



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»



УТВЕРЖДАЮ  
Директор ИЕиС  
И.Ю. Мезин

19.02.2024 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

**ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА**

Направление подготовки (специальность)  
01.04.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль/специализация) программы  
Математическое моделирование и цифровые двойники

Уровень высшего образования - магистратура

Форма обучения  
очная

Институт/ факультет	Институт естествознания и стандартизации
Кафедра	Прикладной математики и информатики
Курс	2
Семестр	3

Магнитогорск  
2024 год

Рабочая программа составлена на основе ФГОС ВО - магистратура по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика (приказ Минобрнауки России от 10.01.2018 г. № 13)

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

09.02.2024, протокол № 6

Зав. кафедрой  Ю.А. Извеков

Рабочая программа одобрена методической комиссией ИЕиС

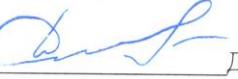
19.02.2024 г. протокол № 5

Председатель  И.Ю. Мезин

Рабочая программа составлена:

доцент кафедры ПМиИ, канд. физ.-мат. наук  В.В. Дубровский

Рецензент:

зав. кафедрой Физики, канд. физ.-мат. наук  Д.М. Долгушин

## **Лист актуализации рабочей программы**

---

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2025 - 2026  
учебном году на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

Протокол от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ Ю.А. Извеков

---

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2026 - 2027  
учебном году на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

Протокол от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ Ю.А. Извеков

## **1 Цели освоения дисциплины (модуля)**

Целью освоения дисциплины "Дополнительные главы комплексного анализа" является расширение базовых знаний обучающихся по комплексному анализу, изучение основных понятий и утверждений, необходимых для освоения основной образовательной программы и дальнейшей профессиональной деятельности

## **2 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы**

Дисциплина Дополнительные главы комплексного анализа входит в часть учебного плана формируемую участниками образовательных отношений образовательной программы.

Для изучения дисциплины необходимы знания (умения, владения), сформированные в результате изучения дисциплин/ практик:

Дополнительные главы функционального анализа

Математическое моделирование

Дополнительные главы уравнений математической физики

Современные компьютерные технологии

Знания (умения, владения), полученные при изучении данной дисциплины будут необходимы для изучения дисциплин/практик:

Выполнение и защита выпускной квалификационной работы

Производственная - научно-исследовательская работа

Производственная - преддипломная практика

## **3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) и планируемые результаты обучения**

В результате освоения дисциплины (модуля) «Дополнительные главы комплексного анализа» обучающийся должен обладать следующими компетенциями:

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции
ОПК-1	Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики
ОПК-1.1	Решает профессиональные задачи с области фундаментальной и прикладной математики
ОПК-1.2	Владеет способами и приемами решения исследовательских задач в области фундаментальной и прикладной математики
ОПК-1.3	Применяет фундаментальные междисциплинарные знания для решения задач в профессиональной деятельности

#### 4. Структура, объём и содержание дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единиц 108 акад. часов, в том числе:

- контактная работа – 56 акад. часов;
  - аудиторная – 54 акад. часов;
  - внеаудиторная – 2 акад. часов;
  - самостоятельная работа – 52 акад. часов;
  - в форме практической подготовки – 0 акад. час;

## Форма аттестации - зачет

3.1 Граничное поведение гармонических функций, представимых интегралом Пуассона	3	2	4		6	Самостоятельное изучение учебной и научной литературы	Устный опрос, проверка конспектов	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3
3.2 Некасательные предельные значения		1	2		3	Подготовка к лабораторному занятию	Тестирование	ОПК-1.2, ОПК-1.3
3.3 Сходимость к граничным значениям в метрике $L^p$ и слабая сходимость		1	2		3	Поиск дополнительной информации по заданной теме	Устный опрос, проверка конспектов	ОПК-1.2, ОПК-1.3
3.4 Теорема Фату		2	4		6	Подготовка к лабораторному занятию	Проверка индивидуальных домашних заданий	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3
Итого по разделу		6	12		18			
Итого за семестр		18	36		52		зачёт	
Итого по дисциплине		18	36		52		зачет	

## **5 Образовательные технологии**

С целью успешного усвоения дисциплины «Дополнительные главы комплексного анализа» и формирования требуемых компетенций предполагается применение различных образовательных технологий (личностно-ориентированных, развивающих, информационно-коммуникативных), которые обеспечивают достижение планируемых результатов образования согласно основной образовательной программе. В их числе: дифференцированный подход, проблемное обучение, эвристическое обучение.

