



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И.  
Носова»



УТВЕРЖДАЮ  
Директор ИЕиС  
Ю.В. Сомова

02.02.2026 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

***ЭЛЕМЕНТЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ***

Направление подготовки (специальность)  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль/специализация) программы  
Большие и открытые данные

Уровень высшего образования - бакалавриат

Форма обучения  
очная

Институт/ факультет	Институт естествознания и стандартизации
Кафедра	Прикладной математики и информатики
Курс	4
Семестр	7

Магнитогорск  
2026 год


Рабочая программа составлена на основе ФГОС ВО - бакалавриат по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика (приказ Минобрнауки России от 10.01.2018 г. № 9)

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

13.01.2026, протокол № 5

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ Ю.А. Извеков

Рабочая программа одобрена методической комиссией ИЕиС  
02.02.2026 г. протокол № 4

Председатель  Ю.В. Сомова

Рабочая программа составлена:

доцент кафедры ПМИИ, канд. физ.-мат. наук  О.А. Торшина

Рецензент:

зав. кафедрой Физики, канд. физ.-мат. наук  Д.М. Долгушин

## Лист актуализации рабочей программы

---

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2027 - 2028 учебном году на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

Протокол от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ Ю.А. Извеков

---

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2028 - 2029 учебном году на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

Протокол от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ Ю.А. Извеков

---

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2029 - 2030 учебном году на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

Протокол от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ Ю.А. Извеков

---

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2030 - 2031 учебном году на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

Протокол от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ Ю.А. Извеков

### **1 Цели освоения дисциплины (модуля)**

Целями освоения дисциплины «Элементы вариационного исчисления» являются: усвоение студентами основ вариационного исчисления, овладение основными методами решения вариационных задач механики и физики и использование их при решении конкретных задач; способностью понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат; формирование базовых профессиональных компетенций в области использования методов прикладной математики для решения задач в избранной сфере деятельности с учетом основных требований информационной безопасности.

### **2 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы**

Дисциплина Элементы вариационного исчисления входит в обязательную часть учебного плана образовательной программы.

Для изучения дисциплины необходимы знания (умения, владения), сформированные в результате изучения дисциплин/ практик:

Физика

Математический анализ

Уравнение математической физики

Знания (умения, владения), полученные при изучении данной дисциплины будут необходимы для изучения дисциплин/практик:

Численные методы решения нелинейных алгебраических уравнений

Подготовка к сдаче и сдача государственного экзамена

Выполнение и защита выпускной квалификационной работы

### **3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) и планируемые результаты обучения**

В результате освоения дисциплины (модуля) «Элементы вариационного исчисления» обучающийся должен обладать следующими компетенциями:

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности
ОПК-1.1	Решает профессиональные задачи с области фундаментальной и прикладной математики
ОПК-1.2	Владеет способами и приемами решения исследовательских задач в области фундаментальной и прикладной математики
ОПК-1.3	Применяет фундаментальные междисциплинарные знания для решения задач в профессиональной деятельности

#### 4. Структура, объём и содержание дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных единиц 180 акад. часов, в том числе:

- контактная работа – 112,1 акад. часов;
- аудиторная – 108 акад. часов;
- внеаудиторная – 4,1 акад. часов;
- самостоятельная работа – 32,2 акад. часов;
- в форме практической подготовки – 0 акад. час;
- подготовка к экзамену – 35,7 акад. час

Форма аттестации - экзамен

Раздел/ тема дисциплины	Семестр	Аудиторная контактная работа (в акад. часах)			Самостоятельная работа студента	Вид самостоятельной работы	Форма текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации	Код компетенции
		Лек.	лаб. зан.	практ. зан.				
1. Вариационные задачи								
1.1 Метод вариаций в задачах с неподвижными концами	7	2	2		2	Подготовка к лабораторному занятию	Проверка конспектов. Опрос, обсуждение	
1.2 Вариационные задачи с подвижными границами		4	2		2	Решение задач	Устный опрос	
1.3 Вариационные задачи на условный экстремум		2	2		6	Изучение учебной и научной литературы	АКР Проверка конспектов.	
Итого по разделу		8	6		10			
2. Прямые методы в вариационных задачах								
2.1 Метод минимизирующих последовательностей	7	2	2		10	Изучение учебной и научной литературы	Устный опрос	
2.2 Метод приближенного решения		4	10		4	Подготовка к лабораторному занятию	Проверка конспектов	
2.3 Приближенное решение задач на собственные значения		4	8		1	Подготовка к лабораторному занятию	Проверка конспектов. Опрос, обсуждение	
2.4 Двойственные вариационные задачи		4	10		1	Решение задач	ИДЗ Проверка конспектов. Опрос, обсуждение	
Итого по разделу		14	30		16			
3. Приложения вариационных методов								
3.1 Принцип Гамильтона	7	4	10		2	Изучение учебной и научной литературы	Проверка конспектов	

