



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»



УТВЕРЖДАЮ
Директор ИЕиС
Ю.В. Сомова

03.02.2025 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Направление подготовки (специальность)
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль/специализация) программы
Большие и открытые данные

Уровень высшего образования - бакалавриат

Форма обучения
очная

Институт/ факультет	Институт естествознания и стандартизации
Кафедра	Прикладной математики и информатики
Курс	2
Семестр	4

Магнитогорск
2025 год

Рабочая программа составлена на основе ФГОС ВО - бакалавриат по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика (приказ Минобрнауки России от 10.01.2018 г. № 9)

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры Прикладной математики и информатики
14.01.2025, протокол № 5

Зав. кафедрой  Ю.А. Извеков

Рабочая программа одобрена методической комиссией ИЕиС
03.02.2025 г. протокол № 3

Председатель  Ю.В. Сомова

Рабочая программа составлена:

доцент кафедры ПМий, канд. пед. наук  С.В. Акманова

Рецензент:

зав. кафедрой Физики, канд. физ.-мат. наук  Д.М. Долгушин

Лист актуализации рабочей программы

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2026 - 2027 учебном году на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

Протокол от _____ 20__ г. № ____
Зав. кафедрой _____ Ю.А. Извеков

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2027 - 2028 учебном году на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

Протокол от _____ 20__ г. № ____
Зав. кафедрой _____ Ю.А. Извеков

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2028 - 2029 учебном году на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

Протокол от _____ 20__ г. № ____
Зав. кафедрой _____ Ю.А. Извеков

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2029 - 2030 учебном году на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

Протокол от _____ 20__ г. № ____
Зав. кафедрой _____ Ю.А. Извеков

1 Цели освоения дисциплины (модуля)

Целями освоения дисциплины «Функциональный анализ» являются: овладение студентами необходимым уровнем общепрофессиональных компетенций, предполагающих формирование у них целостного научного представления о функциональном анализе, связанных с ним математических методах решения прикладных и исследовательских задач, соответствующих осуществлению деятельности по направлению «Прикладная математика и информатика»

2 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина Функциональный анализ входит в обязательную часть учебного плана образовательной программы.

Для изучения дисциплины необходимы знания (умения, владения), сформированные в результате изучения дисциплин/ практик:

Алгебра и геометрия

Математический анализ

Дискретная математика

Знания (умения, владения), полученные при изучении данной дисциплины будут необходимы для изучения дисциплин/практик:

Математическое моделирование

Элементы вариационного исчисления

Выполнение и защита выпускной квалификационной работы

Производственная – преддипломная практика

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) и планируемые результаты обучения

В результате освоения дисциплины (модуля) «Функциональный анализ» обучающийся должен обладать следующими компетенциями:

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности
ОПК-1.1	Решает профессиональные задачи с области фундаментальной и прикладной математики
ОПК-1.2	Владеет способами и приемами решения исследовательских задач в области фундаментальной и прикладной математики
ОПК-1.3	Применяет фундаментальные междисциплинарные знания для решения задач в профессиональной деятельности

4. Структура, объём и содержание дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единиц 144 акад. часов, в том числе:

- контактная работа – 72 акад. часов;
- аудиторная – 68 акад. часов;
- внеаудиторная – 4 акад. часов;
- самостоятельная работа – 36,3 акад. часов;
- в форме практической подготовки – 0 акад. час;
- подготовка к экзамену – 35,7 акад. час

Форма аттестации - экзамен

Раздел/ тема дисциплины	Семестр	Аудиторная контактная работа (в акад. часах)			Самостоятельная работа студента	Вид самостоятельной работы	Форма текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации	Код компетенции
		Лек.	лаб. зан.	практ. зан.				
Раздел 1. Метрические пространства								
1.1 Понятие метрического пространства. Типы множеств в метрическом пространстве	4	2		2	4	Подготовка к практическому занятию	Проверка конспектов. Теоретический диктант.	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3
1.2 Предельный переход в метрическом пространстве. Полные метрические пространства		4		4	4	Самостоятельное изучение учебной и научной литературы	Проверка индивидуальных заданий	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3
1.3 Непрерывные отображения. Принцип сжимающих отображений		4		4	4	Работа с электронными тестовыми средствами	Проверка интернет-теста, выполненного в домашних условиях. Контрольная работа.	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3
Итого по разделу		10		10	12			
Раздел 2. Теория меры и интеграл Лебега								
2.1 Измеримые множества и их свойства	4	4		4	4	Подготовка к практическому занятию. Поиск дополнительной информации по заданной теме	Проверка конспектов. Письменный опрос, обсуждение	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3
2.2 Измеримые функции		4		4	4	Самостоятельное изучение учебной и научной литературы	Проверка конспектов. Письменный опрос, обсуждение	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3
2.3 Интеграл Лебега от измеримых ограниченных и неограниченных		5		4	4	Самостоятельное изучение учебной и	Контрольная работа	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3

