



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»



**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В  
НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ**

Направление подготовки

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность (профиль/специализация) программы

Начальное образование и организация воспитательной работы

Уровень высшего образования - бакалавриат

Форма обучения  
очная

Институт

Институт гуманитарного образования

Кафедра

Педагогического образования и документоведения

Курс

1, 2, 3, 4

Семестр

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Магнитогорск  
2021 год

Рабочая программа составлена на основе ФГОС ВО - бакалавриат по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (приказ Минобрнауки России от 22.02.2018 г. № 125)

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры Педагогического образования и документоведения  
08.02.2021, протокол № 7

Зав. кафедрой  C.S. Великанова

Рабочая программа одобрена методической комиссией ИГО  
03.03.2021 г. протокол № 7

Председатель  Т.Е. Абрамзон

Рабочая программа составлена:  
ст. преподаватель кафедры ПОиД,  О.В.Камышева

Рецензент: доцент кафедры ДиСО, канд.пед. наук  С.Н.Юревич

## **Лист актуализации рабочей программы**

---

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2022 - 2023  
учебном году на заседании кафедры Педагогического образования и документоведения

Протокол от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ С.С. Великанова

---

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2023 - 2024  
учебном году на заседании кафедры Педагогического образования и документоведения

Протокол от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ С.С. Великанова

---

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2024 - 2025  
учебном году на заседании кафедры Педагогического образования и документоведения

Протокол от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ С.С. Великанова

---

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2025 - 2026  
учебном году на заседании кафедры Педагогического образования и документоведения

Протокол от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ С.С. Великанова

---

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2026 - 2027  
учебном году на заседании кафедры Педагогического образования и документоведения

Протокол от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ С.С. Великанова

## **1 Цели освоения дисциплины (модуля)**

### **1 Цели освоения дисциплины (модуля)**

«Теоретические основы преподавания математики в начальной школе» являются содействие становлению профессиональных, специальных компетенций посредством формирования системы математических знаний как теоретической основы содержания начального курса математики, а также для видения перспективы использования понятий начального курса математики в средних классах школы.

## **2 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы**

Дисциплина Теоретические основы преподавания математики в начальной школе входит в обязательную часть учебного плана образовательной программы.

Для изучения дисциплины необходимы знания (умения, владения), сформированные в результате изучения дисциплин/ практик:

Введение в педагогическую деятельность учителя начальных классов

Основы математической обработки информации

Учебная - ознакомительная практика

Знания (умения, владения), полученные при изучении данной дисциплины будут необходимы для изучения дисциплин/практик:

Учебная - общественно-педагогическая практика

Производственная - педагогическая практика

Методика преподавания математики в начальной школе

Учебная - практика пробных уроков

Производственная - практика по получению профессиональных умений и опыта профессиональной деятельности

Учебная - первые дни ребенка в школе

Выполнение и защита выпускной квалификационной работы

Производственная – преддипломная практика

## **3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения**

### **дисциплины (модуля) и планируемые результаты обучения**

В результате освоения дисциплины (модуля) «Теоретические основы преподавания математики в начальной школе» обучающийся должен обладать следующими компетенциями:

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции
ОПК-8 Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний	
ОПК-8.1	Планирует и проводит научные исследования в области педагогической деятельности
ОПК-8.2	Использует специальные научные знания для повышения эффективности педагогической деятельности

#### 4. Структура, объём и содержание дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 19 зачетных единиц 684 акад. часов, в том числе:

- контактная работа – 447,15 акад. часов;
  - аудиторная – 433 акад. часов;
  - внеаудиторная – 14,15 акад. часов
  - самостоятельная работа – 165,45 акад. часов;
- подготовка к экзамену – 71,4 акад. часа

Форма аттестации - экзамен, зачет с оценкой

Раздел/ тема дисциплины	Семестр	Аудиторная контактная работа (в акад. часах)			Самостоятельная работа студента	Вид самостоятельной работы	Форма текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации	Код компетенции
		Лек.	лаб. зан.	практ. зан.				
1. Раздел I. Множества. Математические утверждения и их структура								
1.1 Множества и операции над ними	2	4		8/4И	3,65	Выступление на семинаре; Отчет по практической работе; Устный ответ на практическом занятии	Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе	ОПК-8.1, ОПК-8.2
1.2 Математические понятия		4		8/4И	6	Выступление на семинаре; Отчет по практической работе; Устный ответ на практическом занятии	Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе	ОПК-8.1, ОПК-8.2
1.3 Математические предложения		4		10/4И	4	Выступление на семинаре; Отчет по практической работе; Устный ответ на практическом занятии	Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе	ОПК-8.1, ОПК-8.2
1.4 Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе		5		8/2И	4,5	Выступление на семинаре; Отчет по практической работе; Устный ответ на практическом занятии	Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе	ОПК-8.1, ОПК-8.2
Итого по разделу		17		34/14И	18,15			
Итого за семестр		17		34/14И	18,15		экзамен	
2. Раздел II. Бинарные отношения. Количественная теория множества целых неотрицательных чисел								

2.1 Соответствия между двумя множествами	3	10		14/5И	4	Выступление на семинаре; Отчет по практической работе; Устный ответ на практическом занятии	Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе	ОПК-8.1, ОПК-8.2
2.2 Бинарные отношения на множестве		8		12/6И	4	Выступление на семинаре; Отчет по практической работе; Устный ответ на практическом занятии	Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе	ОПК-8.1, ОПК-8.2
2.3 Бинарные алгебраические операции		8		14/5И	4	Выступление на семинаре; Отчет по практической работе; Устный ответ на практическом занятии	Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе	ОПК-8.1, ОПК-8.2
2.4 Количественная теория множества целых неотрицательных чисел		10		14/6И	4,1	Выступление на семинаре; Отчет по практической работе; Устный ответ на практическом занятии	Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе	ОПК-8.1, ОПК-8.2
Итого по разделу	36			54/22И	16,1			
Итого за семестр	36			54/22И	16,1		зао	
3. Раздел III. Аксиоматическая теория целых неотрицательных чисел								
3.1 Аксиоматический метод в математике	4	10		10/4И	2	Выступление на семинаре; Отчет по практической работе; Устный ответ на практическом занятии	Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе	ОПК-8.1, ОПК-8.2
3.2 Основные понятия и отношения аксиоматической теории натурального числа		12		10/4И	2,3	Выступление на семинаре; Отчет по практической работе; Устный ответ на практическом занятии	Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе	ОПК-8.1, ОПК-8.2
3.3 Целое неотрицательное число		10		12/4И	2	Выступление на семинаре; Отчет по практической работе; Устный ответ на практическом занятии	Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе	ОПК-8.1, ОПК-8.2
Итого по разделу	32			32/12И	6,3			
Итого за семестр	32			32/12И	6,3		зао	
4. Раздел IV. Теория чисел как основа вычислительных действий								

4.1 Системы счисления	5	8		18/7И	8	Выступление на семинаре; Отчет по практической работе; Устный ответ на практическом занятии	Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе	ОПК-8.1, ОПК-8.2	
4.2 Теория делимости натуральных чисел		10		18/7И	9	Выступление на семинаре; Отчет по практической работе; Устный ответ на практическом занятии	Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе	ОПК-8.1, ОПК-8.2	
Итого по разделу		18		36/14И	17				
Итого за семестр		18		36/14И	17		зао		
5. Раздел V. Рациональные и действительные числа									
5.1 Положительные рациональные числа	6	12		12/6И	10	Выступление на семинаре; Отчет по практической работе; Устный ответ на практическом занятии	Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе	ОПК-8.1, ОПК-8.2	
5.2 Положительные действительные числа		12		12/4И	10	Выступление на семинаре; Отчет по практической работе; Устный ответ на практическом занятии	Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе	ОПК-8.1, ОПК-8.2	
5.3 Действительные числа		12		12/4И	14,1	Выступление на семинаре; Отчет по практической работе; Устный ответ на практическом занятии	Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе	ОПК-8.1, ОПК-8.2	
Итого по разделу		36		36/14И	34,1				
Итого за семестр		36		36/14И	34,1		зао		
6. Раздел VI. Уравнения, неравенства, функции									
6.1 Числовые равенства и неравенства	7	6		12/4И	18	Выступление на семинаре; Отчет по практической работе; Устный ответ на практическом занятии	Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе		
6.2 Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе		6		12/6И	18	Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе	Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе		