3.2 Колебания мембраны		4	10		1	Подготовка к лабораторному занятию	Проверка конспектов. Опрос, обсуждение	
3.3 Уравнения движения идеальной жидкости		6	16		3,2	Изучение учебной и научной литературы	ИДЗ Проверка конспектов. Опрос, обсуждение	
Итого по разделу		14	36		6,2			
Итого за семестр		36	72		32,2		экзамен	
Итого по дисциплине		36	72		32,2		экзамен	

## 5 Образовательные технологии

1. Традиционные технологии обучения, предполагающие передачу информации в готовом виде, формирование учебных умений по образцу: лекция-изложение, лекция-объяснение, практические (семинарские) занятия.

Использование традиционных технологий обеспечивает ориентирование студента в потоке информации, связанной с различными подходами к определению сущности, содержания, методов, форм развития и саморазвития личности; самоопределение в выборе оптимального пути и способов личностно-профессионального развития; систематизацию знаний, полученных студентами в процессе аудиторной и самостоятельной работы. Лекционные занятия проводятся с использованием мультимедийных средств. Лабораторные занятия обеспечивают развитие и закрепление умений и навыков определения целей и задач саморазвития, а также принятия наиболее эффективных решений по их реализации. Практические занятия проводятся в компьютерных классах вычислительного центра ФГБОУ ВО «МГТУ».

В ходе проведения лекционных занятий предусматривается: использование электронного демонстрационного материала по темам, требующим иллюстрации работы программных продуктов: MS Word, MS Excel.

В ходе проведения лабораторных занятий предусматривается использование средств вычислительной техники при выполнении индивидуальных заданий и тестирования.

2. Интерактивные формы обучения, предполагающие организацию обучения как продуктивной творческой деятельности в режиме взаимодействия студентов друг с другом и с преподавателем

Использование интерактивных образовательных технологий способствует повышению интереса и мотивации учащихся, активизации мыслительной деятельности и творческого потенциала студентов, делает более эффективным усвоение материала, позволяет индивидуализировать обучение и ввести экстренную коррекцию знаний.

В рамках дисциплины «Элементы вариационного исчисления» предусматривается 30 часов аудиторных занятий, проводимых в интерактивной.

При проведении лабораторных занятий используются групповая работа, технология коллективной творческой деятельности, технология сотрудничества, ролевая игра, обсуждение проблемы в форме дискуссии, дебаты, круглый стол. Данные технологии обеспечивают высокий уровень усвоения студентами знаний, эффективное и успешное овладение умениями и навыками в предметной области, формируют познавательную потребность и необходимость дальнейшего самообразования, позволяют активизировать исследовательскую деятельность, обеспечивают эффективный контроль усвоения знаний.

3. Возможности образовательного портала ФГБОУ ВО «МГТУ» для предоставления студентам графика самостоятельной работы, расписания консультаций, заданий для самостоятельного выполнения и рекомендуемых тем для самостоятельного изучения.

Методика, предлагаемая для изучения курса «Элементы вариационного исчисления» ориентирована на лекции проблемно-информационного характера, семинарские занятия исследовательского типа и подготовку рефератов.

Используемые образовательные технологии позволяют активно применять в учебном процессе интерактивные формы проведения занятий (компьютерная симуляция, разбор конкретных ситуаций), что способствует формированию и развитию профессиональных навыков обучающихся. Применяемые в процессе изучения дисциплины поисковый и исследовательский методы в полной мере соответствуют требованиям ФГОС по реализации компетентностного подхода.

