МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

УТВЕРЖДАЮ
Директор ИЭиАС
__________ В.Р. Храмшин

03.02.2026 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Направление подготовки (специальность)
09.03.01 Информатика и вычислительная техника

Направленность (профиль/специализация) программы
Программное обеспечение средств вычислительной техники и автоматизированных систем

Уровень высшего образования - бакалавриат

Форма обучения
очная

Институт/ факультет	Институт энергетики и автоматизированных систем
Кафедра	Вычислительной техники и программирования
Курс	1
Семестр	1

Магнитогорск
2026 год

Рабочая программа составлена на основе ФГОС ВО - бакалавриат по направлению подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника (приказ Минобрнауки России от 19.09.2017 г. № 929)

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры Вычислительной техники и программирования
29.01.2026, протокол № 7

Зав. кафедрой ______________ О.С. Логунова

Рабочая программа одобрена методической комиссией ИЭиАС
03.02.2026 г. протокол № 5

Председатель ______________ В.Р. Храмшин

Рабочая программа составлена:
ст. преподаватель кафедры ВТиП ______________ Н.А.Квасова

Рецензент:
директор НИИ «Промбезопасность», д-р техн. наук ______________ М.Ю. Наркевич

Лист актуализации рабочей программы

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2027 - 2028 учебном году на заседании кафедры Вычислительной техники и программирования

Протокол от __ __________ 20__ г. № __
Зав. кафедрой _________________ О.С. Логунова

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2028 - 2029 учебном году на заседании кафедры Вычислительной техники и программирования

Протокол от __ __________ 20__ г. № __
Зав. кафедрой _________________ О.С. Логунова

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2029 - 2030 учебном году на заседании кафедры Вычислительной техники и программирования

Протокол от __ __________ 20__ г. № __
Зав. кафедрой _________________ О.С. Логунова

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2030 - 2031 учебном году на заседании кафедры Вычислительной техники и программирования

Протокол от __ __________ 20__ г. № __
Зав. кафедрой _________________ О.С. Логунова

1 Цели освоения дисциплины (модуля)

Целями освоения дисциплины «Элементы линейной алгебры» являются:

ознакомление студентов с базовыми понятиями и результатами линейной алгебры,

ознакомление студентов с применением линейной алгебры в квантовой механике,

формирование компетенций, направленных на использование линейно-алгебраических методов при решении научных и прикладных задач.

2 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина Элементы линейной алгебры входит в обязательную часть учебного плана образовательной программы.

Для изучения дисциплины необходимы знания (умения, владения), сформированные в результате изучения дисциплин/ практик:

Дисциплина Линейная алгебра входит в вариативную (по выбору студента) часть учебного плана образовательной программы.

Для изучения дисциплины необходимы знания (умения, владения), сформированные в результате изучения школьного курса математики.

Знания (умения, владения), полученные при изучении данной дисциплины будут необходимы для изучения дисциплин/практик:

Прикладная математика

Основы квантовой информатики

Моделирование

Физические основы механики и оптики

Численные методы

Физика с элементами квантовой механики

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) и планируемые результаты обучения

В результате освоения дисциплины (модуля) «Элементы линейной алгебры» обучающийся должен обладать следующими компетенциями:

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности;	
ОПК-1.1	Решает стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования
ОПК-1.2	Решает профессиональные задачи с применением методов теоретического и экспериментального исследования

4. Структура, объём и содержание дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единиц 108 акад. часов, в том числе:

– контактная работа – 55 акад. часов:

– аудиторная – 54 акад. часов;

– внеаудиторная – 1 акад. часов;

– самостоятельная работа – 53 акад. часов;

– в форме практической подготовки – 0 акад. час;

