



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И.  
Носова»



УТВЕРЖДАЮ  
Директор ИЭиАС  
В.Р. Храмшин

04.02.2025 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

***ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ***

Направление подготовки (специальность)  
09.03.01 Информатика и вычислительная техника

Направленность (профиль/специализация) программы  
Программное обеспечение средств вычислительной техники и автоматизированных систем

Уровень высшего образования - бакалавриат

Форма обучения  
очная

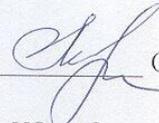
Институт/ факультет	Институт энергетики и автоматизированных систем
Кафедра	Вычислительной техники и программирования
Курс	1
Семестр	1

Магнитогорск  
2025 год

Рабочая программа составлена на основе ФГОС ВО - бакалавриат по направлению подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника (приказ Минобрнауки России от 19.09.2017 г. № 929)

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры  
Вычислительной техники и программирования  
03.02.2025 г, протокол № 5

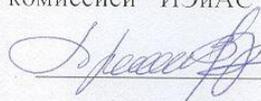
Зав. кафедрой



О.С. Логунова

Рабочая программа одобрена методической комиссией ИЭиАС  
04.02.2025 г. протокол № 3

Председатель



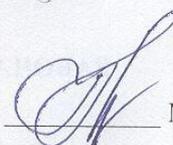
В.Р. Храмшин

Рабочая программа составлена:  
ст. преподаватель кафедры ВТиП,



Н.А.Квасова

Рецензент:  
директор НИИ «Промбезопасность», д-р техн. наук



М.Ю. Наркевич

## Лист актуализации рабочей программы

---

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2026 - 2027 учебном году на заседании кафедры Вычислительной техники и программирования

Протокол от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ О.С. Логунова

---

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2027 - 2028 учебном году на заседании кафедры Вычислительной техники и программирования

Протокол от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ О.С. Логунова

---

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2028 - 2029 учебном году на заседании кафедры Вычислительной техники и программирования

Протокол от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ О.С. Логунова

---

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2029 - 2030 учебном году на заседании кафедры Вычислительной техники и программирования

Протокол от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ О.С. Логунова

### **1 Цели освоения дисциплины (модуля)**

Целями освоения дисциплины «Элементы линейной алгебры» являются:  
ознакомление студентов с базовыми понятиями и результатами линейной алгебры,  
ознакомление студентов с применением линейной алгебры в квантовой механике,  
формирование компетенций, направленных на использование линейно-алгебраических методов при решении научных и прикладных задач.

### **2 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы**

Дисциплина Элементы линейной алгебры входит в обязательную часть учебного плана образовательной программы.

Для изучения дисциплины необходимы знания (умения, владения), сформированные в результате изучения дисциплин/ практик:

Дисциплина Линейная алгебра входит в вариативную (по выбору студента) часть учебного плана образовательной программы.

Для изучения дисциплины необходимы знания (умения, владения), сформированные в результате изучения школьного курса математики.

Знания (умения, владения), полученные при изучении данной дисциплины будут необходимы для изучения дисциплин/практик:

- Прикладная математика
- Основы квантовой информатики
- Моделирование
- Физические основы механики и оптики
- Численные методы
- Физика с элементами квантовой механики

### **3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) и планируемые результаты обучения**

В результате освоения дисциплины (модуля) «Элементы линейной алгебры» обучающийся должен обладать следующими компетенциями:

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции
ОПК-1	Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности;
ОПК-1.1	Решает стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования
ОПК-1.2	Решает профессиональные задачи с применением методов теоретического и экспериментального исследования

#### 4. Структура, объём и содержание дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единиц 108 академических часов, в том числе:

- контактная работа – 55 академических часов;
- аудиторная – 54 академических часов;
- внеаудиторная – 1 академический час;
- самостоятельная работа – 53 академических часов;
- в форме практической подготовки – 0 академических часов;