функций. Сравнение интегралов Римана и Лебега						научной литературы		
Итого по разделу		13		12	12			
Раздел 3. Банаховы и гильбертовы пространства. Линейные операторы								
3.1 Нормированные пространства. Банаховы и гильбертовы пространства	4	5		4	6	Самостоятельное изучение учебной и научной литературы	Обсуждение, письменный опрос	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3
3.2 Линейные операторы		6		8	6,3	Самостоятельное изучение учебной и научной литературы	Устный и письменный опрос, проверка конспектов	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3
Итого по разделу		11		12	12,3			
Итого за семестр		34		34	36,3		экзамен	
Итого по дисциплине		34		34	36,3		экзамен	

5 Образовательные технологии

С целью успешного усвоения дисциплины «Функциональный анализ» и формирования требуемых компетенций предполагается применение различных образовательных технологий (личностно-ориентированных и развивающих), которые обеспечивают достижение планируемых результатов образования согласно основной образовательной программе. В их числе: дифференцированный подход, проблемное обучение, эвристическое обучение.

Основными формами занятий являются лекции, практические занятия, контрольно-оценочные занятия, консультации. Лекции строятся на основе сочетания информационной и проблемной составляющих, а также элементов беседы и визуализации.

В ходе проведения лекционных занятий предусматривается:

- обсуждение задач, приводящих к тем или иным математическим понятиям;
- изложение теоретического материала в режиме диалога с целью развития критического мышления студентов и привития им исследовательских умений;
- обсуждение и систематизация теоретических вопросов темы с целью лучшего понимания их взаимосвязи и практического применения.

Практические занятия по данной дисциплине направлены на привитие прочных навыков решения задач по каждой теме и сочетают применение методов обучения в сотрудничестве, дифференцированный подход, классические контрольные и тестовые технологии. При этом предполагается проведение некоторых таких занятий в интерактивной форме (деловые и ролевые игры, разбор конкретных ситуаций).

Выбирая ту или иную технологию работы со студентами, необходимо иметь в виду, что наибольшего эффекта от ее применения можно достичь, если учитывать :

- а) цели образования, на реализацию которых должна быть направлена избираемая технология;
- б) содержание материала, которое предстоит передать обучающимся с ее помощью;
- в) условия, в которых она будет использоваться;
- г) направленность её на самообразование и медиаобразование студентов.

6 Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Представлено в приложении 1.

7 Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации

Представлены в приложении 2.

8 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) Основная литература:

1) Филимоненкова, Н. В. Конспект лекций по функциональному анализу : учебное пособие / Н. В. Филимоненкова. — Санкт-Петербург: Лань, 2015. — 176 с. — ISBN 978-5-8114-1821-3. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/64343> (дата обращения: 21.04.2024). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

2) Бородин, П. А. Задачи по функциональному анализу: учебное пособие / П. А. Бородин, А. М. Савчук, И. А. Шейпак. — Москва : МЦНМО, 2017. — 336 с. — ISBN 978-5-4439-3092-3. — Текст: электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/92693>.

3) Старовойтов, В. Н. Функциональный анализ. Мера и интеграл Лебега : учебник для вузов / В. Н. Старовойтов. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 121 с.

— (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19991-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/569213> (дата обращения: 10.04.2025).

б) Дополнительная литература:

- 1) Крепкогорский В.Л., Функциональный анализ : учебное пособие / В.Л. Крепкогорский - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 116 с. - ISBN 978-5-7882-1650-8 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785788216508.html>
- 2) Мельников Н.Б., Прикладной функциональный анализ: задачи с решениями : Учебное пособие. / Мельников Н. Б., Артемьева Л. А. - М. : Издательство Московского государственного университета, 2015. - 108 с. (Серия "Бакалавриат. Учебные пособия") - ISBN 978-5-19-011104-0 - Текст: электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785190111040.html>

в) Методические указания:

Осиленкер, Б.П. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебно-практическое пособие : учебное пособие / Осиленкер Б.П. — Москва : МИСИ-МГСУ, 2017. — 133 с. — ISBN 978-5-7264-1650-2. — URL: <https://book.ru/book/930317>

г) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

Программное обеспечение

Наименование ПО	№ договора	Срок действия лицензии
MS Office 2007 Professional	№ 135 от 17.09.2007	бессрочно
7Zip	свободно распространяемое ПО	бессрочно
FAR Manager	свободно распространяемое ПО	бессрочно

Профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Название курса	Ссылка
Электронные ресурсы библиотеки МГТУ им. Г.И. Носова	https://host.megaprolib.net/M/P0109/Web
Национальная информационно-аналитическая система – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ)	URL: https://elibrary.ru/project_risc.asp