6.3 Функции	6	12/4И	17	Выступление на семинаре; Отчет по практической работе; Устный ответ на практическом занятии	Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе	
Итого по разделу	18	36/14И	53			
Итого за семестр	18	36/14И	53		зао	
7. Раздел VII. Текстовые задачи и их решение						
7.1 Решение текстовых задач арифметическим и алгебраическим способом	8	6	4/5И	5	Выступление на семинаре; Отчет по практической работе; Устный ответ на практическом занятии	Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе
7.2 Задачи на уравнение		6	4/2И	4	Выступление на семинаре; Отчет по практической работе; Устный ответ на практическом занятии	Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе
7.3 Задачи на части		4	4/1И	4	Выступление на семинаре; Отчет по практической работе; Устный ответ на практическом занятии	Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе
7.4 Задачи на работу		4	6/2И	4,5	Выступление на семинаре; Отчет по практической работе; Устный ответ на практическом занятии	Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе
7.5 Задачи на проценты		4	6	3,3	Выступление на семинаре; Отчет по практической работе; Устный ответ на практическом занятии	Устный ответ на практическом занятии, семинаре, отчет по практической работе
Итого по разделу	24	24/10И	20,8			
Итого за семестр	24	24/10И	20,8		экзамен	
Итого по дисциплине	181	252/10 ОИ	165,45		экзамен, зачет с оценкой	

## **5 Образовательные технологии**

Использование в учебном процессе:

- активных и интерактивных форм проведения занятий (компьютерных симуляций, деловых и ролевых игр, разбор конкретных ситуаций, психологические и иные тренинги) в сочетании с внеаудиторной работой;
- специальных методов, развивающих у студентов навыков командной работы, межличностной коммуникации, принятия решений, лидерских качеств (включая проведение фрагментов уроков по темам начальной школы, а также интерактивных практических занятий, групповых дискуссий, ролевых игр, тренингов, анализ возможных педагогических ситуаций в начальной школе);
- игровых технологий, в основе которых лежит организация образовательного процесса, основанная на реконструкции моделей поведения в рамках предложенных сценарных условий (учебная игра – форма воссоздания предметного и социального содержания будущей профессиональной деятельности специалиста, моделирования таких систем отношений, которые характерны для этой деятельности как целого; деловая игра – моделирование различных ситуаций, связанных с выработкой и принятием совместных решений, обсуждением вопросов в режиме «мозгового штурма», реконструкцией функционального взаимодействия в коллективе и т.п.; ролевая игра – имитация или реконструкция моделей ролевого поведения в предложенных сценарных условиях);
- лекций-визуализаций, при которых изложение содержания теоретического материала сопровождается презентацией (демонстрацией учебных материалов, представленных в различных знаковых системах, в т.ч. иллюстративных, графических, аудио- и видеоматериалов);
- практических занятий в форме презентации, в процессе которых осуществляется представление результатов проектной или исследовательской деятельности с использованием специализированных программных сред;
- компьютерных обучающих программ, включающих в себя электронные учебники, тестовые системы; обучающих систем на базе мультимедиа-технологий, построенные с использованием персональных компьютеров, видеотехники, накопителей на оптических дисках; распределенных баз данных по отраслям знаний;
- средств телекоммуникации, включающих в себя электронную почту, телеконференции, локальные и региональные сети связи, сети обмена данными и т.д.
- электронных библиотек, распределенных и централизованных издательских систем.

## **6 Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Представлено в приложении 1.

## **7 Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации**

Представлены в приложении 2.

## **8 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)**

### **а) Основная литература:**

1. Жигарева, Э. Р. Математика : учебное пособие / Э. Р. Жигарева ; МГТУ. - [2-е изд., испр. и доп.]. - Магнитогорск : МГТУ, 2015. - 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). - URL: <https://magtu.informsistema.ru/uploader/fileUpload?name=1416.pdf&show=dcatalogues/1/1123931/>

2. Дубровский, В. В. Математика. Введение в математический анализ : учебно-методический комплекс / В. В. Дубровский, Ю. А. Извеков, А. А. Родчиков. - Магнитогорск : МГТУ, 2013. - 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). - URL:

<https://magtu.informsistema.ru/uploader/fileUpload?name=934.pdf&show=dcatalogues/1/1118952/934.pdf&view=true> (дата обращения: 04.10.2019). - Макрообъект. - Текст : электронный.

**б) Дополнительная литература:**

1. Жигарева, Э. Р. Математика : учебное пособие / Э. Р. Жигарева ; МГТУ. - [2-е изд., испр. и доп.]. - Магнитогорск : МГТУ, 2015. - 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). - URL: <https://magtu.informsistema.ru/uploader/fileUpload?name=1416.pdf&show=dcatalogues/1/1123931/>

2. Дубровский, В. В. Математика. Введение в математический анализ : учебно-методический комплекс / В. В. Дубровский, Ю. А. Извеков, А. А. Родчиков. - Магнитогорск : МГТУ, 2013. - 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). - URL:

<https://magtu.informsistema.ru/uploader/fileUpload?name=934.pdf&show=dcatalogues/1/1118952/934.pdf&view=true> (дата обращения: 04.10.2019). - Макрообъект. - Текст : электронный.

**в) Методические указания:**

Самостоятельная работа студентов вуза : практикум / составители: Т. Г. Неретина, Н. Р. Уразаева, Е. М. Разумова, Т. Ф. Орехова ; Магнитогорский гос. технический ун-т им. Г. И. Носова. - Магнитогорск : МГТУ им. Г. И. Носова, 2019. - 1 CD-ROM. - Загл. с титул. экрана. - URL: <https://magtu.informsistema.ru/uploader/fileUpload?name=3816.pdf&show=dcatalogues/1/1530261/3816.pdf&view=true> (дата обращения: 18.10.2019). - Макрообъект. - Текст : электронный. - Сведения доступны также на CD-ROM.

**г) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:**

**Программное обеспечение**

Наименование ПО	№ договора	Срок действия лицензии
MS Windows 7 Professional(для классов)	Д-1227-18 от 08.10.2018	11.10.2021
MS Office 2007 Professional	№ 135 от 17.09.2007	бессрочно
7Zip	свободно распространяемое	бессрочно

**Профессиональные базы данных и информационные справочные системы**

Название курса	Ссылка
Национальная информационно-аналитическая система – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ)	URL: <a href="https://elibrary.ru/project_risc.asp">https://elibrary.ru/project_risc.asp</a>
Поисковая система Академия Google (Google Scholar)	URL: <a href="https://scholar.google.ru/">https://scholar.google.ru/</a>

Электронные ресурсы библиотеки МГТУ им. Г.И. Носова	<a href="http://magtu.ru:8085/marcweb2/Default.asp">http://magtu.ru:8085/marcweb2/Default.asp</a>
Информационная система - Единое окно доступа к информационным ресурсам	URL: <a href="http://window.edu.ru/">http://window.edu.ru/</a>

## **9 Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Материально-техническое обеспечение дисциплины включает:

Материально-техническое обеспечение дисциплины включает:

Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа (доска, мультимедийные средства хранения, передачи и представления информации)

Учебные аудитории для проведения практических занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации (учебные аудитории для проведения практических занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации)

Помещения для самостоятельной работы обучающихся (персональные компьютеры с пакетом MS Office, выходом в Интернет и с доступом в электронную информационно-образовательную среду университета)

Помещение для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования (стеллажи для хранения учебно-наглядных пособий и учебно-методической документации)

## **Приложение 1**

**Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся»**

### **Методические рекомендации к самостоятельной работе студентов**

Самостоятельная работа как вид учебного труда выполняется студентами без непосредственного участия преподавателя, но организуется и управляется им.

Самостоятельная работа студентов – будущих учителей начальных классов осуществляется в соответствии с объемом и структурой, предусмотренными учебными планами и графиками текущего контроля. Самостоятельная работа студентов предполагает выполнение следующих видов работ: конспектирование, реферирование научной литературы, решение тестовых заданий, подготовка к семинарским и практическим занятиям, выполнение практических работ и др.

Изучение и анализ литературных источников является обязательным видом самостоятельной работы студентов. Изучение литературы по избранной теме имеет своей задачей проследить характер постановки и решения определенной проблемы различными авторами, аргументацию их выводов и обобщений, провести анализ и систематизировать полученный материал на основе собственного осмысления с целью выяснения современного состояния вопроса. На основании данного рода работ студенты готовят

### **Примерные практические задания**

### Задания практической работы

Простые задачи, (разработать конспект урока)

Простые задачи на умножение и деление.

Составные задачи. Переход от решения простых задач к решению составных. (основные этапы работы).

