



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»



УТВЕРЖДАЮ  
Директор ИЕиС  
Ю.В. Сомова

02.02.2026 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

**ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ**

Направление подготовки (специальность)  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль/специализация) программы  
Большие и открытые данные

Уровень высшего образования - бакалавриат

Форма обучения  
очная

Институт/ факультет	Институт естествознания и стандартизации
Кафедра	Прикладной математики и информатики
Курс	2
Семестр	4

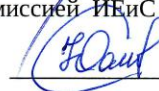
Магнитогорск  
2026 год

Рабочая программа составлена на основе ФГОС ВО - бакалавриат по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика (приказ Минобрнауки России от 10.01.2018 г. № 9)


Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры Прикладной математики и информатики  
13.01.2026, протокол № 5

Зав. кафедрой  Ю.А. Извеков

Рабочая программа одобрена методической комиссией ИЕиС  
02.02.2026 г. протокол № 4

Председатель  Ю.В. Сомова

Рабочая программа составлена:

доцент кафедры ПМИИ, канд. пед. наук  С.В. Акманова

Рецензент:

зав. кафедрой Физики, канд. физ.-мат. Наук  Д.М. Долгушин

## Лист актуализации рабочей программы

---

---

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2027 - 2028 учебном году на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

Протокол от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ Ю.А. Извеков

---

---

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2028 - 2029 учебном году на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

Протокол от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ Ю.А. Извеков

---

---

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2029 - 2030 учебном году на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

Протокол от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ Ю.А. Извеков

---

---

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2030 - 2031 учебном году на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

Протокол от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ Ю.А. Извеков

### **1 Цели освоения дисциплины (модуля)**

Целями освоения дисциплины «Функциональный анализ» являются: овладение студентами необходимым уровнем общепрофессиональных компетенций, предполагающих формирование у них целостного научного представления о функциональном анализе, связанных с ним математических методах решения прикладных и исследовательских задач, соответствующих осуществлению деятельности по направлению «Прикладная математика и информатика»

### **2 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы**

Дисциплина Функциональный анализ входит в обязательную часть учебного плана образовательной программы.

Для изучения дисциплины необходимы знания (умения, владения), сформированные в результате изучения дисциплин/ практик:

Алгебра и геометрия  
Математический анализ  
Дискретная математика

Знания (умения, владения), полученные при изучении данной дисциплины будут необходимы для изучения дисциплин/практик:

Математическое моделирование  
Элементы вариационного исчисления  
Выполнение и защита выпускной квалификационной работы  
Производственная – преддипломная практика

### **3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) и планируемые результаты обучения**

В результате освоения дисциплины (модуля) «Функциональный анализ» обучающийся должен обладать следующими компетенциями:

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности
ОПК-1.1	Решает профессиональные задачи с области фундаментальной и прикладной математики
ОПК-1.2	Владеет способами и приемами решения исследовательских задач в области фундаментальной и прикладной математики
ОПК-1.3	Применяет фундаментальные междисциплинарные знания для решения задач в профессиональной деятельности

#### 4. Структура, объём и содержание дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единиц 144 акад. часов, в том числе:

- контактная работа – 72 акад. часов;
- аудиторная – 68 акад. часов;
- внеаудиторная – 4 акад. часов;
- самостоятельная работа – 36,3 акад. часов;
- в форме практической подготовки – 0 акад. час;
- подготовка к экзамену – 35,7 акад. час