9 Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Материально-техническое обеспечение дисциплины включает:

Материально-техническое обеспечение дисциплины включает:

- 1) Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа. Оснащение: мультимедийные средства хранения, передачи и представления информации;
- 2) Учебные аудитории для проведения практических занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля, самостоятельной работы обучающихся и промежуточной аттестации. Оснащение: доска, мультимедийный проектор, экран. Комплекс тестовых заданий для проведения промежуточных и рубежных контролей;
- 3) Помещение для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Оснащение: шкафы для хранения учебно-методической документации, учебно-наглядных пособий и учебного оборудования;
- 4) Помещения для самостоятельной работы обучающихся. Оснащение: персональные компьютеры с пакетом MS Office и выходом в Интернет и с доступом в электронную информационно-образовательную среду университета).

Приложение 1

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

По дисциплине «Функциональный анализ» предусмотрена аудиторная и внеаудиторная самостоятельная работа обучающихся.

Аудиторная самостоятельная работа студентов предполагает решение контрольных задач на практических занятиях.

Примерные аудиторные контрольные работы (АКР):

АКР №1 «Метрические пространства»

1. Является ли метрикой функция и почему:

а) $\rho(x, y) = x^2 + y^2$; б) $\rho(x, y) = \arctg|x - y|$?

2. Будет ли множество целых чисел метрическим пространством, если положить, что $\rho(x, y) = \sqrt[3]{|x - y|}$? Если – да, то, что из себя представляет замкнутый шар, открытый шар и сфера в таком метрическом пространстве?

3. Является ли фундаментальной последовательность функций $f_n(x) = \frac{x+n}{n^3+x^2}$ в пространстве $C[2, 4]$?

4. Найти неподвижные точки отображения $f(x) = x^2 - 5x - 7$ числовой прямой в себя.

5. Докажите, что последовательность, заданная рекуррентной формулой

$$x_{n+1} = \frac{1}{9}x_n + 8 \quad (x_0 = 0) \text{ имеет предел, и найдите его.}$$

6. Докажите, что последовательность цепных дробей $3, 3 + \frac{1}{3}, 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3}}, \dots$ имеет предел и найдите его.

АКР №2 «Теория меры и интеграл Лебега»

1. Может ли равняться нулю мера множества, которое содержит хотя бы одну внутреннюю точку?

2. Можно ли построить на отрезке $[a; b]$ замкнутое множество линейной меры $b-a$, отличное от всего отрезка?

3. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in F \cap E, \\ x^3, & x \in [0; 1] \setminus (F \cap E), \end{cases}$ выяснить, измерима ли функция f , если F – канторово множество, E – некоторое неизмеримое множество.

4. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in I, \\ x^3, & x \in Q, \end{cases}$ вычислить интеграл Лебега $\int_{0,5}^1 f(x) dx$.

5. Вычислить интеграл Лебега $\int_{(1;2)} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

6. Докажите, что функция f такая, что $f(0) = 0$ и $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ при $x \neq 0$, суммируема на $E: [-1, 8]$, и найдите ее интеграл.

АКР №3 «Банаховы и гильбертовы пространства»

1. Проверьте, что $C_2[a, b]$ – нормированное пространство.

2. Докажите, что предгильбертово пространство является линейным нормированным пространством с нормой

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

3.. Найдите норму функции $y = \frac{1}{5}(4x^3 - x^4)$ в простран-

ствах а) $C[-1, 5]$; б) $C_1[-1, 5]$.

4. Эквивалентна ли исходная норма на $BV[a, b]$ норме $\|f\|' = |f(a)| + \text{var}_{[a,b]}(f)$?

5. Докажите, что $BV[a, b]$ – банахово пространство.

6. Докажите, что элемент x гильбертова пространства H ортогонален подпространству $L \subset H$ в том и только том случае, если для любого элемента $y \in L$ имеет место неравенство $\|x\| \leq \|x - y\|$.

АКР №4 «Линейные операторы»

1.

Является ли линейным оператор $F: (x, y, z) \rightarrow (u, v)$:

$$\begin{cases} u = a_1x + b_1y + c_1z; \\ v = a_2x + b_2y + c_2z, \end{cases}$$

действующий из $\mathbf{R}_2^3$ в $\mathbf{R}_2^2$?

2. Норма линейного функционала, действующего на плос-

кости $\mathbf{R}_1^2$, равна 6, а его значение в точке $(1, 2)$ равно 2. Найдите значение функционала в точке $(-1, 2)$.

3.

Линейный оператор $T: C[-1, 1] \rightarrow C[-1, 1]$ задан формулой

$$(Tf)(x) = \int_{-1}^1 \sin(|x|y) f(y) dy.$$

1) Докажите, что T ограничен.

2) Вычислите $\|T\|$.

3) Достигает ли T нормы?