Форма аттестации - зачет

Раздел/ тема дисциплины	Семестр	Аудиторная контактная работа (в акад. часах)			Самостоятельная работа студента	Вид самостоятельной работы	Форма текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации	Код компетенции
		Лек.	лаб. зан.	практ. зан.				
1. Раздел 1. Комплексные числа								
1.1 Комплексные числа и действия с ними. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Показательная и тригонометрическая формы комплексного числа.	1	1	3		2	Решение задач на действия с комплексными числами подготовка к устному опросу и АКР.	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Аудиторная контрольная работа	ОПК-1.1, ОПК-1.2
1.2 Основная теорема алгебры. Алгоритм деления многочленов. Разложение многочленов на множители.		1	2		1	Решение задач на разложение многочленов, подготовка к устному опросу и АКР	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Аудиторная контрольная работа	ОПК-1.1, ОПК-1.2
1.3 Функции комплексного переменного. Элементы комплексного анализа.		1	3		1	Решение задач на функции комплексного переменного, подготовка к устному опросу и АКР.	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Аудиторная конирольная работа	ОПК-1.1, ОПК-1.2
Итого по разделу		3	8		4			
2. Раздел 2. Матрицы и системы линейных уравнений								
2.1 Матрицы, действия с матрицами. Определители. Обратная матрица. Ранг матрицы.	1	1	3		4	Решение задач на, матрицы и определители и системы,	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных	ОПК-1.1, ОПК-1.2

Решение систем методами матричного исчисления, Крамера, Гаусса. Метод Гаусса в общем случае. Теорема Кронеккера-Капелли. Однородные системы. Фундаментальная система решений.						подготовка к устному опросу и АКР.	заданий 3. Устный опрос. 4. Аудиторная контрольная работа	
2.2 Решение систем методами матричного исчисления, Крамера, Гаусса. Метод Гаусса в общем случае. Теорема Кронеккера-Капелли. Однородные системы. Фундаментальная система решений.	1	2	4		2	Решение задач на системы уравнений, подготовка к устному опросу и защите ТР.	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Защита типового расчёта	ОПК-1.1, ОПК-1.2
Итого по разделу		3	7		6			
3. Раздел 3. Линейные пространства и операторы								
3.1 Линейные пространства. Базис, размерность, подпространства, преобразования координат. Изоморфизм.	1	1	2		8	Решение задач, подготовка к устному опросу и защите ТР.	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Защита типового расчёта	ОПК-1.1, ОПК-1.2
3.2 Линейные операторы. Матричное представление операторов. Инвариантные подпространства. Собственные значения и векторы. Спектр. Характеристический многочлен. Подобие операторов. Понятие о присоединённых екторах и жордановой форме оператора.		1	4		6	Решение задач на матричное представление операторов, нахождение собственных значений и векторов., подготовка к устному опросу и защите ТР.	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Защита типового расчё-та	ОПК-1.1, ОПК-1.2
3.3 Комплексное евклидово пространство. Скалярное произведение, неравенства Коши-Буняковского и Минковского. Норма. Ортонормированный базис. Ортогонализация Грама-Шмидта. Ортогональное дополнение и разложение в прямую сумму.		2	4		6	Решение задач на евклидово пространство и ортогонализаци ю, подготовка к устному опросу и защите ТР.	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Защита типового расчёта	ОПК-1.1, ОПК-1.2
3.4 Самосопряжённые операторы, квадратичные формы, спектр, экстремальные свойства собственных значений. Проекторы. Спектральная теорема. Нормальные и унитарные операторы.		4	2		4	Решение задач на самосопряжённы е, унитарные и нормальные операторы, подготовка к устному опросу	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Защита типового расчёта	ОПК-1.1, ОПК-1.2