Форма аттестации - экзамен

Раздел/ тема дисциплины	Семестр	Аудиторная контактная работа (в акад. часах)			Самостоятельная работа студента	Вид самостоятельной работы	Форма текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации	Код компетенции
		Лек.	лаб. зан.	практ. зан.				
Раздел 1. Метрические пространства								
1.1 Понятие метрического пространства. Типы множеств в метрическом пространстве	4	2		2	4	Подготовка к практическому занятию	Проверка конспектов. Теоретический диктант.	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3
1.2 Предельный переход в метрическом пространстве. Полные метрические пространства		4		4	4	Самостоятельное изучение учебной и научной литературы	Проверка индивидуальных заданий	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3
1.3 Непрерывные отображения. Принцип сжимающих отображений		4		4	4	Работа с электронными тестовыми средствами	Проверка интернет-теста, выполненного в домашних условиях. Контрольная работа.	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3
Итого по разделу		10		10	12			
Раздел 2. Теория меры и интеграл Лебега								
2.1 Измеримые множества и их свойства	4	4		4	4	Подготовка к практическому занятию. Поиск дополнительной информации по заданной теме	Проверка конспектов. Письменный опрос, обсуждение	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3
2.2 Измеримые функции		4		4	4	Самостоятельное изучение учебной и научной литературы	Проверка конспектов. Письменный опрос, обсуждение	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3
2.3 Интеграл Лебега от измеримых ограниченных и неограниченных		5		4	4	Самостоятельное изучение учебной и	Контрольная работа	ОПК-1.1, ОПК-1.3, ОПК-1.2

функций. интегралов Лебега	Сравнение Римана и					научной литературы		
Итого по разделу		13		12	12			
Раздел 3. Банаховы и гильбертовы пространства. Линейные операторы								
3.1 Нормированные пространства. Банаховы и гильбертовы пространства	4	5		4	6	Самостоятельное изучение учебной и научной литературы	Обсуждение, письменный опрос	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3
3.2 Линейные операторы		6		8	6,3	Самостоятельное изучение учебной и научной литературы	Устный и письменный опрос, проверка конспектов	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3
Итого по разделу		11		12	12,3			
Итого за семестр		34		34	36,3		экзамен	
Итого по дисциплине		34		34	36,3		экзамен	

## **5 Образовательные технологии**

С целью успешного усвоения дисциплины «Функциональный анализ» и формирования требуемых компетенций предполагается применение различных образовательных технологий (личностно-ориентированных и развивающих), которые обеспечивают достижение планируемых результатов образования согласно основной образовательной программе. В их числе: дифференцированный подход, проблемное обучение, эвристическое обучение.

Основными формами занятий являются лекции, практические занятия, контрольно-оценочные занятия, консультации. Лекции строятся на основе сочетания информационной и проблемной составляющих, а также элементов беседы и визуализации.

В ходе проведения лекционных занятий предусматривается:

- обсуждение задач, приводящих к тем или иным математическим понятиям;
- изложение теоретического материала в режиме диалога с целью развития критического мышления студентов и привития им исследовательских умений;
- обсуждение и систематизация теоретических вопросов темы с целью лучшего понимания их взаимосвязи и практического применения.

Практические занятия по данной дисциплине направлены на привитие прочных навыков решения задач по каждой теме и сочетают применение методов обучения в сотрудничестве, дифференцированный подход, классические контрольные и тестовые технологии. При этом предполагается проведение некоторых таких занятий в интерактивной форме (деловые и ролевые игры, разбор конкретных ситуаций).

Выбирая ту или иную технологию работы со студентами, необходимо иметь в виду, что наибольшего эффекта от ее применения можно достичь, если учитывать:

- а) цели образования, на реализацию которых должна быть направлена избираемая технология;
- б) содержание материала, которое предстоит передать обучающимся с ее помощью;
- в) условия, в которых она будет использоваться;
- г) направленность её на самообразование и медиаобразование студентов.

## **6 Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Представлено в приложении 1.

## **7 Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации**

Представлены в приложении 2.

## **8 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### **а) Основная литература:**

1) Терсенов, А. С. Лекции по прикладному функциональному анализу : учебник для вузов / А. С. Терсенов. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 83 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-18812-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/568927> (дата обращения 08.03.2026).

2) Функциональный анализ: учебное пособие / В.И. Белоусова, А.А. Кныш, К.С. Поторочина [ и др.]. — Екатеринбург: УрГЭУ, 2023.— 88с.— Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система.—URL: <https://e.lanbook.com/book/417821>

3) Старовойтов, В. Н. Функциональный анализ. Мера и интеграл Лебега: учебник для вузов / В. Н. Старовойтов. — Москва: Издательство Юрайт, 2025. — 121с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19991-8. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/569213> (дата обращения: 08.03.2026).