Форма аттестации - зачет

Раздел/ тема дисциплины	Семестр	Аудиторная контактная работа (в академических часах)			Самостоятельная работа студента	Вид самостоятельной работы	Форма текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации	Код компетенции
		Лек.	лаб. зан.	практ. зан.				
1. Раздел 1. Комплексные числа								
1.1 Комплексные числа и действия с ними. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Показательная и тригонометрическая формы комплексного числа.	1	1	3		2	Решение задач на действия с комплексными числами подготовка к устному опросу и АКР.	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Аудиторная контрольная работа	ОПК-1.1, ОПК-1.2
1.2 Основная теорема алгебры. Алгоритм деления многочленов. Разложение многочленов на множители.		1	2		1	Решение задач на разложение многочленов, подготовка к устному опросу и АКР	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Аудиторная контрольная работа	ОПК-1.1, ОПК-1.2
1.3 Функции комплексного переменного. Элементы комплексного анализа.		1	3		1	Решение задач на функции комплексного переменного, подготовка к устному опросу и АКР.	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Аудиторная контрольная работа	ОПК-1.1, ОПК-1.2
Итого по разделу		3	8		4			
2. Раздел 2. Матрицы и системы линейных уравнений								
2.1 Матрицы, действия с матрицами. Определители. Обратная матрица. Ранг матрицы.	1	1	3		4	Решение задач на матрицы и определители и системы,	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных	ОПК-1.1, ОПК-1.2

Решение систем методами матричного исчисления, Крамера, Гаусса. Метод Гаусса в общем случае. Теорема Кронеккера-Капелли. Однородные системы. Фундаментальная система решений.						подготовка к устному опросу и АКР.	заданий 3. Устный опрос. 4. Аудиторная контрольная работа	
2.2 Решение систем методами матричного исчисления, Крамера, Гаусса. Метод Гаусса в общем случае. Теорема Кронеккера-Капелли. Однородные системы. Фундаментальная система решений.	1	2	4		2	Решение задач на системы уравнений, подготовка к устному опросу и защите ТР.	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Защита типового расчёта	ОПК-1.1, ОПК-1.2
Итого по разделу		3	7		6			
3. Раздел 3. Линейные пространства и операторы								
3.1 Линейные пространства. Базис, размерность, подпространства, преобразования координат. Изоморфизм.	1	1	2		8	Решение задач, подготовка к устному опросу и защите ТР.	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Защита типового расчёта	ОПК-1.1, ОПК-1.2
3.2 Линейные операторы. Матричное представление операторов. Инвариантные подпространства. Собственные значения и векторы. Спектр. Характеристический многочлен. Подобие операторов. Понятие о присоединённых векторах и жордановой форме оператора.		1	4		6	Решение задач на матричное представление операторов, нахождение собственных значений и векторов., подготовка к устному опросу и защите ТР.	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Защита типового расчёта	ОПК-1.1, ОПК-1.2
3.3 Комплексное евклидово пространство. Скалярное произведение, неравенства Коши-Буняковского и Минковского. Норма. Ортонормированный базис. Ортогонализация Грама-Шмидта. Ортогональное дополнение и разложение в прямую сумму.		2	4		6	Решение задач на евклидово пространство и ортогонализацию, подготовка к устному опросу и защите ТР.	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Защита типового расчёта	ОПК-1.1, ОПК-1.2
3.4 Самосопряжённые операторы, квадратичные формы, спектр, экстремальные свойства собственных значений. Проекторы. Спектральная теорема. Нормальные и унитарные операторы.		4	2		4	Решение задач на самосопряжённые, унитарные и нормальные операторы, подготовка к устному опросу	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Защита типового расчёта	ОПК-1.1, ОПК-1.2

Коммутаторы. Разложение оператора в произведение унитарного и положительного.						и защите ТР.		
3.5 Приложение линейных операторов к оценке погрешности решений систем линейных уравнений. Число обусловленности линейного оператора. Итерационный метод вычисления границ спектра.	1	2	4		6	Решение задач на вычисление числа обусловленности и итерационный метод, подготовка к устному опросу и защите ТР.	1. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Защита типового расчёта	ОПК-1.1, ОПК-1.2
3.6 Квантовомеханическая терминология: бра- и кет-векторы. Среднее значение, отклонение и среднее квадратичное отклонение физических величин. Принцип неопределённости Гейзенберга.		2	5		13	Решение задач на вычисление средних значений и отклонений физических величин, подготовка к устному опросу и защите ТР.	. Беседа - обсуждение 2. Проверка индивидуальных заданий 3. Устный опрос. 4. Защита типового расчёта	ОПК-1.1, ОПК-1.2
Итого по разделу		12	21		43			
Итого за семестр		18	36		53		зачёт	
Итого по дисциплине		18	36		53		зачет	

## **5 Образовательные технологии**

1. Традиционные образовательные технологии, ориентированные на организацию образовательного процесса и предполагающую прямую трансляцию знаний от преподавателя к аспиранту.