Коммутаторы. Разложение оператора в произведение унитарного и положительного.						и защите ТР.		
3.5 Приложение линейных операторов к оценке погрешности решений систем линейных уравнений. Число обусловленности линейного оператора. Итерационный метод вычисления границ спектра.	1	2	4		6	Решение задач на вычисление числа обусловленности и итерационный метод, подготовка к устному опросу и защите ТР.	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Защита типового расчёта	ОПК-1.1, ОПК-1.2
3.6 Квантовомеханическая терминология: бра- и кет-векторы. Среднее значение, отклонение и среднее квадратичное отклонение физических величин. Принцип неопределённости Гейзенберга.		2	5		13	Решение задач на вычисление средних значений и отклонений физических величин, подготовка к устному опросу и защите ТР.	. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Защита типового расчёта	ОПК-1.1, ОПК-1.2
Итого по разделу		12	21		43			
Итого за семестр		18	36		53		зачёт	
Итого по дисциплине		18	36		53		зачет	

5 Образовательные технологии

1. Традиционные образовательные технологии, ориентированные на организацию образовательного процесса и предполагающую прямую трансляцию знаний от преподавателя к аспиранту.

Формы учебных занятий с использованием традиционных технологий:

Информационная лекция – последовательное изложение материала в дисциплинарной логике, осуществляемое преимущественно вербальными средствами (монолог преподавателя).

Лабораторная работа – организация учебной работы с реальными материальными и информационными объектами, экспериментальная работа с аналоговыми моделями реальных объектов.

2. Технологии проблемного обучения – организация образовательного процесса, которая предполагает постановку проблемных вопросов, создание учебных проблемных ситуаций для стимулирования активной познавательной деятельности аспирантов.

3. Интерактивные технологии – организация образовательного процесса, которая предполагает активное и нелинейное взаимодействие всех участников, достижение на этой основе личностно значимого для них образовательного результата.

Формы учебных занятий с использованием специализированных интерактивных технологий:

Лекция «обратной связи» – лекция–провокация (изложение материала с заранее запланированными ошибками), лекция-беседа, лекция-дискуссия, лекция-конференция.

4. Информационно-коммуникационные образовательные технологии – организация образовательного процесса, основанная на применении программных сред и технических средств работы со знаниями в различных предметных областях.

6 Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Представлено в приложении 1.

7 Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации

Представлены в приложении 2.

8 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) Основная литература:

1. Ильин, В. А. Линейная алгебра. Учебник для вузов [Текст]. / — В.А. Ильин, Э.Г. Позняк – М.: Физматлит, 2014. - 280 с.

2. Гельфанд, И.М. Лекции по линейной алгебре [Текст]. / И.М. Гельфанд – М. : Добрсовет, 2009. 296 с.

б) Дополнительная литература:

1. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц: [Тескт]. / Ф.Р. Гантмахер – М.: Физматлит, 2010. - 560 с.

2. Нильсен, М. Квантовые вычисления и квантовая информация. Пер. с англ. [Текст]. / М. Нильсен, И. Чанг. – М. : «Мир», 2006. – 824 с.

в) Методические указания:

1. Смушкевич Л.Е., Лекции по основам квантовых вычислений. Часть 1. Физико -математический терминимум. Выпуск 1. Комплексные числа. [Текст]. / Л.Е.

Смушкевич. – Магнитогорск : ЧОУ ИТФИ, 2018. – 77 с.

2. Смушкевич Л.Е., Лекции по основам квантовых вычислений. Часть 1. Математический аппарат квантовой механики. Выпуск 2. Алгебра матриц. Системы линейных уравнений. Линейные операторы в конечномерных комплексных евклидовых пространствах [Текст]. / Л.Е. Смушкевич. – Магнитогорск : ЧОУ ИТФИ, 2017. – 134 с.

г) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

Программное обеспечение

Наименование ПО	№ договора	Срок действия лицензии
MS Office 2007 Professional	№ 135 от 17.09.2007	бессрочно
MathCAD v.15 Education University Edition	Д-1662-13 от 22.11.2013	бессрочно

Профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Название курса	Ссылка

9 Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Материально-техническое обеспечение дисциплины включает:

Лекционная аудитория - Мультимедийные средства хранения, передачи и представления информации.