#### **б) Дополнительная литература:**

Мельников Н.Б., Прикладной функциональный анализ: задачи с решениями: Учебное пособие. / Мельников Н. Б., Артемьева Л. А. — М.: Издательство Московского государственного университета, 2015. —108 с. (Серия "Бакалавриат. Учебные пособия"). —ISBN: 978-5-19-011104-0. – URL: <https://znanium.ru/catalog/document?id=340502&ysclid=mmhfs4ff91441642375>

#### **в) Методические указания:**

Осиленкер, Б.П. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебно-практическое пособие : учебное пособие / Осиленкер Б.П. — Москва : МИСИ-МГСУ, 2017. — 133 с. — ISBN 978-5-7264-1650-2. — URL: <https://znanium.ru/catalog/document?id=339102&ysclid=mmhg3aayeh177049820>

#### **г) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:**

##### **Программное обеспечение**

Наименование ПО	№ договора	Срок действия лицензии
MS Office 2007 Professional	№ 135 от 17.09.2007	бессрочно
7Zip	свободно распространяемое ПО	бессрочно
FAR Manager	свободно распространяемое ПО	бессрочно

##### **Профессиональные базы данных и информационные справочные системы**

Название курса	Ссылка
Электронные ресурсы библиотеки МГТУ им. Г.И. Носова	<a href="https://host.megaprolib.net/M/P0109/Web">https://host.megaprolib.net/M/P0109/Web</a>
Национальная информационно-аналитическая система – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ)	URL: <a href="https://elibrary.ru/project_risc.asp">https://elibrary.ru/project_risc.asp</a>

#### **9 Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Материально-техническое обеспечение дисциплины включает:

- 1) Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа. Оснащение: мультимедийные средства хранения, передачи и представления информации;
- 2) Учебные аудитории для проведения практических занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля, самостоятельной работы обучающихся и промежуточной аттестации. Оснащение: доска, мультимедийный проектор, экран. Комплекс тестовых заданий для проведения промежуточных и рубежных контроля;
- 3) Помещение для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Оснащение: шкафы для хранения учебно-методической документации, учебно-наглядных пособий и учебного оборудования;
- 4) Помещения для самостоятельной работы обучающихся. Оснащение: персональные компьютеры с пакетом MS Office и выходом в Интернет и с доступом в электронную информационно-образовательную среду университета).

**Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**  
По дисциплине «Функциональный анализ» предусмотрена аудиторная и внеаудиторная самостоятельная работа обучающихся.

Аудиторная самостоятельная работа студентов предполагает решение контрольных задач на практических занятиях.

**Примерные аудиторные контрольные работы (АКР):**

**АКР №1 «Метрические пространства»**

1. Является ли метрикой функция и почему:

а)  $\rho(x, y) = x^2 + y^2$ ;                      б)  $\rho(x, y) = \arctg|x - y|$ ?

2. Будет ли множество целых чисел метрическим пространством, если положить, что  $\rho(x, y) = \sqrt[3]{|x - y|}$ ? Если – да, то, что из себя представляет замкнутый шар, открытый шар и сфера в таком метрическом пространстве?

3. Является ли фундаментальной последовательность функций  $f_n(x) = \frac{x+n}{n^3+x^2}$  в пространстве  $C[2, 4]$ ?

4. Найти неподвижные точки отображения  $f(x) = x^2 - 5x - 7$  числовой прямой в себя.

5. Докажите, что последовательность, заданная рекуррентной формулой

$x_{n+1} = \frac{1}{9}x_n + 8$  ( $x_0 = 0$ ) имеет предел, и найдите его.

6. Докажите, что последовательность цепных дробей  $3, 3 + \frac{1}{3}, 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3}}, \dots$  имеет предел и найдите его.

**АКР №2 «Теория меры и интеграл Лебега»**

1. Может ли равняться нулю мера множества, которое содержит хотя бы одну внутреннюю точку?

2. Можно ли построить на отрезке  $[a; b]$  замкнутое множество линейной меры  $b-a$ , отличное от всего отрезка?