## **6 Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Представлено в приложении 1.

## **7 Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации**

Представлены в приложении 2.

## **8 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)**

### **а) Основная литература:**

1. Болдырев, Ю. Я. Вариационное исчисление и методы оптимизации : учебное пособие для вузов / Ю. Я. Болдырев. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 240 с. — (Университеты России). — ISBN 978-5-534-01707-6. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://biblio-online.ru/bcode/438267>.

2. Методы оптимизации. Задачник : учебное пособие для бакалавриата и магистратуры / В. В. Токарев, А. В. Соколов, Л. Г. Егорова, П. А. Мышкис. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 292 с. — (Бакалавр и магистр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-10417-2. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://biblio-online.ru/bcode/429999>.

### **б) Дополнительная литература:**

1. Рачков, М. Ю. Оптимальное управление в технических системах : учебное пособие для бакалавриата и магистратуры / М. Ю. Рачков. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 120 с. — (Бакалавр и магистр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-09144-1. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://biblio-online.ru/bcode/437559> (дата обращения: 27.02.2024).

### **в) Методические указания:**

1. Бизнес-статистика: практикум для академического бакалавриата / И. И. Елисеева [и др.] ; под редакцией И. И. Елисеевой. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 411 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-05724-9. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://biblio-online.ru/bcode/433866>.

### **г) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:**

#### **Программное обеспечение**

Наименование ПО	№ договора	Срок действия лицензии
7Zip	свободно распространяемое ПО	бессрочно

#### **Профессиональные базы данных и информационные справочные системы**

Название курса	Ссылка
----------------	--------

Национальная информационно-аналитическая система – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ)	URL: <a href="https://elibrary.ru/project_risc.asp">https://elibrary.ru/project_risc.asp</a>
Поисковая система Академия Google (Google Scholar)	URL: <a href="https://scholar.google.ru/">https://scholar.google.ru/</a>
Федеральное государственное бюджетное учреждение «Федеральный институт промышленной собственности»	URL: <a href="http://www1.fips.ru/">http://www1.fips.ru/</a>

### **9 Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Материально-техническое обеспечение дисциплины включает:

Лекционная аудитория. Оснащение аудитории: доска, мультимедийные средства хранения, передачи и представления информации

Учебные аудитории для проведения лабораторных занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации: компьютерный класс. Оснащение аудитории: персональные компьютеры с пакетом MS Office, Maple 14 Classroom License 10-29 Users (per User) Academic, MathLab, Mathcad Education - University Edition (200 pack) и выходом в Интернет.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся. Оснащение аудитории: персональные компьютеры с пакетом MS Office, выходом в Интернет и с доступом в электронную информационно-образовательную среду университета.

Помещение для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Оснащение аудитории: стеллажи для хранения учебно-наглядных пособий и учебно-методической документации.

## Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы

По дисциплине «Элементы вариационного исчисления » предусмотрена аудиторная и внеаудиторная самостоятельная работа обучающихся.

Аудиторная самостоятельная работа студентов предполагает выполнение заданий лабораторных работ.

### **Примерные аудиторные задания:**

1. Задачи, приводящие к вариационным проблемам.
2. Простейшая задача вариационного исчисления. Вариация и ее свойства. Уравнение Эйлера.
3. Функционалы, зависящие от нескольких функций.
4. Функционалы, зависящие от производных высшего порядка.
5. Функционалы, зависящие от функций многих переменных.
6. Канонический вид уравнения Эйлера.
7. Задача с подвижными концами.
8. Простейшая задача с подвижными границами.
9. Экстремали с угловыми точками.
10. Основные типы задач на условный экстремум.
11. Необходимые условия в задаче Лагранжа.
12. Необходимые условия в изопериметрической задаче.
13. Принцип взаимности в изопериметрических задачах.
14. Задача Больцано и задача Майера
15. Слабый экстремум.
16. Условие Якоби.
17. Инвариантный интеграл Гильберта.
18. Сильный экстремум Метод минимизирующих последовательностей.
19. Методы приближенного решения.
20. Приближенное решение задачи на собственные значения.
21. Двойственные вариационные задачи. Принцип Гамильтона.
22. Уравнения движения идеальной жидкости.
23. Вопросы устойчивости конструкций.
24. Вариационные принципы Лагранжа, Рейсснера и Кастильяно.
25. Вариационные принципы термоупругости.