Основными формами занятий являются лекции, практические занятия, контрольно-оценочные занятия, консультации. Лекции строятся на основе сочетания информационной и проблемной составляющих, а также элементов беседы и визуализации.

В ходе проведения лекционных занятий предусматривается:

- обсуждение задач, приводящих к тем или иным математическим понятиям;
- изложение теоретического материала в режиме диалога с целью развития критического мышления студентов и привития им исследовательских умений;
- обсуждение и систематизация теоретических вопросов темы с целью лучшего понимания их взаимосвязи и практического применения.

Лабораторные занятия по данной дисциплине направлены на привитие прочных навыков решения задач по каждой теме и сочетают применение методов обучения в сотрудничестве, дифференцированный подход, классические контрольные, тестовые технологии, а также применение компьютерных и информационных технологий. При этом предполагается проведение некоторых таких занятий в интерактивной форме (деловые и ролевые игры, разбор конкретных ситуаций).

Выбирая ту или иную технологию работы со студентами, необходимо иметь в виду, что наибольшего эффекта от ее применения можно достичь, если учитывать :

- а) цели образования, на реализацию которых должна быть направлена избираемая технология;
- б) содержание материала, которое предстоит передать обучающимся с ее помощью;
- в) условия, в которых она будет использоваться;
- г) направленность её на самообразование и медиаобразование студентов.

## **6 Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Представлено в приложении 1.

## **7 Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации**

Представлены в приложении 2.

## **8 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)**

### **а) Основная литература:**

1. Пантелеев, А.В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: учебное пособие / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова . - 3-е изд., испр. - СПб: Лань, 2015.- 448 с.- Режим доступа URL: <https://e.lanbook.com/book/67463> (дата обращения: 22.04.2024).

2. Шабунин, М.И. Теория функций комплексного переменного: Учебник / М.И. Шабунин, Ю.В. Сидоров. - 3-е изд., испр. и доп. (эл.) - М.:БИНОМ. Лаб. знаний, 2016. - 303 с.: ISBN 978-5-93208-209-6 - URL: <https://znanium.ru/catalog/document?id=365877> (дата обращения: 22.04.2024)

### **б) Дополнительная литература:**

1. Половинкин, Е.С. Теория функций комплексного переменного: Учебник / Е.С. Половинкин. - М.:НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 254 с.: ISBN 978-5-16-004864-2 - URL:

<http://znanium.com/catalog/product/487040> (дата обращения: 22.04.2024).

2. Далингер, В. А. Комплексный анализ: учебное пособие для вузов / В. А. Далингер, С. Д. Симонженков. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 143 с. — (Университеты России). — ISBN 978-5-534-08399-6. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/453907> (дата обращения: 22.04.2024).

**в) Методические указания:**

1. Акманова, С.В. Сборник задач и упражнений по комплексному анализу [Электронный ресурс]: практикум / Светлана Владимировна Акманова; ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». — Электрон. текстовые данные (0,68 Мб). — Магнитогорск: ФГБОУ ВО « МГТУ им. Г.И. Носова», 2021. — 1 электрон. опт. диск (CD-R).