Формы учебных занятий с использованием традиционных технологий:

Информационная лекция – последовательное изложение материала в дисциплинарной логике, осуществляемое преимущественно вербальными средствами (монолог преподавателя).

Лабораторная работа – организация учебной работы с реальными материальными и информационными объектами, экспериментальная работа с аналоговыми моделями реальных объектов.

2. Технологии проблемного обучения – организация образовательного процесса, которая предполагает постановку проблемных вопросов, создание учебных проблемных ситуаций для стимулирования активной познавательной деятельности аспирантов.

3. Интерактивные технологии – организация образовательного процесса, которая предполагает активное и нелинейное взаимодействие всех участников, достижение на этой основе лично значимого для них образовательного результата.

Формы учебных занятий с использованием специализированных интерактивных технологий:

Лекция «обратной связи» – лекция–провокация (изложение материала с заранее запланированными ошибками), лекция-беседа, лекция-дискуссия, лекция-конференция.

4. Информационно-коммуникационные образовательные технологии – организация образовательного процесса, основанная на применении программных сред и технических средств работы со знаниями в различных предметных областях.

## **6 Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Представлено в приложении 1.

## **7 Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации**

Представлены в приложении 2.

## **8 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### **а) Основная литература:**

1. Ильин, В. А. Линейная алгебра. Учебник для вузов [Текст]. / — В.А. Ильин, Э.Г. Позняк – М.: Физматлит, 2014. - 280 с.

2. Гельфанд, И.М. Лекции по линейной алгебре [Текст]. / И.М. Гельфанд – М. : Добросвет, 2009. 296 с.

### **б) Дополнительная литература:**

1. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц: [Текст]. / Ф.Р. Гантмахер – М.: Физматлит, 2010. - 560 с.

2. Нильсен, М. Квантовые вычисления и квантовая информация. Пер. с англ. [Текст]. / М. Нильсен, И. Чанг. – М. : «Мир», 2006. – 824 с.

### **в) Методические указания:**

1. Смушкевич Л.Е., Лекции по основам квантовых вычислений. Часть 1. Физико-математический терминимум. Выпуск 1. Комплексные числа. [Текст]. / Л.Е.

Смушкевич. – Магнитогорск : ЧОУ ИТФИ, 2018. – 77 с.

2. Смушкевич Л.Е., Лекции по основам квантовых вычислений. Часть 1. Математический аппарат квантовой механики. Выпуск 2. Алгебра матриц. Системы линейных уравнений. Линейные операторы в конечномерных комплексных евклидовых пространствах [Текст]. / Л.Е. Смушкевич. – Магнитогорск : ЧОУ ИТФИ, 2017. – 134 с.

**г) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:**

**Программное обеспечение**

Наименование ПО	№ договора	Срок действия лицензии
MS Office 2007 Professional	№ 135 от 17.09.2007	бессрочно
MathCAD v.15 Education University Edition	Д-1662-13 от 22.11.2013	бессрочно

**Профессиональные базы данных и информационные справочные системы**

Название курса	Ссылка

**9 Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Материально-техническое обеспечение дисциплины включает:

Лекционная аудитория - Мультимедийные средства хранения, передачи и представления информации.

Компьютерный класс - Персональные компьютеры с пакетом Office, выходом в Интернет и с доступом в электронную информационно-образовательную среду университета.

Аудитории для самостоятельной работы: компьютерные классы; читальные залы библиотеки - Все классы УИТ и АСУ с персональными компьютерами, выходом в Интернет и с доступом в электронную информационно-образовательную среду университета.

Аудиторий для групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации - Ауд. 282 и классы УИТ и АСУ.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, оснащенных компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и наличием доступа в электронную информационно-образовательную среду организации - Классы УИТ и АСУ.

Помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования -Центр информационных технологий – ауд. 379

## Приложение 1.

### Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

**Примерные задачи для усвоения текущего материала и подготовки к аудиторной контрольной работе по разделу 1 «Комплексные числа»**

1. Вычислить:

а)  $\overline{(2-i)}(3+7i) - \frac{5-2i}{4+3i}$ ,

б)  $(2+3i)^2 + (1-4i)^3$ ,

в)  $|4-3i| + (1+2i)^{-2}$ .

2. Решить уравнения:

а)  $(2-i)z + 5 - 3i = 0$ ,

б)  $z^2 - 4z + 5 = 0$ ,

в)  $z^2 = 5 + 12i$ ,

г)  $z^2 + \sqrt{5}z + 3i = 0$ .

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (2+3i)z_1 + 5z_2 = 1-i \\ 2z_1 + (5-i)z_2 = 2+i \end{cases}$$

4. Найти модули и аргументы следующих комплексных чисел: а) б; б)  $-7$ ; в)  $3i$ ; г)  $-4i$ ; д)  $2+2i$ ; е)  $3-3i$ ; ж)  $-2\sqrt{3}+2i$ ; з)  $3+4i$ ; е)  $-12-5i$ .

5. Записать комплексные числа в тригонометрической и показательной формах: а) 4; б)  $-7i$ ; в)  $3+3i$ ; г)  $4-4i$ ; д)  $2+2\sqrt{3}i$ ; е)  $3\sqrt{3}-3i$ ; ж)  $-3+4i$ ; з)  $-5-12i$ .

6. Перевести числа  $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$  и  $z_2 = 3\sqrt{3} + 3i$  в тригонометрическую и показательную формы, найти  $z_1 z_2$  и  $\frac{z_1}{z_2}$  в тригонометрической и показательной формах и перевести в алгебраическую форму.

7. Найти степени комплексных чисел, применяя формулу Муавра:

а)  $(1+i)^7$ , б)  $(\sqrt{3}-i)^8$ , в)  $(2-2\sqrt{3}i)^5$ .

8. Найти корни из комплексных чисел: а)  $\sqrt{3+3i}$ , б)  $\sqrt[3]{-125}$ ,

в)  $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$ .

9. Разложить многочлены на множители:

а)  $z^2 - 4z + 5$ ;

б)  $z^3 + 125$ ;

в)  $z^4 + 1 - \sqrt{3}i$ ;

г)  $z^8 - 2z^4 + 1$ .

**Примерные вопросы коллоквиума по разделу 1 «Комплексные числа»**

1. Что такое алгебраическая форма комплексного числа и как комплексные числа изображаются на комплексной плоскости?
2. Что такое модуль, аргумент, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа?
3. Как происходит умножение, деление, переход к сопряжённому для комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах?
4. Как происходит возведение в степень и извлечение корня из комплексного числа?
5. Что утверждает основная теорема алгебры и сколько корней может иметь многочлен  $n$ -ной степени?
6. Что такое кратность корня и как выглядит разложение многочлена на множители?

**Примерные задачи для усвоения текущего материала и выполнения типового расчёта №1 по разделу 2 «Матрицы и системы линейных уравнений»**

1. Вычислить  $AB - 3C + 2D^T$ ,

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \\ 4 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Доказать, что  $(A + B)^T = A^T + B^T$ ;  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ .

3. Вычислить разложением Лапласи приведением к треугольному виду определители:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -5 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

4. Найти матрицу, обратную к  $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ , проверить равенство  $A^{-1}A = E$ .

5. Решить матричное уравнение:  $AXB = C$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Решить методами обратной матрицы, Крамера и Гаусса следующую систему:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 6z = 5 \\ -x + 4y - 5z = 1 \\ 6x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

7. Привести к строго треугольному виду и найти ранг матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 9 & 8 & 0 \\ 5 & 10 & 11 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 7 & 7 & -4 \end{pmatrix}$ .

8. Найти общее решение системы:  $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 6 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 3 \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 + x_4 + 9x_5 = 9 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 7x_4 - 5x_5 = 3 \end{cases}$  9.