**Примерные индивидуальные домашние задания (ИДЗ):**

1. Найти норму элемента  $y(x)$  в пространстве  $C[a, b]$  и  $C^1[a, b]$  соответственно

$$y(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}, \quad n = 1, 2, 10, 100, \quad x \in [0, \pi].$$

2. Для функционала

$$V[y(x)] = \int_0^1 xy^2 y' dx$$

положить  $y(x) = x^2$ ,  $\delta y(x) = x - 2$  и сравнить  $\delta V$  с  $\Delta V$ .

3. Найти экстремали функционала, содержащего старшие производные:

$$V[y(x)] = \frac{1}{2} \int_0^1 (y'')^2 dx, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

4. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций

$$V[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^3 \sqrt{1 + (y_1')^2 + (y_2')^2} dx,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -2, \quad y_1(3) = 7, \quad y_2(3) = 1.$$

5. Найти экстремали функционала в задаче с подвижными границами

$$V[y(x)] = \int_0^{x_1} (y')^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = -x_1 - 1.$$

6. Найти функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ , на которых может достигаться экстремум функционала  $V[y(x)]$  в задаче Лагранжа

$$V[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^{\pi/2} [y_1^2 + y_2^2 - (y_1')^2 - (y_2')^2 + \cos x] dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(\pi/2) = -1, \quad y_1 - y_2 - \sin x = 0.$$

7. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$V[y] = \int_0^1 (y')^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad \int_0^1 xy dx = 0.$$

8. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала

$$V[y(x)] = \int_0^a [6(y')^2 - (y')^4] dx,$$

проходящей через точки  $y(0) = 0$ ,  $y(a) = b$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

9. Исследовать на экстремум функционал

$$V[y(x)] = \int_0^1 e^x [y^2 + \frac{1}{2}(y')^2] dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e.$$

10. Найти методом Ритца приближенное решение задачи об экстремуме функционала:

$$V[y(x)] = \int_0^1 [(y')^2 + y^2 + xy] dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0, \quad n = 2.$$

### **Примерные аудиторные контрольные работы (АКР)**

#### **ВАРИАНТ № 1**

1. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int (y^2 + 2xyy') dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

2. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [(y'')^2 - 2(y')^2 + y^2 - 2y \sin x] dx.$$

3. Написать уравнение Остроградского для функционала

$$v[z(x, y)] = \iint_D \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

4. Найти экстремали изопериметрической задачи  $v[y(x)] = \int_0^1 ((y')^2 + x^2) dx$  при условии

$$\int_0^1 y^2 dx = 2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

5. Найти приближенное решение задачи об экстремуме функционала.

$$v[y(x)] = \int_0^1 (x^3 (y'')^2 + 100xy^2 - 20xy) dx, \quad y(1) = y'(1) = 0.$$

#### **ВАРИАНТ № 2**

1. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2 y') dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

2. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [(y''')^2 + y^2 - 2yx^3] dx.$$

3. Написать уравнение Остроградского для функционала

$$v[u(x, y, z)] = \iiint_D \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2uf(x, y, z) \right] dx dy dz.$$

4. Найти экстремали изопериметрической задачи  $v[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} (y')^2 dx$  при условии

$$\int_{x_1}^{x_2} y dx = a, \quad \text{где } a \text{ – постоянная.}$$

5. Найти приближенное решение задачи о минимуме функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 ((y')^2 - y^2 - 2xy) dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