Компьютерный класс - Персональные компьютеры с пакетом Office, выходом в Интернет и с доступом в электронную информационно-образовательную среду университета.

Аудитории для самостоятельной работы: компьютерные классы; читальные залы библиотеки - Все классы УИТ и АСУ с персональными компьютерами, выходом в Интернет и с доступом в электронную информационно-образовательную среду университета.

Аудиторий для групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации - Ауд. 282 и классы УИТ и АСУ.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, оснащенных компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и наличием до-ступа в электронную информационно-образовательную среду организации - Классы УИТ и АСУ.

Помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования -Центр информационных технологий – ауд. 379

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Примерные задачи для усвоения текущего материала и подготовки к аудиторной контрольной работе по разделу 1 «Комплексные числа»

1. Вычислить:

а) $(\overline{2-i})(3+7i)-\dfrac{5-2i}{4+3i}$,

б) $(2+3i)^2+(1-4i)^3$,

в) $|4-3i|+(1+2i)^{-2}$.

2. Решить уравнения:

а) $(2-i)z+5-3i=0$,

б) $z^2-4z+5=0$,

в) $z^2=5+12i$,

г) $z^2+\sqrt{5}z+3i=0$.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}(2+3i)z_1+5z_2=1-i\\ 2z_1+(5-i)z_2=2+i\end{cases}$$

4. Найти модули и аргументы следующих комплексных чисел: а) 6; б) -7; в) $3i$; г) $-4i$; д) $2+2i$; е) $3-3i$; ж) $-2\sqrt{3}+2i$; з) $3+4i$; е) $-12-5i$.

5. Записать комплексные числа в тригонометрической и показательной формах: а) 4; б) $-7i$; в) $3+3i$; г) $4-4i$; д) $2+2\sqrt{3}i$; е) $3\sqrt{3}-3i$; ж) $-3+4i$; з) $-5-12i$.

6. Перевести числа $z_1=2+2\sqrt{3}i$ *и* $z_2=3\sqrt{3}+3i$ *в тригонометрическую и показательную формы, найти* z_1z_2 *и* $\dfrac{z_1}{z_2}$ *в тригонометрической и показательной формах и перевести в алгебраическую форму*.

7. Найти степени комплексных чисел, применяя формулу Муавра:

а) $(1+i)^7$, б) $(\sqrt{3}-i)^8$, в) $(2-2\sqrt{3}\,i)^{-5}$.

8. Найти корни из комплексных чисел: а) $\sqrt{3+3i}$, б) $\sqrt[3]{-125}$,

в) $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$.

9. Разложить многочлены на множители:

а) z^2-4z+5;

б) z^3+125;

в) $z^4+1-\sqrt{3}i$;

г) z^8-2z^4+1.

Примерные вопросы коллоквиума по разделу 1 «Комплексные числа»

1. Что такое алгебраическая форма комплексного числа и как комплексные числа изображаются на комплексной плоскости?

2. Что такое модуль, аргумет, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа?

3. Как происходит умножение, деление, переход к сопряжённому для комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах?

4. Как происходит возведение в степень и извлечение корня из комплексного числа?.

5. Что утверждает основная теорема алгебры и сколько корней может иметь многочлен n-ной степени?

6. Что такое кратность корня и как выглядит разложение многочлена на множители?.

Примерные задачи для усвоения текущего материала и выполнения типового расчёта №1 по разделу 2 «Матрицы и системы линейных уравнений»

1. Вычислить $AB-3C+2D^T$,

где $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \\ 4 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

2. Доказать, что $(A+B)^T=A^T+B^T; (A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$.

3. Вычислить разложением Лапласи приведением к треугольному видуопределители:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -5 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

4.Найти матрицу, обратную к $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$, *проверить равенство* $A^{-1}A = E$.