### **Примерные вопросы по защите типового расчёта №1 по разделу 2 «Матрицы и системы линейных уравнений»**

1. Как определяются основные действия с матрицами: сложение, умножение, транспонирование и переносятся ли на них основные свойства алгебраических операций: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность?
2. Что такое определитель и каковы его основные свойства?
3. Что такое обратная матрица и как она вычисляется?
4. Как решается система линейных алгебраических уравнений методами Крамера и с помощью обратной матрицы? Какие свойства системы обеспечивают применимость этих методов?
5. Что такое ранг матрицы и как он вычисляется?
6. Как решается и исследуется система методом Гаусса, что утверждает теорема Кронеккера-Капелли?
7. Что такое фундаментальная система решений однородной системы линейных алгебраических уравнений?

**Примерные задачи для усвоения текущего материала и выполнения типового расчёта №2 по разделу 3 «Линейные пространства и операторы»**

Для изучения количественного признака  $X$  из генеральной совокупности извлечена выборка  $x_1, \dots, x_n$  объёмом, имеющая данное статистическое распределение.

1). Является ли линейно независимой и образует ли базис система векторов в  $\mathbf{R}^4$ :

$$а) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -14 \\ 3 \end{pmatrix}; б) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix};$$

$$в) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ если да, то разложить по этому базису вектор } \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

2). Доказать, что следующие подмножества  $\mathbf{R}^n$  являются подпространствами:

а) Множество столбцов в  $\mathbf{R}^n$ , у которых первая координата равна 0.

б) Множество верхнетреугольных матриц (нули ниже главной диагонали) в пространстве  $\mathbf{M}_{n,n}$ .

в) Множество многочленов  $p(t) \in \mathbf{P}^n$ , таких, что

в1)  $p(0) = 0$ ;

в2)  $p(1) = p(2) = 0$ .

г) Для данной матрицы  $A \in \mathbf{M}_{m,n}$  множество векторов  $N = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax = 0\}$ .

д) Для данной матрицы  $A \in \mathbf{M}_{m,n}$  множество векторов  $R = \{Ax \in \mathbf{R}^m : x \in \mathbf{R}^n\}$ .

3). Найти в  $\mathbf{R}^3$  длины векторов  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ , расстояние между этими векторами,

угол между ними.

4). Показать, что ортонормированная система векторов (не обязательно образующая базис) линейно независима.

5). а) Проверить, что  $C[a, b]$  – пространство непрерывных функций на отрезке  $[a, b]$  является евклидовым, если ввести в нём скалярное произведение следующим образом: для функций  $f(t)$  и  $g(t)$  положим  $(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$ .

б) Найти в  $C[0,1]$  длины векторов  $f(t) = t, g(t) = e^t$ , расстояние между этими векторами, угол между ними.

б). Рассмотрим в пространстве  $\mathbf{R}^3$  базис  $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Применив к

нему процесс ортогонализации Шмидта, построить ортонормированный базис в  $\mathbf{R}^3$ .

7). В пространстве  $\mathbf{M}_{2,2}$  матриц размерности  $2 \times 2$  рассмотрим операторы левого и правого умножения на данную матрицу  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ :  $L_A X = AX$  и  $R_A X = XA$ . Приняв за

базис пространства  $\mathbf{M}_{2,2}$  матрицы  $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , найти матрицы операторов  $L_A$  и  $R_A$ .

8). Найти собственные значения и собственные векторы операторов, задаваемых следующими матрицами; определить размерность собственных подпространств; написать матрицы операторов в базисе из собственных векторов:

а)  $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$ , б)  $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , в)  $\begin{pmatrix} 11 & -1 & -4 \\ -1 & 11 & -4 \\ -4 & -4 & 14 \end{pmatrix}$ .

9). Найти следы операторов из задачи 8).

10). Доказать тождество:  $4\operatorname{Re}(Ax, y) = (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)$ .

11) Показать, что  $\|A_\alpha\| = \|P\| = \|S\| = 1$ , где  $A_\alpha$  – оператор поворота в  $\mathbf{R}^2$ ,  $P$  – оператор проецирования (какой-нибудь),  $S$  – оператор симметрии (какой-нибудь).

12). Найти норму диагонального оператора  $D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$  равна:

$$\|D\| = \max\{|a_k| : k = 1, \dots, n\}.$$

13). Найти норму оператора, представленного матрицей  $\begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 5 \end{pmatrix}$ .