Задачи с пропорциональными величинами. (составление конспекта урока)

Задачи с пропорциональными величинами. Методика работы над задачами на пропорциональное деление. , (разработать конспект урока)

Задачи с пропорциональными величинами. Методика работы над задачами на нахождение неизвестного по двум разностям. , (разработать конспект урока)

Задачи на движение. Методика работы над ними. , (разработать конспект урока)

Общие вопросы изучения величин. Методика изучения массы; ознакомление, способы измерения, единицы измерения, их соотношения, преобразования, действия над величинами. , (разработать конспект урока)

Общие вопросы изучения величин. Методика изучения длины; ознакомление, способы измерения, единицы измерения, их соотношения, преобразования, действия над величинами. , (разработать конспект урока)

Общие вопросы изучения величин. Методика изучения времени; ознакомление, способы измерения, единицы измерения, их соотношения, преобразования, действия над величинами. , (разработать конспект урока)

Общие вопросы изучения геометрического материала. Методика изучения раздела «Площадь многоугольника». , (разработать конспект урока)

Общие вопросы изучения геометрического материала. Методика ознакомления с геометрическими фигурами: точка, линия (прямая, кривая, ломанная), отрезок, звено ломаной, многоугольник. , (разработать конспект урока)

Общие вопросы изучения геометрического материала. Методика ознакомления с геометрическими фигурами: прямой угол, прямоугольник, квадрат, периметр прямоугольника, свойства диагоналей прямоугольника и квадрата. , (разработать конспект урока)

Методика ознакомления младших школьников с долями и дробями. Решение задач на нахождение доли числа и числа по доле. , (разработать конспект урока)

## АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ (практическое задание)

## Аксиоматический метод в математике. Основные понятия и отношения аксиоматической теории натурального числа.

Пример 1. Несколько школьников решили организовать шахматный турнир по упрощенной схеме: каждый должен сыграть ровно четыре партии с кем-либо из остальных участников (белыми или черными фигурами –по жребию). Чтобы составить расписание турнира, нужно сформулировать требования, которые ученики предъявили к турниру, в виде аксиом. Для этого потребовалось ввести три первоначальных (неопределяемых) понятия: «игрок», «партия», «участие игрока в партии».

Аксиом получилось четыре:

Аксиома 1. Число игроков нечетно.

Аксиома 2. Каждый игрок участвует в четырех партиях.

Аксиома 3. В каждой партии участвуют два игрока.

Аксиома 4. Для каждого из двух игроков имеется не более одной партии, в которой они оба участвуют.

Из этих аксиом можно вывести ряд теорем.

Теорема 1. Число игроков не меньше пяти.

Доказательство. Так как нуль- четное число, то по аксиоме 1 число игроков не равно нулю, т.е. существует хотя бы один игрок А. Этот игрок в силу аксиомы 2 участвует в четырех партиях, причем в каждой из этих партий, кроме А, участвует еще один игрок (аксиома 3). Пусть В,С,Д,Е - игроки, отличные от А, которые участвуют в этих партиях. По аксиоме 4 все игроки В,С,Д,Е различны (если бы, например, было  $B=C$ , то оказалось бы, что имеются две партии, в которых участвуют игрок А и игрок  $B=C$ ). Итак, мы нашли уже пятерых игроков: А,В,С,Д,Е. Но тогда по аксиоме 1 число игроков не меньше пяти.

Теорема 2. Число всех выступлений игроков четно.

q- некоторая партия, введем новое понятие -  $(q, A)$ - выступление игрока.

Доказательство. Каждая партия дает два выступления игроков  $(q, A), (q, B)$ , (по аксиоме 3), число всех выступлений  $2n$ , где  $n$  число игроков (А 4). Следовательно, число всех выступлений игроков кратно 2, т.е. четно.

Теорема 3. Число выигрышер в турнире не превышает число игроков.

Доказательство. Пусть  $n$  - число игроков, тогда  $2n$  - число выступлений игроков (A),  $n$  - число сыгранных партий (A3). Рассмотрим два случая:

Во всех партиях были победитель и проигравший. Тогда число выигравшей будет равно числу партий, т.е.  $n$ .

Некоторые партии закончились вничью, пусть таких партий будет  $k$ . Тогда в оставшихся  $n - k$  партиях был выявлен победитель, т.е. число выигравшей не превышает число партий. Теорема доказана.

### Пример 2.

Определить выполнение аксиом в представленных на рисунках 1-4 множествах.

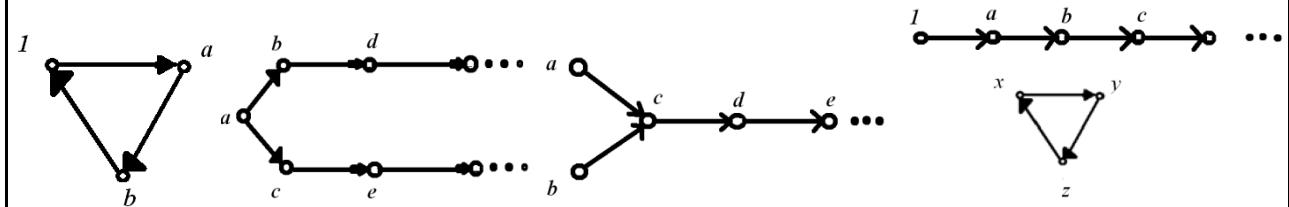


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

Решение.

На рисунке 1 изображено множество, в котором выполняются аксиомы 2 и 3, но не выполнена аксиома 1 (аксиома 4 не имеет здесь смысла, так как в множестве нет элемента, непосредственно не следующего ни за каким другим); на рисунке 2 показано множество, в котором выполнены аксиомы 1, 3 и 4, но за элементом  $a$  непосредственно следуют два элемента, а не один, как требуется в аксиоме 2; на рисунке 3 изображено множество, в котором выполнены аксиомы 1, 2 и 4, но элемент с непосредственно следует как за элементом  $a$ , так и за элементом  $b$  на рисунке 4 изображено множество, в котором выполнены аксиомы 1, 2, 3, но не выполняется аксиома 4 – множество точек, лежащих на луче, содержит 1 и вместе с каждым числом оно содержит непосредственно следующее за ним число, но оно не совпадает со всем множеством точек, показанных на рисунке.

Пример 3.

Доказать, что для любого натурального числа истинно равенство  $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + p(3p + 1) = p(p+1)^2$ .

Решение. При  $p=1$  данное утверждение истинно: в части равенства имеем:  $1 \cdot 4 = 4$ , в правой:  $1 \cdot (1 + 1)^2 = 4$ .

Докажем теперь, что если данное утверждение истинно при  $p = k$ , т. е.

$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + k(3k + 1) = k(k + 1)^2$ , то оно истинно и при  $p = k+1$ , т. е.

$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + k(3k + 1) + (k+1)(3k + 4) = (k+1)(k + 2)^2$ .

В выражении  $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + k(3k + 1) + (k+1)(3k + 4)$  сумма первых  $k$  слагаемых по предположению равна  $k(k + 1)^2$ , что дает возможность привести данное выражение к виду:  $k(k+1)^2 + (k+1)(3k+4)$ . Дальнейшие преобразования полученного выражения приводят к следующему:  $k(k+1)^2 + (k+1)(3k+4) = (k+1)[k(k+1) + (3k+4)] = (k+1)(k^2 + 4k + 4) = (k+1)(k + 2)^2$ .

Таким образом,  $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + (k+1)(3k + 4) = (k+1)(k + 2)^2$ , что и требовалось доказать. На основании доказанного заключаем, что данное утверждение истинно для любого натурального числа  $p$ .

Пример 4.

Доказать  $\frac{1+2+3+\dots+k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$

Решение.

При  $p=1$  данное утверждение истинно:  $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$ .

Докажем теперь, что если данное утверждение истинно при  $p = k$ , т. е.

$\frac{1+2+3+\dots+k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$  то оно истинно и при  $p = k+1$ , т. е.

$\frac{1+2+3+\dots+k+k+1}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ .

В выражении  $\frac{1+2+3+\dots+k+k+1}{2}$  сумма первых  $k$  слагаемых по предположению равна  $\frac{k(k+1)}{2}$ ,

что дает возможность привести данное выражение к виду:  $\frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$ . Дальнейшие преобразования полученного выражения приводят к следующему:



Таким образом,



что и

требовалось доказать. На основании доказанного заключаем, что данное утверждение истинно для любого натурального числа  $n$ .

Пример 5. Докажем, что  $(a, b \in \mathbb{N}) a+b \neq b$ .

Решение. Пусть  $a$  – произвольное натуральное число, а  $M$  – множество тех и только тех чисел  $b$ , для которых данное утверждение истинно. Тогда 1 принадлежит множеству  $M$ , так как  $a+1 \neq 1$  – истинное неравенство. Если число  $b$  принадлежит  $M$ , т.е.  $a+b \neq b$ , то и  $b'$  принадлежит  $M$ , т.е.  $a+b' \neq b'$ .

Действительно по второму свойству сложения  $a+b = a+b'$ , но  $a+b \neq b$ , значит,  $a+b' \neq b'$ . По аксиоме 4 множества  $M$  и  $N$  совпадают, следовательно, для любых натуральных чисел  $a$  и  $b$  верно утверждение  $a+b \neq b$ .

Пример 6.

Примените законы сложения, умножения и вычислите результат; каждый случай использования законов объясните:

a)  $7091+(1819+509)$

$7091+(1819+509)=7091+(509+1819)=$	коммутативный закон сложения натуральных чисел
$=(7091+509)+1819=7600+1819=9419$	ассоциативный закон сложения натуральных чисел

b)  $(372*4)*5$

$(372*4)*5=372*(4*5)=372*20=744$	ассоциативный закон умножения натуральных чисел
----------------------------------	--

Пример 7.