5. Решить матричное уравнение: $AXB = C$, *где*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

6.Решить методами обратной матрицы, Крамера и Гаусса следующую систему:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 6z = 5 \\ -x + 4y - 5z = 1 \\ 6x + y + 4z = -2 \end{cases}.$$

7. Привести к строго треугольному виду и найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 9 & 8 & 0 \\ 5 & 10 & 11 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 7 & 7 & -4 \end{pmatrix}$.

8. Найти общее решение системы: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 6 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 3 \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 + x_4 + 9x_5 = 9 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 7x_4 - 5x_5 = 3 \end{cases}$ *9.*

Примерные вопросы по защите типового расчёта №1 по разделу 2 «Матрицы и системы линейных уравнений»

1. Как определяются основные действия с матрицами: сложение, умножение, транспонирование и переносятся ли на них основные свойства алгебраических операций: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность?

2. Что такое определитель и каковы его основные свойства?

3. Что такое обратная матрица и как она вычисляется?.

4. Как решается система линейных алгебраических уравнений методами Крамера и с помощью обратной матрицы? Какие свойства системы обеспечивают применимость этих методов?

5. Что такое ранг матрицы и как он вычисляется?.

6. Как решается и исследуется система методом Гаусса, что утверждает теорема Кронеккера-Капелли?

7. Что такое фундаментальная система решений однородной системы линейных алгебраических уравнений?

Примерные задачи для усвоения текущего материала и выполнения типового расчёта №2 по разделу 3 «Линейные пространства и операторы»

Для изучения количественного признака X *из генеральной совокупности извлечена выборка* $x_1, \cdots, x_n$ *объемаn, имеющая данное статистическое распределение.*

1). Является ли линейно независимой и образует ли базис система векторов в $\mathbf{R}^4$*:*

а) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -14 \\ 3 \end{pmatrix}$*; б)* $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$*;*

в) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$*, если да, то разложить по этому базису вектор* $\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix}$.

2). Доказать, что следующие подмножества $\mathbf{R}^n$ *являются подпространствами:*

а) Множество столбцов в $\mathbf{R}^n$*, у которых первая координата равна 0.*

б) Множество верхнетреугольных матриц (нули ниже главной диагонали) в пространстве $\mathbf{M}_{n,n}$.

в) Множество многочленов $p(t) \in \mathbf{P}^n$*, таких, что*

в1) $p(0) = 0$*;*

в2) $p(1) = p(2) = 0$.

г) Для данной матрицы $A \in \mathbf{M}_{m,n}$ *множество векторов* $N = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax = 0\}$.

д) Для данной матрицы $A \in \mathbf{M}_{m,n}$ *множество векторов* $R = \{Ax \in \mathbf{R}^m : x \in \mathbf{R}^n\}$.

3). Найти в $\mathbf{R}^3$ *длины векторов* $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$*, расстояние между этими векторами, угол между ними.*

4). Показать, что ортонормированная система векторов (не обязательно образующая базис) линейно независима.

5). а) Проверить, что $C[a,b]$ *– пространство непрерывных функций на отрезке* $[a,b]$ *является евклидовым, если ввести в нём скалярное произведение следующим образом: для функций* $f(t)$ *и* $g(t)$ *положим* $(f,g)=\int\limits_a^b f(t)g(t)dt$.

б) Найти в $C[0,1]$ *длины векторов* $f(t)=t, g(t)=e^t$ *, расстояние между этимивекторами, угол между ними.*

6). Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^3$ *базис* $a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$*. Применив к нему процесс ортогонализации Шмидта, построить ортонормированный базис в* $\mathbf{R}^3$.

7). В пространстве $\mathbf{M}_{2,2}$ *матриц размерности* 2×2 *рассмотрим операторы левого и правого умножения на данную матрицу* $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$*:* $L_A X = AX$ *и* $R_A X = XA$*. Приняв за базис пространства* $\mathbf{M}_{2,2}$ *матрицы* $E_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, E_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$*, найти матрицы операторов* L_A *и* R_A.