**г) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:**

**Программное обеспечение**

Наименование ПО	№ договора	Срок действия лицензии
MS Office 2007 Professional	№ 135 от 17.09.2007	бессрочно
7Zip	свободно распространяемое	бессрочно
FAR Manager	свободно распространяемое	бессрочно

**Профессиональные базы данных и информационные справочные системы**

Название курса	Ссылка
Национальная информационно-аналитическая система – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ)	<a href="URL: https://elibrary.ru/project_risc.asp">URL: https://elibrary.ru/project_risc.asp</a>
Поисковая система Академия Google (Google Scholar)	<a href="URL: https://scholar.google.ru/">URL: https://scholar.google.ru/</a>
Электронные ресурсы библиотеки МГТУ им. Г.И. Носова	<a href="https://host.megaprolib.net/MP0109/Web">https://host.megaprolib.net/MP0109/Web</a>
Архив научных журналов «Национальный электронно-информационный консорциум» (НП НЭИКОН)	<a href="https://arch.neicon.ru/xmlui/">https://arch.neicon.ru/xmlui/</a>

**9 Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Материально-техническое обеспечение дисциплины включает:

1) Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа. Оснащение: мультимедийные средства хранения, передачи и представления информации;

2) Учебные аудитории для проведения практических занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля, самостоятельной работы обучающихся и промежуточной аттестации. Оснащение: доска, мультимедийный проектор, экран. Комплекс тестовых заданий для проведения промежуточных и рубежных контроля;

3) Помещение для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Оснащение: шкафы для хранения учебно-методической документации, учебно-наглядных пособий и учебного оборудования;

4) Помещения для самостоятельной работы обучающихся. Оснащение: персональные компьютеры с пакетом MS Office и выходом в Интернет и с доступом в электронную информационно-образовательную среду университета.

## Приложение 1

По дисциплине «Дополнительные главы комплексного анализа» предусмотрена аудиторная и внеаудиторная самостоятельная работа.

Аудиторная самостоятельная работа студентов представляет собой решение контрольных задач обучающимися на практических занятиях.

*Пример аудиторной контрольной работы (АКР):*

*АКР «Гармонические функции и их свойства»*

1. Выясните, является ли функция гармонической на своей области определения:

a)  $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 1$ ; б)  $u(x, y) = \frac{x^2 - x + y^2}{x - y}$ .

2. Выясните область гармоничности данной функции и проверьте, принимает ли она внутри границы этой области значения, заключенные между минимальным и максимальным её граничными значениями? Почему?

$$u(z) = \operatorname{Re} \left( 1 - \frac{2}{z} \right).$$

3. Построить интеграл Пуассона для поиска гармонической функции в круге  $0 \leq r \leq 2$ , если  $u(r, \varphi) \Big|_{r=2} = \sin \varphi$ .

Аудиторные самостоятельные работы по данной дисциплине могут быть также комплексными с элементами исследования и привлечением компьютерных и информационных технологий.

*Примеры исследовательских заданий по дисциплине:*

1. Моделирование гармонических функций средствами математических пакетов.

2. Моделирование гармонических функций с помощью интеграла Пуассона.

3. Моделирование гармонической меры множества.

4. Моделирование сопряжённых гармонических функций средствами математических пакетов.

Выполнение исследовательских заданий заключается в построении математической модели объектов исследования и реализацию построенной модели программными средствами. Завершающим этапом выполнения таких заданий служит их защита в виде

демонстрации разработанных программных продуктов и ответов на вопросы преподавателя по тематике исследовательского задания, включая детали его выполнения.

Внеаудиторная самостоятельная работа предполагает изучение обучающимся лекционного материала и дополнительной литературы по дисциплине с целью выполнения **индивидуальных домашних заданий (ИДЗ)** и последующей их защитой-выступлением. Обучающиеся выбирают тему **ИДЗ**, разрабатывают план его выполнения, согласовывают его с преподавателем, обсуждают сроки выполнения заданий: Темы ИДЗ для обучающихся одной группы должны быть различными.

**Примерные темы индивидуальных домашних заданий (ИДЗ):**

1. Теоремы о среднем для гармонических функций.
2. Задачи Дирихле и Неймана для гармонических функций.
3. Функция Грина.
4. Интеграл Пуассона.
5. Представление гармонических функций степенными рядами.
6. Теорема Фату.
7. Гармоническая мера.
8. Сопряжённые функции. Точки Лебега.
9. Пространства Харди.