4. Найти преобразование Фурье $F(w)$ функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

5. В пространстве V_3 линейный оператор A – зеркальное отражение относительно плоскости YOZ . Найти матрицу оператора A в базисе (i, j, k) . Найти образ вектора $\{2, -1, 3\}$. Найти ядро и образ оператора A . Существует ли обратный оператор? Если да, то описать его действие.

Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации

а) Планируемые результаты обучения и оценочные средства для проведения промежуточной аттестации:

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции	Оценочные средства
ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности		
ОПК-1.1	Решает профессиональные задачи в области фундаментальной и прикладной математики	<i>Владеет основным содержанием дисциплины в рамках следующих теоретических вопросов:</i> 1. Метрические пространства. 2. Топология метрического пространства. 3. Сходимость в метрическом пространстве. 4. Фундаментальные последовательности. Полнота пространства. 5. Непрерывные отображения метрических пространств. 6. Сжимающие отображения. Принцип Банаха. 7. Метод последовательных приближений и применение его к решению уравнений. 8. Мера открытых и замкнутых ограниченных множеств. 9. Измеримые по Лебегу множества и их свойства. 10. Измеримые функции. 11. Интеграл Лебега от измеримой ограниченной функции и его свойства. 12. Интеграл Лебега от неограниченных функций.

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции	Оценочные средства
		13. Сравнение интегралов Римана и Лебега. 14. Нормированные пространства. 15. Эквивалентные нормы. Эквивалентность норм в конечномерных пространствах. 16. Банаховы пространства. 17. Гильбертовы пространства. 18. Базис гильбертова пространства. 19. Пространства l_1 и l_2. 20. Ряды Фурье. 21. Линейные операторы. Норма оператора. 22. Обратный оператор. Теорема об обратном операторе. 23. Преобразование Фурье. 24. Оператор свёртки.
ОПК-1.2	Владеет способами и приемами решения исследовательских задач в области фундаментальной и прикладной математики	<i>Владеет фундаментальными методами и способами решения классических задач дисциплины исследовательского характера:</i> 1. Пусть M — любое множество. Положим $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции	Оценочные средства
		Докажите, что $\rho(x, y)$ — метрика на M. 2. Пусть M — множество всех населенных пунктов на левом берегу Волги. Расстояние $\rho(x, y)$ от пункта x до пункта y будем измерять временем движения от x до y теплохода, имеющего собственную скорость 20 км/ч. Образует ли M метрическое пространство? 3. Могут ли в некотором метрическом пространстве два открытого шара различных радиусов совпадать между собой? 4. Докажите, что следующие последовательности числовой прямой $\mathbf{R}$ фундаментальны: а) $x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$; б) $x_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$. 5. Является ли сжимающим отображение $f(x) = x + \frac{1}{x}$ полу-прямой $[1, \infty[$ в себя? 6. Покажите, что функция $f(x) = \sqrt[3]{1000 - x}$ отображает отрезок $[9, 10]$ в себя. Сжимающее ли это отображение?

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции	Оценочные средства
ОПК-1.3	Применяет фундаментальные междисциплинарные знания для решения задач в профессиональной деятельности	Задания на решение задач из профессиональной области, комплексные задания: 1. Покажите, что уравнение $x = \sqrt[3]{x+2}$ можно решить методом последовательных приближений и вычислите его корни с точностью до 0,01. 2. Докажите, что последовательность цепных дробей $2, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, \dots$ имеет предел, и найдите его.

б) Порядок проведения промежуточной аттестации, показатели и критерии оценивания:

Студенты сдают по дисциплине в 4-м семестре экзамен.

Критерием успешного освоения программы дисциплины являются:

- умение интерпретировать понятия и утверждения, применять к решению задач изученную теорию;
- усвоение методов и приемов решения основных задач дисциплины; приобретение навыков работы с наиболее часто встречающимися объектами комплексного анализа.

- знание основных теоретических положений, формулировок и доказательств ряда теорем.

Критерии оценки (в соответствии с формируемыми компетенциями и планируемыми результатами обучения):

– на оценку **«отлично»** – студент должен показать высокий уровень знаний не только на уровне воспроизведения и объяснения информации, но и интеллектуальные навыки решения проблем и задач, нахождения уникальных ответов к проблемам, оценки и вынесения критических суждений;

– на оценку **«хорошо»** – студент должен показать знания не только на уровне воспроизведения и объяснения информации, но и интеллектуальные навыки решения проблем и задач, нахождения уникальных ответов к проблемам;

– на оценку **«удовлетворительно»** – студент должен показать знания на уровне воспроизведения и объяснения информации, интеллектуальные навыки решения простых задач;

– на оценку **«неудовлетворительно»** – студент не может показать знания на уровне воспроизведения и объяснения информации, не может показать интеллектуальные навыки решения простых задач.