вероятность суммы п несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ равно сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, образующих полную группу событий, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий

Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ независимы, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий: $P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$.

Порядок выполнения работы:

1. Внимательно прочитать условие задачи.
2. Определить, о каких событиях идёт речь в задаче.
3. Если события несовместные, то применяется теорема сложения, если события независимы, то применяется теорема умножения вероятностей.

Ход работы:

1. Подбрасывается игральный кубик. Чему равна вероятность того, что выпадет чётное число очков?

Решение:

Введём обозначения: событие A - выпало чётное число очков; событие B_k - выпало k очков ($k=1, 2, 3, 4, 5, 6$). Событие A означает, что наступило хотя бы одно из событий: B_2, B_4, B_6 , т.е. $A = B_2 + B_4 + B_6$. Поскольку события B_2, B_4, B_6 несовместны, то можно воспользоваться формулой: $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$, где $n=3$. Учитывая, что $P(B_k) = 1/6$ ($k=1, 2, 3, 4, 5, 6$), получаем: $P(A) = P(B_2) + P(B_4) + P(B_6) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$.

2. Найти вероятность совместного появления цифры при одном подбрасывании двух монет.

Решение:

Вероятность появления цифры первой монеты (событие A_1):

$P(A_1)=1/2$; вероятность появления цифры второй монеты (событие A_2): $P(A_2)=1/2$.

События A и B независимы, поэтому искомую вероятность найдём по формуле $P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$, где $n=2$.

$P(A_1, A_2) = P(A_1)P(A_2) = 1/2 * 1/2 = 1/4$.

3. Два стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятность попадания в цель первого стрелка равна 0,7, второго – 0,8. Найти вероятность того, что в мишень попадет только один стрелок.

Решение. Так как оба стрелка стреляют одновременно и независимо друг от друга, то, используя противоположные события «попадание – промах» и правило умножения вероятностей, получим следующие варианты событий:

- попадают оба стрелка:

$$P_1 \cdot P_2 = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56;$$

- попадает первый стрелок и не попадает второй:

$$P_1 \cdot \bar{P}_2 = 0,7 \cdot 0,2 = 0,14;$$

- попадает второй и промах у первого:

$$\bar{P}_1 \cdot P_2 = 0,3 \cdot 0,8 = 0,24;$$

- промах обоих стрелков:

$$\bar{P}_1 \cdot \bar{P}_2 = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06.$$

Эти события образуют полную группу, так как

$$0,56 + 0,14 + 0,24 + 0,06 = 1.$$

Решением задачи по правилу сложения будет:

$$P_1 \cdot \bar{P}_2 + \bar{P}_1 \cdot P_2 = 0,14 + 0,24 = 0,38.$$

Форма представления результата: выполненная работа.

Критерии оценки:

Оценка "отлично" ставится, если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполнены все записи и вычисления.

Оценка "хорошо" ставится, если выполнены требования к оценке "отлично", но допущены 2-3 недочета.

Оценка "удовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью, но объём выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка "неудовлетворительно" ставится, если работа выполнена не полностью или объём выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.