#### Вопросы для итоговой оценки качества освоения курса:

1. Функциональные пространства. Понятие функционала. Непрерывность функционала. Линейный функционал.
2. Дифференцируемость функционала. Первая вариация функционала.
3. Сильный и слабый экстремум. Необходимое условие экстремума.
4. Вариационная задача с закрепленными границами.
5. Основная лемма вариационного исчисления. Лемма Дюбуа-Реймона.
6. Необходимое условие экстремума.
7. Уравнение Эйлера. Регулярные экстремали. Случаи понижения порядка уравнения Эйлера. Инвариантность уравнения Эйлера.
8. Функционалы от нескольких функций. Функционалы с производными высшего порядка. Функционалы от функций многих переменных. Необходимые условия экстремума.
9. Условия трансверсальности. Необходимые условия экстремума.
10. Задача Лагранжа. Необходимые условия экстремума при наличии голономных и неголономных связей. Изопериметрическая задача. Необходимые условия экстремума.
11. Квадратичный функционал. Вторая вариация функционала. Необходимые условия слабого и сильного экстремума: условие Лежандра, условие Якоби, условие Вейерштрасса.
12. Поле экстремалей. Достаточные условия сильного и слабого экстремума.
13. Понятие о прямых методах вариационного исчисления. Конечно-разностный метод Эйлера. Метод Ритца.
14. Задача навигации.
15. Вариационная задача с вертикальными границами.
16. Задача Дидоны.
17. Задача о брахистохроне.
18. Задача о наименьшей поверхности вращения.

## Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации

### а) Планируемые результаты обучения и оценочные средства для проведения промежуточной аттестации:

ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
ОПК-1.1: Решает профессиональные задачи с области фундаментальной и прикладной математики		
Знать	<ul style="list-style-type: none"> <li>– основные определения и понятия вариационного исчисления;</li> <li>– основные методы исследований, используемые в стандартных задачах профессиональной деятельности;</li> <li>– условия существования решений и способы их нахождения;</li> </ul>	<p><b>Перечень теоретических вопросов к экзамену:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Задачи, приводящие к вариационным проблемам.</li> <li>2. Простейшая задача вариационного исчисления. Вариация и ее свойства. Уравнение Эйлера.</li> <li>3. Первая вариация функционала. Сильный и слабый экстремум. Необходимое условие экстремума.</li> <li>4. Вариационная задача с закрепленными границами. Основная лемма вариационного исчисления. Лемма Дюбуа-Реймона.</li> <li>5. Необходимое условие экстремума. Уравнение Эйлера. Регулярные экстремали. Случаи понижения порядка уравнения Эйлера. Инвариантность уравнения Эйлера.</li> <li>6. Функционалы от функций многих переменных. Необходимые условия экстремума.</li> <li>7. Условия трансверсальности. Необходимые условия экстремума.</li> <li>8. Задача Лагранжа. Необходимые условия экстремума при наличии голономных и</li> </ol>

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
		неголономных связей. Изопериметрическая задача. Необходимые условия экстремума.
Уметь	<ul style="list-style-type: none"> <li>– выделять стандартные задачи рассматриваемой предметной области и решать их средствами вариационного исчисления;</li> <li>– решать профессиональные задачи с области фундаментальной и прикладной математики;</li> <li>– обсуждать способы эффективного решения задач профессиональной деятельности;</li> <li>– распознавать эффективное решение от неэффективного;</li> <li>– строить типичные модели вариационных задач;</li> <li>– применять полученные знания в профессиональной деятельности; использовать их на междисциплинарном уровне.</li> </ul>	<p><b>Примерные практические задания для экзамена:</b></p> <p>1. Найти экстремум функционала при граничных условиях</p> $J(y) = \int_0^1 (y'^2 + 12xy) dx \rightarrow \text{extr} \quad \begin{cases} y(0) = 0; \\ y(1) = 1. \end{cases}$ <p>2. Найти экстремум функционала при граничных условиях</p> $J(y) = \int_{-1}^1 (x^2 + y^2 + y'^2) dx; \quad \begin{cases} y(-1) = 1; \\ y(1) = 2. \end{cases}$ <p>3. Найти экстремум функционала при граничных условиях</p> $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 2y' \operatorname{sh} x - 5x^2) dx; \quad \begin{cases} y(-1) = 2; \\ y(1) = 3. \end{cases}$
Владеть	– практическими навыками использования элементов вариационного исчисления на других дисциплинах, на занятиях в аудитории и на практике;	<p><b>Индивидуальное домашнее задание:</b></p> <p>1. Для функционала</p>