8). Найти собственные значения и собственные векторы операторов, задаваемых следующими матрицами; определить размерность собственных подпространств; написать матрицы операторов в базисе из собственных векторов:

а) $\begin{pmatrix}5 & 2\\ -1 & 8\end{pmatrix}$,б) $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix}11 & -1 & -4\\ -1 & 11 & -4\\ -4 & -4 & 14\end{pmatrix}$.

9). Найти следы операторов из задачи 8).

10). Доказать тождество: $4\operatorname{Re}(Ax,y)=(A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y)$.

11) Показать, что $\|A_\alpha\|=\|P\|=\|S\|=1$,где A_α – оператор поворота в $\mathbf{R}^2$, P – оператор проецирования (какой-нибудь), S – оператор симметрии (какой-нибудь).

12). Найти норму диагонального оператора $D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ равна:

$\|D\| = \max\{|a_k| : k = 1, \dots, n\}$.

13). Найти норму оператора, представленного матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 5 \end{pmatrix}$.

Примерные вопросы по защите типового расчёта №2. по разделу 3 «Линейные пространства и операторы»

1. Что такое линейная независимость векторов и базис в $\mathbf{R}^n$ *?*

2. Что такое линейное пространство, привести примеры?

3. Что такое линейная независимость, базис, размерность, подпространство в произвольном линейном пространстве?

4. Каковы свойства скалярного произведения в вещественном и комплексномевклидовом пространстве?Чему равна норма вектора?

5. Написать неравенства Коши-Буняковского и Минковского.

6. Что такое ортонормированный базис, ортогонализация базиса, ортогональное дополнение?

7. Что такое линейный оператор? Как строится матрица оператора и как она преобразуется при переходе к новому базису?

8. Что такое собственные векторы и собственные значения оператора?

9. Что такое инвариант оператора и почему определитель, характеристический многочлен, след и спектр являются инвариантами?

10. Что такое норма оператора?
11. Что такое коммутатор двух операторов и каковы его свойства?
12. Что такое сопряжённый оператор и каковы свойства операции сопряжения?
13. Каковы экстремальные свойства собственных значений?
14. Что утверждает спектральная теорема для самосопряжённых операторов?
15. Что такое нормальный и унитарный операторы?
16. Как выглядит полярное разложение оператора?
17. Что такое среднее наблюдаемой величины в квантовой механике? Написать соотношение неопределённостей.

Задания для оценки сформированности компетенций

Проверяемая компетенция ОПК-1

Задания:

1. Какая пара векторов образует базис в пространстве $\boldsymbol{R}^2$?

а)$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$

б)$\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$

в)$\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\-10\end{pmatrix}$

г)$\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-9\\6\end{pmatrix}$

2. Какая размерность у пространства многочленов степени, не превосходящей 6?

а) 6

б) 5

в) 7

г) бесконечная

3. Чему равно скалярное произведение векторов $\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}$

а)9

б)-10

в)11

г)-12

4.Есть два оператора поворота в двумерном пространстве:на 3^{o} и 5^{o}. Их произведение тоже является оператором поворота – на сколько градусов?

а) 8^{o}

б) 15^{o}

в) 2^{o}

г) 4^{o}

5.Чему равна норма самосопряжённого оператора в двумерном евклидовом пространстве, который в ортонормированном базисе представляется матрицей $\begin{pmatrix}7 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}$?

а)5

б) 6

в)7

г)8

Ключ к заданию для оценки сформированности компетенций

Шифр компетенции	ОПК-1				
№ вопроса	1	2	3	4	5
Правильный вариант ответа	б	в	г	а	г

Критерии оценивания:

ОПК-1:

0-2 правильных ответа – «неудовлетворительно»,

3 правильных ответа – «удовлетворительно»,

4 правильных ответа – «хорошо»,

5 правильных ответов – «отлично».