3.  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in F \cap E, \\ x^3, & x \in [0; 1] \setminus (F \cap E), \end{cases}$  выясните, измерима ли функция  $f$ , если  $F$  – канторово множество,  $E$  – некоторое неизмеримое множество.

4.  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in I, \\ x^3, & x \in Q, \end{cases}$  вычислите интеграл Лебега  $\int_{0,5}^1 f(x) dx$ .

5. Вычислите интеграл Лебега  $\int_{(1;2)} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ .

6. Докажите, что функция  $f$  такая, что  $f(0) = 0$  и  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$  при  $x \neq 0$ , суммируема на  $E: [-1, 8]$ , и найдите ее интеграл.

**АКР №3 «Банаховы и гильбертовы пространства»**

1. Проверьте, что  $C_2[a, b]$  — нормированное пространство.
2. Докажите, что предгильбертово пространство является линейным нормированным пространством с нормой  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ .
3. Найдите норму функции  $y = \frac{1}{5}(4x^3 - x^4)$  в пространствах а)  $C[-1, 5]$ ; б)  $C_1[-1, 5]$ .
4. Эквивалентна ли исходная норма на  $BV[a, b]$  норме  $\|f\|' = |f(a)| + \text{var}_{[a,b]}(f)$ ?
5. Докажите, что  $BV[a, b]$  — банахово пространство.
6. Докажите, что элемент  $x$  гильбертова пространства  $H$  ортогонален подпространству  $L \subset H$  в том и только том случае, если для любого элемента  $y \in L$  имеет место неравенство  $\|x\| \leq \|x - y\|$ .

**АКР №4 «Линейные операторы»**

1. Является ли линейным оператор  $F: (x, y, z) \rightarrow (u, v)$ :
 
$$\begin{cases} u = a_1x + b_1y + c_1z; \\ v = a_2x + b_2y + c_2z, \end{cases}$$
 действующий из  $\mathbb{R}_2^3$  в  $\mathbb{R}_2^2$ ?
2. Норма линейного функционала, действующего на плоскости  $\mathbb{R}_1^2$ , равна 6, а его значение в точке  $(1, 2)$  равно 2. Найдите значение функционала в точке  $(-1, 2)$ .

3.

Линейный оператор  $T: C[-1, 1] \rightarrow C[-1, 1]$  задан формулой

$$(Tf)(x) = \int_{-1}^1 \sin(|x|y) f(y) dy.$$

- 1) Докажите, что  $T$  ограничен.
- 2) Вычислите  $\|T\|$ .
- 3) Достигает ли  $T$  нормы?

4. Найти преобразование Фурье  $F(w)$  функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

5. В пространстве  $V_3$  линейный оператор  $A$  – зеркальное отражение относительно плоскости  $YOZ$ . Найти матрицу оператора  $A$  в базисе  $(i, j, k)$ . Найти образ вектора  $\{2, -1, 3\}$ . Найти ядро и образ оператора  $A$ . Существует ли обратный оператор? Если да, то описать его действие.

**Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации**

**а) Планируемые результаты обучения и оценочные средства для проведения промежуточной аттестации:**

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции	Оценочные средства
<b>ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности</b>		
ОПК-1.1	Решает профессиональные задачи в области фундаментальной и прикладной математики	<p><i>Владеет основным содержанием дисциплины в рамках следующих теоретических вопросов:</i></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Метрические пространства.</li> <li>2. Топология метрического пространства.</li> <li>3. Сходимость в метрическом пространстве.</li> <li>4. Фундаментальные последовательности. Полнота пространства.</li> <li>5. Непрерывные отображения метрических пространств.</li> <li>6. Сжимающие отображения. Принцип Банаха.</li> <li>7. Метод последовательных приближений и применение его к решению уравнений.</li> <li>8. Мера открытых и замкнутых ограниченных множеств.</li> <li>9. Измеримые по Лебегу множества и их свойства.</li> <li>10. Измеримые функции.</li> <li>11. Интеграл Лебега от измеримой ограниченной функции и его свойства.</li> <li>12. Интеграл Лебега от неограниченных функций.</li> </ol>