**Примерные вопросы по защите типового расчёта №2. по разделу 3 «Линейные пространства и операторы»**

1. Что такое линейная независимость векторов и базис в  $\mathbf{R}^n$  ?
2. Что такое линейное пространство, привести примеры?
3. Что такое линейная независимость, базис, размерность, подпространство в произвольном линейном пространстве?
4. Каковы свойства скалярного произведения в вещественном и комплексном евклидовом пространстве? Чему равна норма вектора?
5. Написать неравенства Коши-Буняковского и Минковского.
6. Что такое ортонормированный базис, ортогонализация базиса, ортогональное дополнение?
7. Что такое линейный оператор? Как строится матрица оператора и как она преобразуется при переходе к новому базису?
8. Что такое собственные векторы и собственные значения оператора?
9. Что такое инвариант оператора и почему определитель, характеристический многочлен, след и спектр являются инвариантами?
10. Что такое норма оператора?
11. Что такое коммутатор двух операторов и каковы его свойства?
12. Что такое сопряжённый оператор и каковы свойства операции сопряжения?
13. Каковы экстремальные свойства собственных значений?
14. Что утверждает спектральная теорема для самосопряжённых операторов?
15. Что такое нормальный и унитарный операторы?
16. Как выглядит полярное разложение оператора?
17. Что такое среднее наблюдаемой величины в квантовой механике? Написать соотношение неопределённостей.

**Задания для оценки сформированности компетенций**

Проверяемая компетенция ОПК-1

Задания:

1. Какая пара векторов образует базис в пространстве  $\mathbf{R}^2$ ?

а)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

б)  $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

в)  $\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \end{pmatrix}$

г)  $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix}$

2. Какая размерность у пространства многочленов степени, не превосходящей 6?

а) 6

б) 5

в) 7

г) бесконечная

3. Чему равно скалярное произведение векторов  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

а) 9

б) -10

в) 11

г) -12

4. Есть два оператора поворота в двумерном пространстве: на  $3^\circ$  и  $5^\circ$ . Их произведение тоже является оператором поворота – на сколько градусов?

а)  $8^\circ$

б)  $15^\circ$

в)  $2^\circ$

г)  $4^\circ$

5. Чему равна норма самосопряжённого оператора в двумерном евклидовом пространстве,

который в ортонормированном базисе представляется матрицей  $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ?

а) 5

б) 6

в) 7

г) 8

**Ключ к заданию для оценки сформированности компетенций**

Шифр компетенции	ОПК-1				
№ вопроса	1	2	3	4	5
Правильный вариант ответа	б	в	г	а	г

**Критерии оценивания:**

ОПК-1:

0-2 правильных ответа – «неудовлетворительно»,

3 правильных ответа – «удовлетворительно»,

4 правильных ответа – «хорошо»,

5 правильных ответов – «отлично».

Приложение 2.

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции	Оценочные средства
<b>ОПК-1: Способен применять естественнонаучные и общинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности</b>		
ОПК-1.1:	Решает стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общинженерных знаний, методов	<i>Теоретические вопросы:</i> 1. Комплексные числа и действия с ними. 2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. 3. Возведение комплексного числа в степень и извлечение корня.