При защите ИДЗ выступающий должен выполнить следующие действия в отношении слушателей (преподавателя и обучающихся)

- привлечь и удержать их внимание путём содержательного и логически выстроенного доклада;
- вызвать интерес актуальностью изучаемых вопросов и их значимостью в науке и практике;
- повысить активность слушателей посредством рассмотрения задач темы, которые могут быть решены обучающимися под руководством докладчика-выступающего.

## Приложение 2

### Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации

а) Планируемые результаты обучения и оценочные средства для проведения промежуточной аттестации:

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции	Оценочные средства
<b>ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики</b>		

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции	Оценочные средства
	Знания и умения интерпретировать базовые теоретические положения дисциплины	<p><b><i>Владеет основным содержанием дисциплины в рамках следующих теоретических вопросов:</i></b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Гармонические функции в круге. Представимость степенным рядом и формулой Пуассона.</li> <li>2. Ядро Пуассона и его свойства.</li> <li>3. Представление гармонических функций с ограниченными средними интегралами Пуассона от суммируемых функций и по ограниченной мере.</li> <li>4. Обратные теоремы о представлении гармонических функций: ограниченность средних от интегралов Пуассона.</li> <li>5. Граничное поведение интеграла Пуассона от непрерывной функции.</li> <li>6. Граничные свойства интеграла Пуассона: сходимость в среднем к граничной функции.</li> <li>7. Граничные свойства интеграла Пуассона: слабая сходимость к граничной мере и граничной функции.</li> <li>8. Граничные свойства интеграла Пуассона: теорема Фату.</li> <li>9. Теоремы о представлении гармонических функций интегралами Пуассона и существование некасательных граничных значений (обзор результатов).</li> <li>10. Гармонически сопряжённая функция. Представление степенным рядом и через сопряжённое ядро Пуассона. Вид граничной функции. Точки Лебега.</li> </ol>
	Владение методами и приемами решения основных задач дисциплины, а также методами математического моделирования при решении задач профессиональной сферы	<p><b><i>Владеет фундаментальными методами и способами решения классических задач дисциплины исследовательского характера:</i></b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Восстановить аналитическую в окрестности точки <math>z_0 = 0</math> функцию <math>f(z)</math> по её мнимой части <math>v(x, y) = x^2 - y^2 + 2x + 1</math> и значению <math>f(0) = i</math>.</li> <li>2. Объясните, как найти гармоническую в области <math>D</math> функцию <math>u(z)</math>, зная значение её нормальной производной на границе <math>C</math>:  <math display="block">\frac{\delta u}{\delta n} = \frac{\delta u}{\delta x} \cos \alpha + \frac{\delta u}{\delta y} \sin \alpha</math>, если известно значение <math>u(z_0)</math> искомой функции в точке <math>z_0 \in \bar{D}</math>.</li> <li>3. Составьте и решите задачу 2 со своими данными.</li> </ol>

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции	Оценочные средства
	Применение фундаментальных междисциплинарных знаний для решения задач в профессиональной деятельности	<p><i>Задания на решение задач из профессиональной области, комплексные задания:</i></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Моделирование гармонических функций с помощью степенных рядов на основе применения математических пакетов.</li> <li>2. Решение задачи Дирихле для круга с помощью интеграла Пуассона.</li> <li>3. Моделирование аналитических функций посредством математических пакетов на основе моделей одной из их гармонических компонент.</li> </ol>

**6) Порядок проведения промежуточной аттестации, показатели и критерии оценивания:**

Студенты сдают по дисциплине в 3- м семестре зачёт.

Критериям успешного освоения программы дисциплины являются:

- умение интерпретировать понятия и утверждения, применять к решению задач изученную теорию;
- усвоение методов и приемов решения основных задач дисциплины; приобретение навыков работы с наиболее часто встречающимися объектами комплексного анализа.
- знание основных теоретических положений, формулировок и доказательств ряда теорем.

При этом обучающиеся должны выполнить на положительную оценку аудиторные контрольные работы, исследовательское задание и защитить индивидуальное домашнее задание.