Запишите дистрибутивный закон умножения относительно сложения для натуральных чисел и, используя его, вычислите значение выражения:

a)  $49*14+11*49+25*51$

$49*14+11*49+25*51=$	
$=49*(14+11)+25*51=$	левый дистрибутивный закон умножения относительно сложения
$=49*25+25*51=$	
$=25*(49+51)=25*100=2500$	левый дистрибутивный закон умножения относительно сложения

### Контрольная работа

#### Тема «Аксиоматическая теория целых неотрицательных чисел»

- Проверьте выполнимость аксиом Пеано для множества  $5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots$
- Докажите, используя метод математической индукции, что для любого натурального числа  $n$  истинно равенство:  $1+2+2^2+\dots+2^n=2^n-1$

3. Примените законы сложения, умножения и вычислите результат; каждый случай использования законов объясните:
- $(9073+1329)+2671$ ;
  - $125*15*6*8$ .
4. Запишите дистрибутивный закон умножения относительно сложения для натуральных чисел и, используя его, вычислите значение выражения:
- $57*247+57*362$ ;
  - $37*42+37*36-78*27$ .
5. В драматическом кружке занимаются 6 учеников, в кружке художественного чтения 4 ученика. Сколько всего учеников занимается в этих двух кружках? Рассмотрите все возможные случаи.
6. Пользуясь коммутативным законом сложения, напишите выражения, равные данному:
- $37+5$ ;
  - $(8+16)+9$ ;
  - $(a+b)+c$ .
7. Применяя ассоциативный закон сложения, замените каждую сумму равной:
- $(2873+45\ 681)+34319$ ;
  - $57\ 867+(22\ 133+799\ 495)$ .
8. Укажите закон сложения, на котором основано вычисление суммы:
- $$9 + 6 = 9 + (1 + 5) = (9 + 1) + 5 = 10 + 5 = 15.$$
9. Решите уравнения:
- $x+17=28$ ;
  - $37+a=1000$ .
10. Вычислите наиболее рациональным способом:
- $(5768+929) - 668$ ;
  - $(48\ 573+1427) - 562$ .
11. Вычислите разность различными способами:
- $3856 - (856+391)$  в)  $(3050 - 2491) + 27$
  - $7921 - (14574 + 921)$  г)  $(7901 - 137) + 506$
- Какой из этих способов для каждого примера наиболее удобен?
12. Найдите значение выражения различными способами:
- $5786 - (356 - 214)$
  - $3094 - (752 - 205)$
13. Запишите в виде произведения сумму:
- $1283+1283+1283+1283$
14. Пользуясь коммутативным законом умножения и сложения, напишите выражения, равные  $a*(b - c)$ .
15. Объясните решение:
- $$935*1001=935*(1000+1)=935000+935=935935$$
- Сформулируйте правило умножения числа на 1001.
16. Примените дистрибутивный закон умножения:
- $(m - 7)*8$
  - $(8 - a)*25$
  - $7*(b - 20)$
  - $a - (k - 11)$

17. Используя определение деления и связь деления с умножением решите уравнение:

- а)  $7 * x * 5 = 175$
- в)  $5 * 4 * 2 = 1600$
- г)  $4 * x * 11 = 880$
- р)  $14 * x * 3 * 2 = 84$

18. Найдите двумя способами значение выражения:

- а)  $(670+134) : 67$     в)  $(375+2025) : 25$
- б)  $(7575-75) : 75$     г)  $(210-21) : 21$

19. Вычислите частное:

- а)  $188\ 366 : 38$     в)  $185\ 724 : 99$
- б)  $91\ 563 : 23$     г)  $411\ 431 : 83$

### Контрольная работа

Тема «Системы счисления»

1. Задание для всех вариантов:

- 1) Какие числа записаны римскими цифрами:  
а) MCMXCIX; б) CMLXXXVIII; в) MCXLVII?
- 2) Запишите год, месяц и число своего рождения с помощью римских цифр.

2. Выбрать вариант задания согласно начальной букве вашей фамилии.

Номер варианта	Начальная буква фамилии
1	А, Б, В, Г, Д, Е, Ж
2	З, И, К, Л, М, Н, О
3	П, Р, С, Т, У, Ф, Х
4	Ц, Ч, Щ, Ь, Э, Ю, Я

#### Вариант 1

1. Переведите числа из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления.

а) 949;

б) 763;

в) 994,125;

г) 523,25;

д) 203,82.

2. Переведите числа в десятичную систему счисления.

а)  $111000111_2$ ;

б)  $100011011_2$ ;

в)  $1001100101,1001_2$ ;

г)  $1001001,011_2$ ;

д)  $335,7_8$ ;

е)  $14C, A_{16}$ .

3. Выполните сложение чисел.

а)  $1110101010_2 + 10111001_2$ ;

б)  $10111010_2 + 10010100_2$ ;

в)  $111101110,1011_2 + 1111011110,1_2$ ;

г)  $1153,2_8 + 1147,32_8$ ;

д)  $40F,4_{16} + 160,4_{16}$ .

4. Выполните вычитание чисел.

а)  $1000000100_2 - 101010001_2$ ;

б)  $1010111101_2 - 111000010_2$ ;

в)  $1101000000,01_2$ - $1001011010,011_2$ ;

г)  $2023,5_8$ - $527,4_8$ ;

д)  $25E,6_{16}$ - $1B1,5_{16}$ .

5. Выполните умножение чисел.

а)  $1001011_2$ \* $1010110_2$ ;

б)  $1650,2_8$ \* $120,2_8$ ;

в)  $19,4_{16}$ \* $2F,8_{16}$ .

## Вариант 2

1. Переведите числа из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления.

а) 563;

б) 264;

в) 234,25;

г) 53,125;

д) 286,16.

2. Переведите числа в десятичную систему счисления.

а)  $1100010010_2$ ;

б)  $10011011_2$ ;

в)  $1111000001,01_2$ ;

г)  $10110111,01_2$ ;

д)  $416,1_8$ ;

е)  $215,7_{16}$ .

3. Выполните сложение чисел.

- а)  $10111111_2 + 110010000_2$ ;
- б)  $110010100_2 + 1011100001_2$ ;
- в)  $1000000101,0101_2 + 1010000110,01_2$ ;
- г)  $1512,4_8 + 1015,2_8$ ;
- д)  $274,5_{16} + DD,4_{16}$ .

4. Выполните вычитание чисел.

- а)  $1000001001_2 - 111110100_2$ ;
- б)  $1111000101_2 - 1100110101_2$ ;
- в)  $1100110101,1_2 - 1011100011,01_2$ ;
- г)  $1501,34_8 - 1374,5_8$ ;
- д)  $12D,3_{16} - 39,6_{16}$ .

5. Выполните умножение чисел.

- а)  $111101_2 * 1010111_2$ ;
- б)  $1252,14_8 * 76,04_8$ ;
- в)  $66,68_{16} * 1E,3_{16}$ .

### Вариант 3

1. Переведите числа из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления.

- а) 279;
- б) 281;
- в) 841,375;

г) 800,3125;

д) 208,92.

2. Переведите числа в десятичную систему счисления.

а) 1100111001<sub>2</sub>;

б) 10011101<sub>2</sub>;

в) 1111011,001<sub>2</sub>;

г) 110000101,01<sub>2</sub>;

д) 1601,56<sub>8</sub>;

е) 16E,B4<sub>16</sub>.

3. Выполните сложение чисел.

а) 1000100001<sub>2</sub>+1011100110<sub>2</sub>;

б) 1101110011<sub>2</sub>+111000101<sub>2</sub>;

в) 1011011,01<sub>2</sub>+1000101110,1001<sub>2</sub>;

г) 665,1<sub>8</sub>+1217,2<sub>8</sub>;

д) 30C,7<sub>16</sub>+2A1,8<sub>16</sub>.

4. Выполните вычитание чисел.

а) 11110010<sub>2</sub>-10101001<sub>2</sub>;

б) 1110100001<sub>2</sub>-1011001001<sub>2</sub>;

в) 1101001010,1<sub>2</sub>-1011101001,11011<sub>2</sub>;

г) 166,14<sub>8</sub>-143,2<sub>8</sub>;

д) 287,A<sub>16</sub>-62,8<sub>16</sub>.

5. Выполните умножение чисел.

а)  $1001001_2 * 100010_2$ ;

б)  $324,2_8 * 122,12_8$ ;

в)  $F,4_{16} * 38,6_{16}$ .

#### Вариант 4

1. Переведите числа из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления.

а) 737;

б) 92;

в) 934,25;

г) 413,5625;

д) 100,94.

2. Переведите числа в десятичную систему счисления.

а)  $1110000010_2$ ;

б)  $1000100_2$ ;

в)  $110000100,001_2$ ;

г)  $1001011111,00011_2$ ;

д)  $665,42_8$ ;

е)  $246,18_{16}$ .