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– способами демонстрации умения анализировать ситуацию с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности;</li> <li>– навыками и методиками обобщения результатов решения, экспериментальной деятельности;</li> <li>– способами оценивания значимости и практической пригодности полученных результатов;</li> <li>– возможностью междисциплинарного применения элементов вариационного исчисления;</li> <li>– профессиональным языком предметной области знания;</li> <li>– способами совершенствования профессиональных знаний и умений путем использования возможностей информационной среды.</li> </ul>	$V[y(x)] = \int_0^1 xy^2 y' dx$ <p>положить <math>y(x) = x^2</math>, <math>\delta y(x) = x - 2</math> и сравнить <math>\delta V</math> с <math>\Delta V</math>.</p> <p>2. Найти экстремали функционала, содержащего старшие производные:</p> $V[y(x)] = \frac{1}{2} \int_0^1 (y'')^2 dx, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 1.$ <p>3. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций</p> $V[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^3 \sqrt{1 + (y_1')^2 + (y_2')^2} dx,$ $y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -2, \quad y_1(3) = 7, \quad y_2(3) = 1.$ <p>4. Исследовать на экстремум функционал</p> $V[y(x)] = \int_0^1 e^x [y^2 + \frac{1}{2} (y')^2] dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e.$
ОПК-1.2: Владеет способами и приемами решения исследовательских задач в области фундаментальной и прикладной математики		
Знать	<ul style="list-style-type: none"> <li>– основные определения и понятия используемые в современном математическом аппарате;</li> <li>– основные методы исследований,</li> </ul>	<p><b>Перечень теоретических вопросов к экзамену:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Понятие о прямых методах вариационного исчисления. Конечно-разностный метод Эйлера. Метод Рунге.</li> <li>2. Задача навигации.</li> </ol>

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
	используемых в актуальных вариационных задачах; – основные задачи математической физики, приводящие к вариационным проблемам;	3. Вариационная задача с вертикальными границами. 4. Задача Дидоны. 5. Задача о брахистохроне. 6. Задача о наименьшей поверхности вращения.
Уметь	– формулировать результат учебной и исследовательской работы с помощью современного математического аппарата; – применять полученные знания в профессиональной деятельности; – корректно выражать и аргументированно обосновывать положения предметной области знания.	<p><b>Примерные практические задания для экзамена:</b></p> <p>1. <math>J(y) = \int_0^1 y y' dx; y(0) = 2; y(1) = 1.</math></p> <p>2. <math>J(y) = \int_0^2 (y^2 - 9y^2 + 2xy - x \sin x) dx; y(0) = 1; y(2) = 2.</math></p> <p>3. <math>J(y) = \int_1^3 y \sqrt{y'} dx; y(1) = 2; y(3) = 8.</math></p> <p>4. <math>J(y) = \int_0^2 y y' dx; y(0) = 1; y(2) = 3.</math></p>
Владеть	– практическими навыками использования элементов вариационного исчисления на других дисциплинах, на занятиях в аудитории и на	<p><b>Индивидуальное домашнее задание:</b></p> <p>1. Найти норму элемента <math>y(x)</math> в пространстве <math>C[a,b]</math> и <math>C^1[a,b]</math> соответственно</p>

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
	<p>производственной практике;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– способами демонстрации умения анализировать ситуацию посредством современного математического аппарата;</li> <li>– навыками и методиками обобщения результатов решения, экспериментальной деятельности;</li> <li>– способами оценивания значимости и практической пригодности полученных результатов;</li> </ul>	$y(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}, \quad n = 1, 2, 10, 100, \quad x \in [0, \pi].$ <p>2. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала</p> $V[y(x)] = \int_0^a [6(y')^2 - (y')^4] dx,$ <p>проходящей через точки <math>y(0) = 0, \quad y(a) = b, \quad a &gt; 0, \quad b &gt; 0.</math></p> <p>3. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче</p> $V[y] = \int_0^1 (y')^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad \int_0^1 xy dx = 0.$ <p>4. Найти методом Ритца приближенное решение задачи об экстремуме функционала:</p> $V[y(x)] = \int_0^1 [(y')^2 + y^2 + xy] dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0, \quad n = 2.$
ОПК-1.3: Применяет фундаментальные междисциплинарные знания для решения задач в профессиональной деятельности		
Знать	<ul style="list-style-type: none"> <li>– фундаментальные междисциплинарные понятия применяемые в вариационном исчислении;</li> <li>– основные методы исследований,</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Квадратичный функционал. Вторая вариация функционала. Необходимые условия слабого и сильного экстремума: условие Лежандра, условие Якоби, условие Вейерштрасса.</li> <li>2. Поле экстремалей. Достаточные условия сильного и слабого экстремума.</li> <li>3. Понятие о прямых методах вариационного исчисления. Конечно-разностный</li> </ol>