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Оценочные средства
ОПК-1: Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональнойдеятельности
Теоретические вопросы: 1. Комплексные числа и действия с ними. 2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. 3. Возведение комплексного числа в степень и извлечение корня. 4. Основная теорема алгебры и разложение многочлена на множители. 5. Матрицы и действия с ними. 6. Определители и их свойства. 7. Обратная матрица. 8. Решение систем линейных алгебраических уравнений методами Крамера и обратной матрицы. 9. Исследование и решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. 10. Ранг матрицы. Теорема Кронеккера-Капелли. 11. Линейная зависимость и базис в $\mathbf{R}^n$. 12. Линейное пространство, подпространство, базис, размерность. 13. Евклидово пространство, скалярное произведение, норма вектора, неравенства Коши-Буняковского и Минковского. 14. Ортогонализация. 15. Линейный оператор, матрица оператора, преобразование матрицы при переходе к новому базису. 16. Собственные векторы и собственные значения оператора. Инварианты.След. Спектр. 17. Сопряжённый оператор. Самосопряжённые операторы. Экстремальные свойства спектра самосопряжённого оператора. 18. Спектральная теорема для самосопряжённого оператора. Функции от оператора. Квадратный корень. 19. Нормальные и унитарные операторы. спектральная теорема. Полярное разложение. 20. Квантовомеханические приложения. Соотношение неопределённостей.. *Практические задания:* 1. Вычислить: $(2+3i)^2+(1-4i)^3$. 2. Найти степени комплексных чисел, применяя формулу Муавра:а) $(1+i)^7$, б) $(\sqrt{3}-i)^8$. 3. Найти корень из комплексного числа: $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$ 4. Разложить многочлен на множители: z^8-2z^4+1 5. Вычислить $AB-3C+2D^T$,

Оценочные средства
где $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 5\\ 6 & 0 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & -3\\ 6 & 1 & 4 & 6\\ 4 & 5 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -4 & -2\\ 3 & 0 & 4 & 5\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -3\\ 4 & -5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.   6. Найти матрицу, обратную к, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & 4 & 3\\ 5 & 1 & 9\end{pmatrix}$,7.Решить методами обратной матрицы, Крамера и Гаусса следующую систему: $\begin{cases}3x+2y+6z=5\\ -x+4y-5z=1.\\ 6x+y+4z=-2\end{cases}$ 8. Найти общее решение системы: $\begin{cases}3x_1+2x_2-x_3+4x_4+2x_5=6\\ x_1+5x_2-2x_3-3x_4+7x_5=3\\ 4x_1+7x_2-3x_3+x_4+9x_5=9\\ 2x_1-3x_2+x_3+7x_4-5x_5=3\end{cases}$ 9. Является ли линейно независимой и образует ли базис система векторов в $\mathbf{R}^4$: $\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -3\\ -3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ -4\\ -2\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 5\\ 7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$ если да, то разложить по этому базису вектор $\begin{pmatrix}9\\ 7\\ -1\\ 17\end{pmatrix}$.   10. Найти в $\mathbf{R}^3$ длины векторов $x=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ -2\end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix}5\\ -3\\ 5\end{pmatrix}$, расстояние между этими векторами, угол между ними.   11. В пространстве $\mathbf{M}_{2,2}$ матриц размерности 2×2 рассмотрим операторы левого и правого умножения на данную матрицу $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$: $L_A X = AX$ и $R_A X = XA$

Оценочные средства
. Приняв за базис пространства $\mathbf{M}_{2,2}$ матрицы $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$ найти матрицы операторов L_A и R_A.   12. Найти собственные значения и собственные векторы операторов, задаваемых следующими матрицами; определить размерность собственных подпространств; написать матрицы операторов в базисе из собственных векторов: $\begin{pmatrix} 11 & -1 & -4 \\ -1 & 11 & -4 \\ -4 & -4 & 14 \end{pmatrix}$ 13. Найти норму оператора, представленного матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 5 \end{pmatrix}$.
14. Написать полярное разложение оператора, заданного в $\mathbf{R}^2$ матрицей: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$