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции	Оценочные средства
		<p>13. Сравнение интегралов Римана и Лебега.</p> <p>14. Нормированные пространства.</p> <p>15. Эквивалентные нормы. Эквивалентность норм в конечномерных пространствах.</p> <p>16. Банаховы пространства.</p> <p>17. Гильбертовы пространства.</p> <p>18. Базис гильбертова пространства.</p> <p>19. Пространства <math>l_1</math> и <math>l_2</math>.</p> <p>20. Ряды Фурье.</p> <p>21. Линейные операторы. Норма оператора.</p> <p>22. Обратный оператор. Теорема об обратном операторе.</p> <p>23. Преобразование Фурье.</p> <p>24. Оператор свёртки.</p>
ОПК-1.2	Владеет способами и приемами решения исследовательских задач в области фундаментальной и прикладной математики	<p><b><i>Владеет фундаментальными методами и способами решения классических задач дисциплины исследовательского характера:</i></b></p> <p>1.</p> <p>Пусть <math>M</math> — любое множество. Положим</p> $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$ <p>Докажите, что <math>\rho(x, y)</math> — метрика на <math>M</math>.</p>

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции	Оценочные средства
		<p>2. Пусть <math>M</math> — множество всех населенных пунктов на левом берегу Волги. Расстояние <math>\rho(x, y)</math> от пункта <math>x</math> до пункта <math>y</math> будем измерять временем движения от <math>x</math> до <math>y</math> теплохода, имеющего собственную скорость 20 км/ч. Образует ли <math>M</math> метрическое пространство?</p> <p>3. Могут ли в некотором метрическом пространстве два открытого шара различных радиусов совпадать между собой?</p> <p>4. Докажите, что следующие последовательности числовой прямой <math>\mathbf{R}</math> фундаментальны:</p> <p>а) <math>x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}</math>;</p> <p>б) <math>x_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}</math>.</p> <p>5. Является ли сжимающим отображение <math>f(x) = x + \frac{1}{x}</math> полу-прямой <math>[1, \infty[</math> в себя?</p> <p>6. Покажите, что функция <math>f(x) = \sqrt[3]{1000 - x}</math> отображает</p>

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции	Оценочные средства
		отрезок $[9, 10]$ в себя. Сжимающее ли это отображение?
ОПК-1.3	Применяет фундаментальные междисциплинарные знания для решения задач в профессиональной деятельности	<p><b>Задания на решение задач из профессиональной области, комплексные задания:</b></p> <p>1.</p> <p>Покажите, что уравнение</p> $x = \sqrt[3]{x + 2}$ <p>можно решить методом последовательных приближений и вычислите его корни с точностью до 0,01.</p> <p>2.</p> <p>Докажите, что последовательность цепных дробей</p> $2, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, \dots$ <p>имеет предел, и найдите его.</p>

**б) Порядок проведения промежуточной аттестации, показатели и критерии оценивания:**

Студенты сдают по дисциплине в 4-м семестре экзамен.

Критерием успешного освоения программы дисциплины являются:

- умение интерпретировать понятия и утверждения, применять к решению задач изученную теорию;
- усвоение методов и приемов решения основных задач дисциплины; приобретение навыков работы с наиболее часто встречающимися объектами комплексного анализа.

- знание основных теоретических положений, формулировок и доказательств ряда теорем.

**Критерии оценки** (в соответствии с формируемыми компетенциями и планируемыми результатами обучения):

– на оценку **«отлично»** – студент должен показать высокий уровень знаний не только на уровне воспроизведения и объяснения информации, но и интеллектуальные навыки решения проблем и задач, нахождения уникальных ответов к проблемам, оценки и вынесения критических суждений;

– на оценку **«хорошо»** – студент должен показать знания не только на уровне воспроизведения и объяснения информации, но и интеллектуальные навыки решения проблем и задач, нахождения уникальных ответов к проблемам;

– на оценку **«удовлетворительно»** – студент должен показать знания на уровне воспроизведения и объяснения информации, интеллектуальные навыки решения простых задач;

– на оценку **«неудовлетворительно»** – студент не может показать знания на уровне воспроизведения и объяснения информации, не может показать интеллектуальные навыки решения простых задач.