3. Выполните сложение чисел.

а)  $11110100_2 + 110100001_2$ ;

б)  $1101110_2 + 101001000_2$ ;

в)  $1100110011,1_2 + 111000011,101_2$ ;

г)  $1455,04_8 + 203,3_8$ ;

д)  $14E,8_{16} + 184,3_{16}$ .

4. Выполните вычитание чисел.

а)  $1000010101_2 - 100101000_2$ ;

б)  $1001011011_2 - 101001110_2$ ;

в)  $111111011,101_2 - 100000010,01_2$ ;

г)  $341,2_8 - 275,2_8$ ;

д)  $249,5_{16} - EE, A_{16}$ .

5. Выполните умножение чисел.

а)  $1001000_2 * 1010011_2$ ;

б)  $412,5_8 * 13,1_8$ ;

в)  $3B, A_{16} * 10,4_{16}$ .

## **Практическое занятие по разделу «Множества. Математические утверждения и их структура»**

### **Тема 1. Множества и операции над ними**

#### **Множество. Элемент множества. Способы задания множества. Числовые множества**

Пример 1.

1. Запишите множество  $A$ , элементами которого являются целые числа большие  $-3$  и меньшие  $2$ , используя символические записи характеристического свойства и перечисления элементов множества. Верно, ли, что: а)  $2 \in A$ ; б)  $0 \in A$ ; в)  $-3 \notin A$ ?

Решение:

1. Зададим множество  $A$ , перечислением всех его элементов:

$$A = \{-2, -1, 0, 1\}.$$

2. Зададим множество  $A$ , описанием характеристических свойств его элементов:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ и } -3 < x < 2\}.$$

3.  $2 \in A$  – ложь,  $0 \in A$  – истина,  $-3 \notin A$  – истина.

#### **Равные множества. Подмножества. Графическая иллюстрация множеств. Диаграммы Эйлера-Венна.**

Пример 2.

Составьте цепочки включений, так чтобы каждое следующее множество содержало предыдущее. Изобразите результат при помощи кругов Эйлера-Венна.

А - множество равнобедренных треугольников,

В - множество всех треугольников,

С - множество равносторонних треугольников.

Решение:

Так как любой равносторонний треугольник является равнобедренным, делаем вывод, что любой элемент множества С обладает характеристическим свойством множества А, следовательно, по определению С  $\subseteq$  А.

По аналогии любой элемент множества А обладает характеристическим свойством

множества  $B$ , следовательно, по определению  $A \subseteq B$ .

Таким образом получаем (рис. 1):  $C \subseteq A \subseteq B$ .

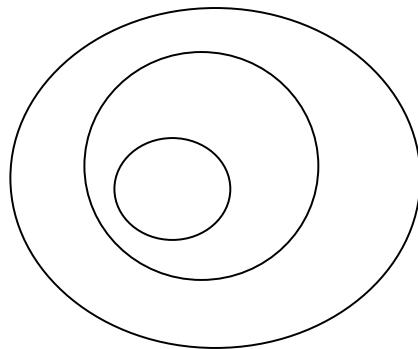


Рис. 1 Цепочка включений  $C \subseteq A \subseteq B$ .

#### Пересечение множеств. Объединение множеств

Пример 3.

Найдите пересечение и объединение множества  $A=\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  и множества  $B$ , если:

- a)  $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ;
- б)  $B = \{3, 5, 7\}$ ;
- в)  $B = \{0, 1, 8, 9\}$ ;
- г)  $B = \emptyset$ ;
- д)  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

Для каждого случая сделайте рисунок.

Решение:

- a) Для того, чтобы найти пересечение множеств, по определению следует выявить те элементы, которые одновременно принадлежат множеству  $A$  и множеству  $B$ .

Таким образом,  $A \cap B = \{2, 3, 4\}$  (рис. 6).

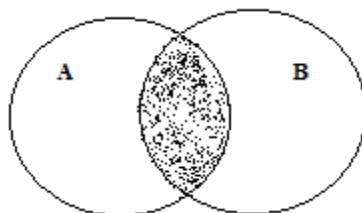


Рис. 6 Пересечение множеств  $A \cap B$ .

Для того, чтобы найти объединение множеств, по определению следует выбрать все элементы, которые принадлежат множеству A, или множеству B (рис. 7):

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, 1\}.$$

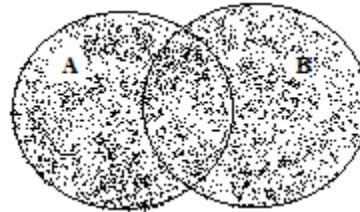


Рис. 7 Объединение множеств A ∪ B.

б)  $A \cap B = \{3, 5, 7\}$ , т. е.  $A \cap B = B$ , следовательно,  $B \subseteq A$  (рис. 8).

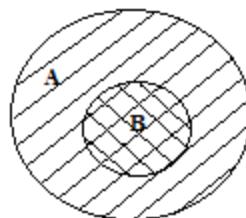


Рис. 8  $A \cap B = B$ ,  $B \subseteq A$

$A \cap B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , т. е.  $A \cap B = A$ . (рис. 9)

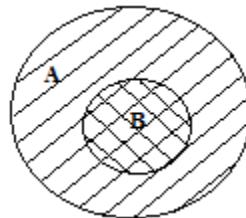


Рис. 9  $A \cap B = A$

в)  $A \cap B = \emptyset$ , т.к. нет элементов которые одновременно принадлежали бы множеству A и B (рис. 10).

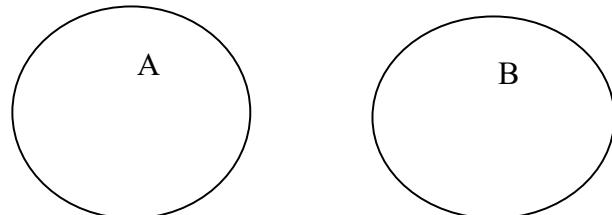


Рис. 10  $A \cap B = \emptyset$

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, 1, 8, 9\}$  (рис. 11).

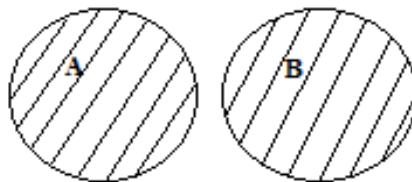


Рис. 11 A - B

г)  $A - B = \text{ } ;$

$A - B = A$  (рис. 12).

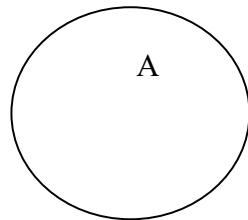


Рис. 12  $A - B = \text{ } ; A - B = A.$

д)  $A - B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , т.е.  $A - B = A$ , следовательно,  $A - B = A$  (рис.13).

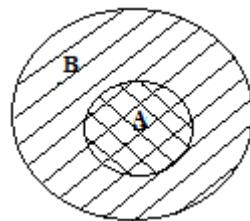


Рис. 13  $A - B = A.$

$A - B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , т.е.  $A - B = B$ , следовательно,  $A - B = B$  . (рис. 14)

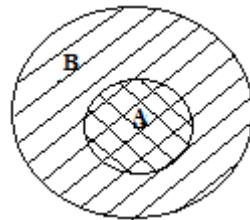


Рис. 14  $A - B = A.$

Дополнение к множеству. Разность множеств. Универсальное множество.

Пример 4.

1. Найдите разность множества  $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$  и множества  $B$ , если:

а)  $B = \{6, 8, 10, 11, 12, 13\};$

б)  $B = \{2, 6, 10\};$

в)  $B = \{6, 2, 8, 10, 4\};$

г)  $B = \{1, 3, 5\};$

д)  $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\};$

е)  $B = \text{ } .$

Для каждого случая представте рисунок.

Решение:

Для того, чтобы найти разность множеств  $A$  и  $B$ , по определению следует выбрать все элементы, принадлежащие множеству  $A$  и не принадлежащие множеству  $B$ .

a)  $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ,  $B = \{6, 8, 10, 11, 12, 13\}$ ;

$$A \setminus B = \{2, 4\}.$$

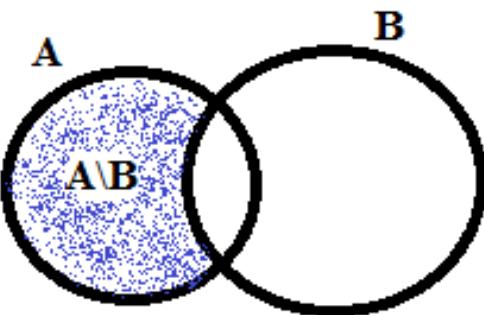


Рис. 20 Разность двух множеств  $A \setminus B$

б)  $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ,  $B = \{2, 6, 10\}$ ;

$$A \setminus B = \{4, 8\}.$$

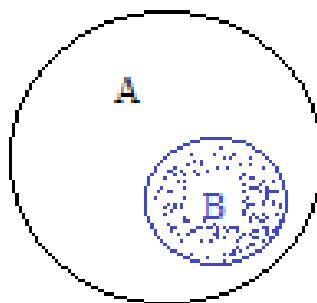


Рис. 21 Разность двух множеств  $A \setminus B = B'$ .