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
	используемые в стандартных задачах профессиональной деятельности; – условия существования решений и способы их нахождения;	метод Эйлера. Метод Рунге.
Уметь	<ul style="list-style-type: none"> <li>– решать задачи, относящиеся к основным типам экстремальных задач вариационного исчисления, использовать программные продукты для их численного решения;</li> <li>– формулировать результат учебной и исследовательской работы с помощью современного математического аппарата;</li> <li>– применять полученные знания в профессиональной деятельности;</li> </ul>	<p><b>Индивидуальное задание:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Найти экстремали функционала в задаче с подвижными границами  <math display="block">V[y(x)] = \int_0^{x_1} (y')^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = -x_1 - 1.</math> </li> <li>2. Найти функции <math>y_1(x)</math> и <math>y_2(x)</math>, на которых может достигаться экстремум функционала <math>V[y(x)]</math> в задаче Лагранжа  <math display="block">V[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^{\pi/2} [y_1^2 + y_2^2 - (y_1')^2 - (y_2')^2 + \cos x] dx,</math> <math display="block">y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(\pi/2) = -1, \quad y_1 - y_2 - \sin x = 0.</math> </li> </ol>
Владеть	<ul style="list-style-type: none"> <li>– основными методами исследования в области вариационного исчисления, практическими умениями и навыками их использования;</li> <li>– профессиональным языком предметной области знания;</li> </ul>	<p><b>Примерные индивидуальные задания:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>J(y) = \int_{-1}^1 (y - 4y^2 - 8xy + 2x^2) dx; \quad y(-1) = 3; \quad y(1) = 1.</math></li> <li>2. <math>J(y) = \int_0^1 y \sqrt{1+y} dx; \quad y(0) = 2; \quad y(1) = 3.</math></li> </ol>

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
		<p>3. <math>J(y) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+y}}{y} dx; y(0) = 2; y(1) = 1.</math></p> <p>4. <math>J(y) = \int_{-1}^1 (y^2 + 2xy - x^2) dx; y(-1) = 2; y(1) = 4.</math></p>

**б) Порядок проведения промежуточной аттестации, показатели и критерии оценивания:**

Промежуточная аттестация по дисциплине «Элементы вариационного исчисления» включает теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень усвоения обучающимися знаний, и практические задания, выявляющие степень сформированности умений и владений, проводится в форме экзамена.

Экзамен по данной дисциплине проводится в устной форме по экзаменационным билетам, каждый из которых включает 2 теоретических вопроса и одно практическое задание.

**Показатели и критерии оценивания экзамена:**

– на оценку **«отлично»** (5 баллов) – обучающийся демонстрирует высокий уровень сформированности компетенций, всестороннее, систематическое и глубокое знание учебного материала, свободно выполняет практические задания, свободно оперирует знаниями, умениями, применяет их в ситуациях повышенной сложности.

– на оценку **«хорошо»** (4 балла) – обучающийся демонстрирует средний уровень сформированности компетенций: основные знания, умения освоены, но допускаются незначительные ошибки, неточности, затруднения при аналитических операциях, переносе знаний и умений на новые, нестандартные ситуации.

– на оценку **«удовлетворительно»** (3 балла) – обучающийся демонстрирует пороговый уровень сформированности компетенций: в ходе контрольных мероприятий допускаются ошибки, проявляется отсутствие отдельных знаний, умений, навыков, обучающийся испытывает значительные затруднения при оперировании знаниями и умениями при их переносе на новые ситуации.

– на оценку **«неудовлетворительно»** (2 балла) – обучающийся демонстрирует знания не более 20% теоретического материала, допускает существенные ошибки, не может показать интеллектуальные навыки решения простых задач.

– на оценку **«неудовлетворительно»** (1 балл) – обучающийся не может показать знания на уровне воспроизведения и объяснения информации, не может показать интеллектуальные навыки решения простых задач.