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции	Оценочные средства
	математического анализа и моделирования	<p>4. Основная теорема алгебры и разложение многочлена на множители.</p> <p>5. Матрицы и действия с ними.</p> <p>6. Определители и их свойства.</p> <p>7. Обратная матрица.</p> <p>8. Решение систем линейных алгебраических уравнений методами Крамера и обратной матрицы.</p> <p>9. Исследование и решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.</p> <p>10. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.</p> <p>11. Линейная зависимость и базис в <math>\mathbf{R}^n</math>.</p> <p>12. Линейное пространство, подпространство, базис, размерность.</p> <p>13. Евклидово пространство, скалярное произведение, норма вектора, неравенства Коши-Буняковского и Минковского.</p> <p>14. Ортогонализация.</p> <p>15. Линейный оператор, матрица оператора, преобразование матрицы при переходе к новому базису.</p> <p>16. Собственные векторы и собственные значения оператора. Инварианты. След. Спектр.</p> <p>17. Сопряжённый оператор. Самосопряжённые операторы. Экстремальные свойства спектра самосопряжённого оператора.</p> <p>18. Спектральная теорема для самосопряжённого оператора. Функции от оператора. Квадратный корень.</p> <p>19. Нормальные и унитарные операторы. спектральная теорема. Полярное разложение.</p> <p>20. Квантовомеханические приложения. Соотношение неопределённостей.</p> <p><i>Практические задания:</i></p> <p>1. Вычислить: <math>(2 + 3i)^2 + (1 - 4i)^3</math>.</p> <p>2. Найти степени комплексных чисел, применяя формулу Муавра: а) <math>(1 + i)^7</math>, б) <math>(\sqrt{3} - i)^8</math>.</p> <p>3. Найти корень из комплексного числа: <math>\sqrt[4]{-1 + \sqrt{3}i}</math></p> <p>4. Разложить многочлен на множители: <math>z^8 - 2z^4 + 1</math></p> <p>5. Вычислить <math>AB - 3C + 2D^T</math>,</p> <p>где <math>A = \begin{pmatrix} 3 &amp; -2 &amp; 5 \\ 6 &amp; 0 &amp; -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 &amp; 1 &amp; 0 &amp; -3 \\ 6 &amp; 1 &amp; 4 &amp; 6 \\ 4 &amp; 5 &amp; -1 &amp; 0 \end{pmatrix},</math></p> <p><math>C = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; -4 &amp; -2 \\ 3 &amp; 0 &amp; 4 &amp; 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 &amp; 1 \\ 2 &amp; -3 \\ 4 &amp; -5 \\ 1 &amp; 3 \end{pmatrix}.</math></p>

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции	Оценочные средства
		<p>6. Найти матрицу, обратную к, <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 2 &amp; 3 \\ -3 &amp; 4 &amp; 3 \\ 5 &amp; 1 &amp; 9 \end{pmatrix}</math>, 7. Решить методами обратной матрицы, Крамера и Гаусса следующую систему:</p> $\begin{cases} 3x + 2y + 6z = 5 \\ -x + 4y - 5z = 1. \\ 6x + y + 4z = -2 \end{cases}$ <p>8. Найти общее решение системы:</p> $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 6 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 3 \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 + x_4 + 9x_5 = 9 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 7x_4 - 5x_5 = 3 \end{cases}$ <p>9. Является ли линейно независимой и образует ли базис система векторов в <math>\mathbf{R}^4</math>: <math>\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}</math> если да, то разложить по этому базису вектор <math>\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix}</math>.</p> <p>10. Найти в <math>\mathbf{R}^3</math> длины векторов <math>x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}</math>, расстояние между этими векторами, угол между ними.</p> <p>11. В пространстве <math>\mathbf{M}_{2,2}</math> матриц размерности <math>2 \times 2</math> рассмотрим операторы левого и правого умножения на данную матрицу <math>A = \begin{pmatrix} a &amp; b \\ c &amp; d \end{pmatrix}</math>: <math>L_A X = AX</math> и <math>R_A X = XA</math>. Приняв за базис пространства <math>\mathbf{M}_{2,2}</math> матрицы <math>E_1 = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 \end{pmatrix}</math>, <math>E_2 = \begin{pmatrix} 0 &amp; 1 \\ 0 &amp; 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 &amp; 0 \\ 1 &amp; 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>, найти матрицы операторов <math>L_A</math> и <math>R_A</math>.</p> <p>12. Найти собственные значения и собственные векторы</p>

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции	Оценочные средства
		<p>операторов, задаваемых следующими матрицами; определить размерность собственных подпространств; написать матрицы операторов в базисе из собственных векторов:</p> $\begin{pmatrix} 11 & -1 & -4 \\ -1 & 11 & -4 \\ -4 & -4 & 14 \end{pmatrix}$ <p>13. Найти норму оператора, представленного матрицей</p> $\begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 5 \end{pmatrix}.$
ОПК-1.2	Решает профессиональные задачи с применением методов теоретического и экспериментального исследования	<p>14. Написать полярное разложение оператора, заданного в <math>\mathbf{R}^2</math> матрицей:</p> $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$