В этом примере множество  $B$  является подмножеством множества  $A$  и разности между множеством  $A$  и множеством  $B$  такого рода в математике уделяют особое внимание, называя ее дополнением ко множеству  $B$  до множества  $A$ , т.е.  $A \setminus B = B'$ .

в)  $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ,  $B = \{6, 2, 8, 10, 4\}$ .

В данном примере множество  $A$  равно множеству  $B$ , следовательно,  $A \setminus B = \emptyset$ .

г)  $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ,  $B = \{1, 3, 5\}$ .

В данном примере множество  $A$  и множество  $B$  не имеют общих элементов, следовательно,

$A \setminus B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ , следовательно,  $A \setminus B = A$ .

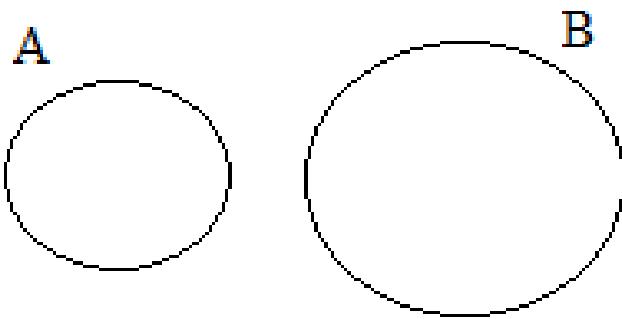


Рис. 22 Разность двух множеств  $A \setminus B = A$ .

д)  $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ .

В данном примере множество  $A$  является подмножеством множества  $B$ , т.е. все элементы множества  $A$  принадлежат множеству  $B$ , следовательно, разность между множествами  $A$  и  $B$  не имеет ни одного элемента, т.е.  $\dots$ .

$A \setminus B = \dots$ .

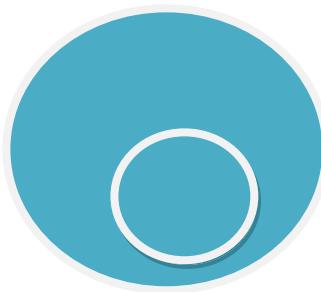


Рис. 23 Разность двух множеств  $A \setminus B = \dots$ .

### Кортеж

Пример 5.

Сколько букв в слове «барабан»? Сколько различных букв в этом слове?

Решение:

Перечислим весь набор букв, входящих в слово «барабан» и подсчитав их получим число 7. Различных букв в этом слове 4.

### Декартово произведение множеств

Пример 6.

Запишите все двузначные числа, цифры десятков которых принадлежат множеству  $A =$

$\{1, 3, 7\}$ , а цифры единиц - множеству  $B=\{0,5\}$ .

Решение:

В записи числа важен порядок цифр, т.е. любое двузначное число составленное нами – это упорядоченная пара элементов 10, 15, 30, 35, 70, 75.

**Бинарные отношения. Количественная теория множества целых неотрицательных чисел**

Тема 4. Соответствия между двумя множествами

Соответствия между двумя множествами. Понятие соответствия. Способы задания соответствий

Пример 1.

Соответствие  $R$  между множествами  $X$  и  $Y$  задано при помощи графа (рис. 1). а) Перечислите пары чисел, принадлежащие графику данного соответствия; б) Постройте график соответствия  $R$  в прямоугольной системе координат; в) Постройте график соответствия  $R^{-1}$ , обратного данному.

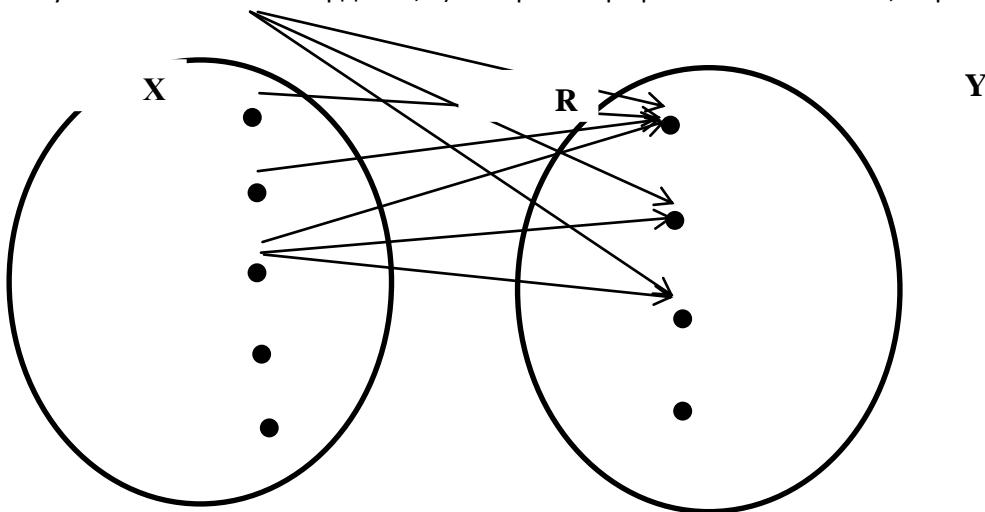


Рис. 1

Решение:

- Каждая пара чисел, принадлежащая графику данного соответствия на графике соединена стрелкой. Поэтому график состоит из пар:  $\{<-1, 0>, <-1, 1>, <-1, 2>, <0, 0>, <1, 0>, <2, 0>, <2, 1>, <2, 2>\}$ .
- Каждую пару чисел, принадлежащую графику соответствия  $R$ , изобразим точкой в прямоугольной системе координат. Множество точек на рисунке 2 есть график соответствия  $R$ .

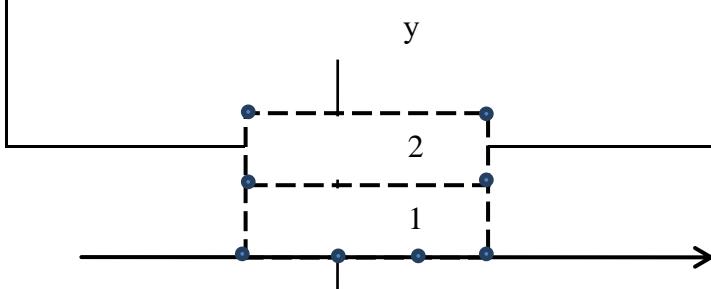


Рис. 2

с. Так как график соответствия  $R^{-1}$  получается из графа соответствия  $R$  изменением направления всех стрелок, то график соответствия  $R^{-1}$  можно получить из графика соответствия  $R$ , поменяв в каждой паре местами абсциссу и ординату:  $R^{-1} = \{<0, -1>, <0, 0>, <0, 1>, <1, 2>, <2, 2>, <1, -1>, <2, -1>, <0, 2>\}$ . В прямоугольной системе координат график соответствия  $R^{-1}$  имеет вид (см. рис. 3).

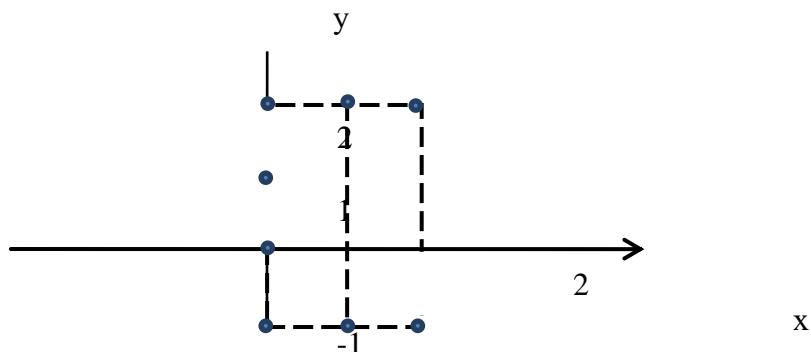


Рис. 3

Пример 2.

Задайте всеми известными способами соответствие между множествами  $X = \{45, 0, 12, 17\}$  и  $Y = \{3, 4, 5, 9\}$  «число  $x$  кратно числу  $y$ ».

Решение:

Поскольку соответствие - это подмножество, то его можно задавать как любое множество, т.е.:

1. При помощи предложения с двумя переменными:  $x \vdash y$  при условии, что  $x \in X, y \in Y$ .
2. перечислив все пары элементов (где первый элемент принадлежит множеству  $X$ , второй - множеству  $Y$ ), находящихся в заданном соответствии:  $\{(45, 3), (45, 5), (45, 9), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 9), (12, 3), (12, 4)\}$ .
3. при помощи графа (рис. 4);

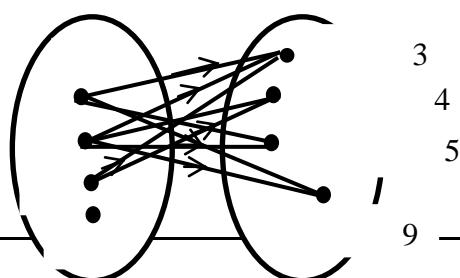


Рис. 4

4. при помощи графика, так как между парами чисел принадлежащих подмножеству декартова произведения  $X \times Y$  и точками плоскости существует взаимно однозначное соответствие (рис. 5).

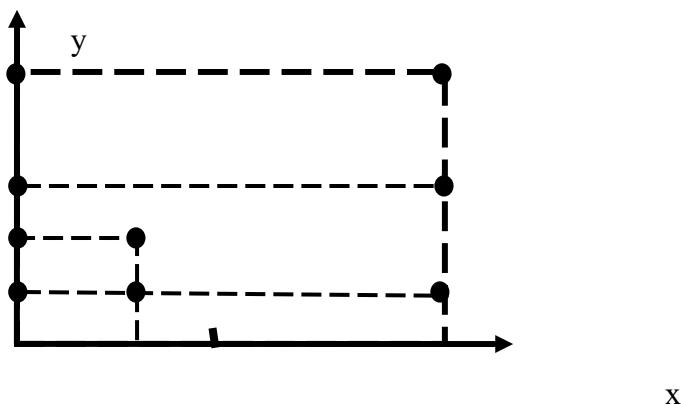


Рис. 5

5. при помощи таблицы.

Таблица 1.

$x$	$y$	3	4	5	9
45					
0					
12					
17					

*Практические задания для самостоятельной работы*

1. Соответствие между множествами  $C=\{1, 2, 3, 4, 5\}$  и  $D=\{5, 6, 7\}$  таково, что его график состоит из пар, в которых первая компонента взята из множества  $C$ , а вторая - из  $D$  и

больше первой компоненты. Постройте график этого соответствия, график этого соответствия в прямоугольной системе координат. Постройте график противоположного соответствия, график противоположного соответствия в прямоугольной системе координат.

### Взаимно однозначные соответствия

Пример 1.

В каждой школе каждому классу соответствует классный журнал. Это соответствие является взаимно однозначным.

Пример 2.

Дан треугольник  $ABC$  (рис. 6).  $A_1C_1$  - средняя линия треугольника. Пусть  $X$  — множество точек на отрезке  $A_1C_1$ ,  $Y$  - множество точек на  $AC$ .

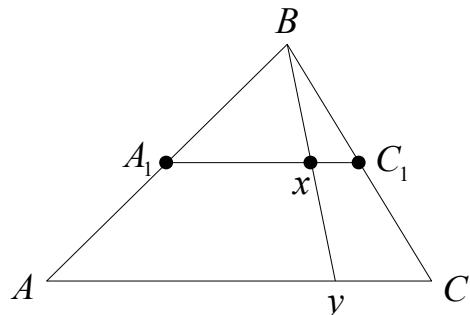


Рис. 6

Произвольную точку  $x$  отрезка  $A_1C_1$  соединим с вершиной  $B$  треугольника отрезком прямой линии и продолжим его до пересечения с  $AC$  в точке  $y$ . Поставим в соответствие точке  $x$  точку  $y$ , построенную таким образом. При этом между множествами  $X$  и  $Y$  будет установлено взаимно однозначное соответствие.

Действительно, нетрудно убедиться в том, что каждой точке отрезка  $A_1C_1$  соответствует одна и только одна точка отрезка  $AC$  и, наоборот, каждая точка отрезка  $AC$  поставлена в соответствие одной и только одной точке отрезка  $A_1C_1$ .

*Практические задания для самостоятельной работы*

1. Задайте при помощи графа три соответствия между множествами  $X=\{a, b, c\}$  и  $Y=\{2, 4, 6\}$  так, чтобы одно из них было взаимно однозначным.

### Тема 5. Бинарные отношения на множестве

#### Понятие отношения на множестве. Свойства отношений

Пример 1.

Выясните какие из следующих отношений обладают свойством рефлексивности, антирефлексивности, не обладает ни тем ни другим свойством .

$R$  – оканчиваться одной и той же цифрой на множестве  $N$ ;

$Q$  – быть ниже ростом на множестве людей;

$T$  – быть делителем на  $X=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

Решение:

Отношение  $R$  обладает свойством рефлексивности, так как любой элемент натурального множества находится в заданном отношении с самим собой, то есть оканчивается одной и той же цифрой.

Отношение  $Q$  обладает свойством антирефлексивности, так как ни один человек из множества людей не находится в заданном отношении с самим собой, то есть ни один человек не может быть ниже себя ростом.

Отношение  $T$  не обладает ни свойством рефлексивности, ни свойством антирефлексивности, так как для одних элементов, например, 1данное отношение выполняется – она является делителем любого элемента из  $X$ , а для других нет – на 0 делить нельзя.

Пример 2.

Выясните какие из следующих отношений обладают свойством симметричности, антисимметричности, не обладает ни тем ни другим свойством .

$R$  – быть меньше на множестве целых чисел  $Z$ ;

$Q$  – быть братом на множестве детей семьи Аня, Миша, Игорь;

$T$  – иметь в записи одинаковое количество цифр на множестве  $N$ .

Решение:

Отношение  $R$  обладает свойством антисимметричности, так как для любых  $x, y \in Z$  выполняется условие:  $xRy \text{ и } x \neq y \Rightarrow \overline{yRx}$ .

Отношение  $Q$  не обладает ни свойством симметричности, ни свойством антисимметричности, так как одни элементы находятся в заданном отношении (если Миша брат Игоря, то Игорь брат Миши), а другие нет (Аня – Миша).

Отношение  $T$  обладает свойством симметричности, так как любые два элемента множества натуральных чисел находятся в заданном отношении если  $x, y \in N$  имеют одинаковое количество цифр в записи, то и  $y, x \in N$  так же имеют одинаковое количество цифр в записи.

Пример 3.

Выясните какие из следующих отношений обладают свойством транзитивности, антитранзитивности, не обладает ни тем ни другим свойством.

$R$  – быть делителем на множестве  $N$ ;

$Q$  – быть больше на 2 на множестве  $Z$ ;

$T$  – быть друзьями на множестве людей.

Решение:

Отношение  $R$  обладает свойством транзитивности, так как для  $\forall x, y, z \in N$  выполняется: если  $x$  является делителем  $y$  и  $y$  является делителем  $z$ , то  $x$  является делителем  $z$ . Например, если 3 делитель 9 и 9 делитель 45, то 3 является делителем 45.

Отношение  $Q$  обладает свойством антитранзитивности, так как для  $\forall x, y, z \in Z$  выполняется: если  $x$  больше  $y$  на 2 и  $y$  больше  $z$  на 2, то не следует, что  $x$  больше  $z$  на 2.

Отношение не обладает ни свойством транзитивности, ни свойством антитранзитивности, так как для некоторых троек людей это отношение выполняется, а для некоторых нет.

Пример 4.

На множестве  $X=\{3, 5, 7, 9\}$  заданы отношения:  $P$  – «меньше»,  $T$  – «меньше на 2»,  $M$  – «меньше или равно». Постройте графы данных отношений и укажите среди них граф:

a) рефлексивного;

- б) транзитивного;  
в) антисимметричного отношения.

Решение:

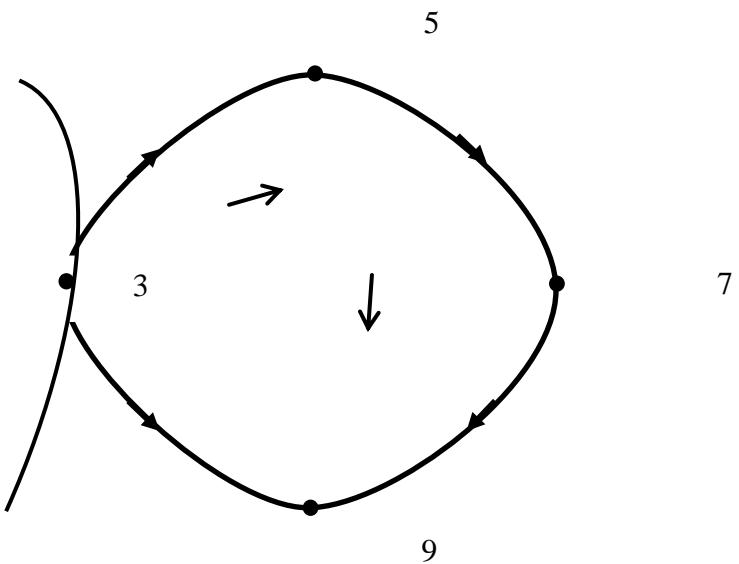


Рис.7 Граф отношения  $R$ .

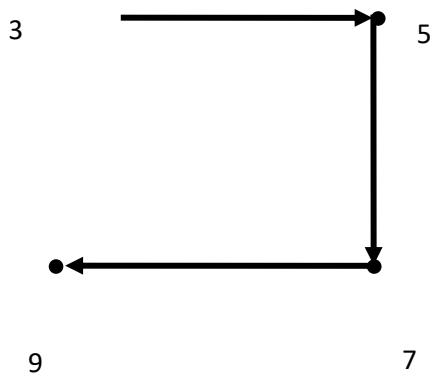


Рис. 8 Граф отношения  $T$ .

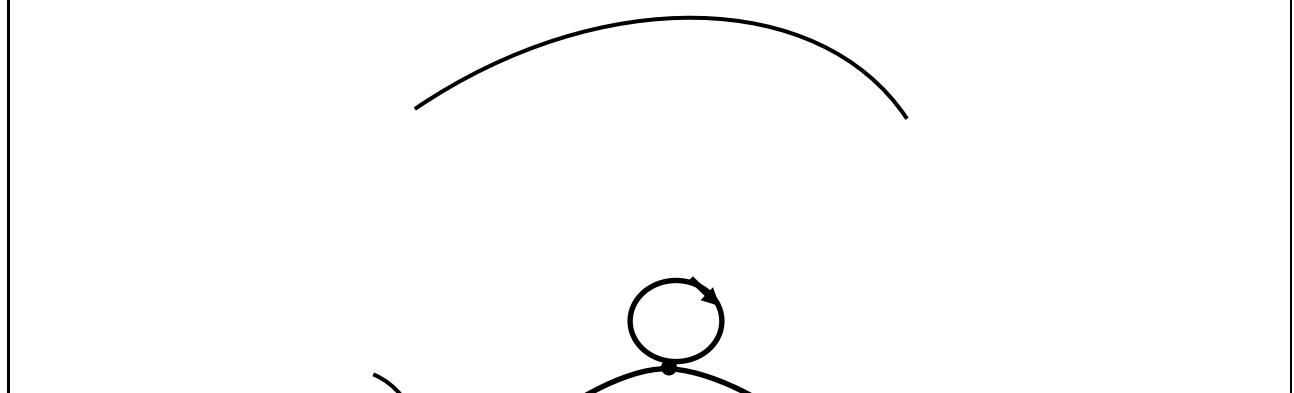


Рис. 9 Граф отношения  $M$ .

Граф отношения  $M$  является графом рефлексивного отношения, так как возле каждого элемента есть петля. Графы отношений  $R$  и  $M$  являются графами транзитивных отношений (граф транзитивного отношения с каждой парой стрелок, идущих от  $x$  к  $y$  и  $y$  к  $z$ , содержит стрелку, идущую от  $x$  к  $z$ ). Граф отношения  $T$  является графом антисимметричного отношения (если две вершины графа соединены стрелкой, то эта стрелка только одна).

*Практические задания для самостоятельной работы*

1. Выясните какие из следующих отношений обладают свойством рефлексивности, антирефлексивности, не обладает ни тем ни другим свойством .

$R$  – быть ровесниками на множестве людей;

$Q$  – быть длиннее на множестве отрезков плоскости;

$T$  – быть кратным на  $X=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

2. Выясните какие из следующих отношений обладают свойством симметричности, антисимметричности, не обладает ни тем, ни другим свойством .

$R$  – быть меньше на множестве натуральных чисел;

$Q$  – быть одноклассницей на множестве учащихся класса;

$T$  – быть соседями на множестве людей.

### Пример 1.

На множестве  $X = \{x / x \in \mathbb{N}, x \leq 12\}$  задано отношение  $K$  – «иметь один и тот же остаток при делении на 4». Объясните, почему отношение  $K$  является отношением эквивалентности, и запишите классы разбиения множества  $X$ , определяемые этим отношением.

Решение:

Отношение  $K$  является отношением эквивалентности, так как оно рефлексивно (можно сказать, что любое число имеет один и тот же остаток при делении на 4 с самим собой), симметрично (если число  $x$  имеет один и тот же остаток при делении на 4 с числом  $y$ , то и число  $y$  имеет один и тот же остаток при делении на 4 с числом  $x$ ), транзитивно (если число  $x$  имеет при делении на 4 тот же остаток, что и число  $y$ , а число  $y$  имеет при делении на 4 тот же остаток, что и число  $z$ , то числа  $x$  и  $z$  имеют равные остатки при делении на 4).

Как известно, любое отношение эквивалентности, заданное на множестве  $X$  определяет разбиение этого множества на классы таким образом, что в один класс попадают элементы, находящиеся в данном отношении, а в разные классы – не находящиеся в нем. Таким образом, каждый класс будет состоять из чисел, дающих один и тот же остаток при делении на 4. Таких классов 4:  $\{1, 5, 9\}$ ,  $\{2, 6, 10\}$ ,  $\{3, 7, 11\}$ ,  $\{4, 8, 12\}$ .

### Пример 2.

Докажите, что отношение  $P$ : «иметь равные значения числовых выражений», заданных на множестве  $X = \{2 \cdot 4; 3+9; 15-3; 0:5; 7+1; 2^3\}$  является отношением эквивалентности, запишите классы эквивалентности.

Решение:

Отношение  $P$  является отношением эквивалентности, так как оно рефлексивно (можно сказать, что любое числовое выражение имеет одно и тоже значение с самим собой), симметрично (если числовое выражение  $x$  и числовое выражение  $y$  имеют равные значения, то и числовое выражение  $y$  и числовое выражение  $x$  имеют равные значения), транзитивно (если числовое выражение  $x$  и числовое выражение  $y$  имеют равные значения и числовое выражение  $y$  и числовое выражение  $z$  имеют равные значения, то числовое выражение  $x$  и числовое выражение  $z$  имеют равные значения).

Как известно, любое отношение эквивалентности, заданное на множестве  $X$  определяет разбиение этого множества на классы таким образом, что в один класс попадают элементы, находящиеся в данном отношении, а в разные классы – не находящиеся в нем. Таким образом, каждый класс будет составлять выражения, имеющие равные значения. Таких классов 3:  $\{2 \cdot 4; 7+1\}$ ,  $\{3+9; 15-3\}$ ,  $\{0:5; 2^3\}$ .

$2^3\}, \{3+9; 15-3\}, \{0:5\}.$

#### *Практические задания для самостоятельной работы*

1. Отношение Т: «иметь один и тот же остаток при делении на 4» задано на множестве  $X=\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ . Является ли оно отношением эквивалентности.

#### Отношение порядка. Упорядоченное множество

Пример 1.

На множестве фигур плоскости заданы отношения Р – «иметь одну и ту же площадь» и М – «иметь меньшую площадь». Какое из них является отношением порядка?

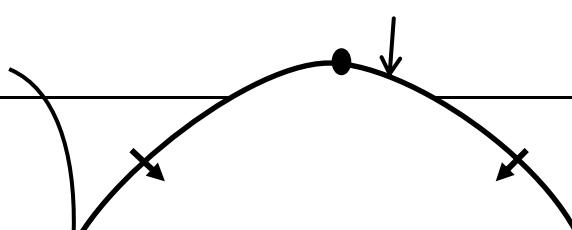
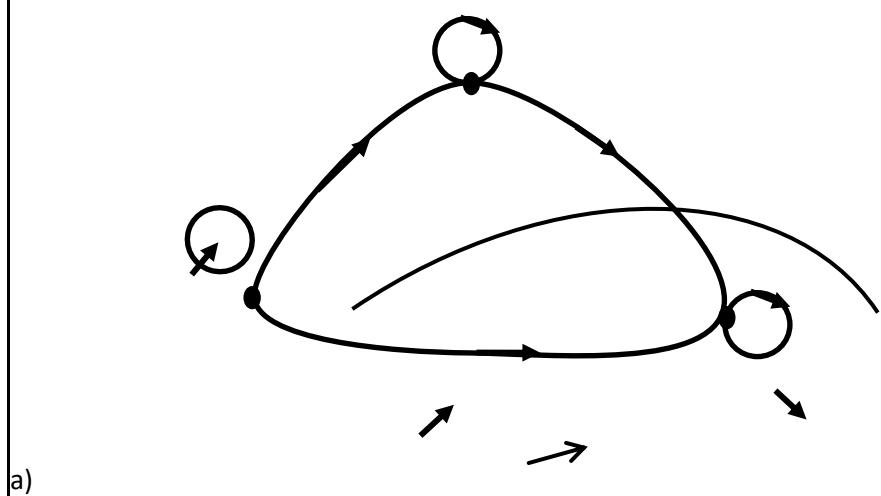
Решение:

Чтобы отношение являлось отношением порядка, достаточно, чтобы оно обладало транзитивностью и антисимметричностью. Отношение Р не обладает свойством антисимметричности, так как если фигура А имеет одну и ту же площадь, что и фигура В, то фигура В имеет одну и ту же площадь, что и фигура А. Таким образом, отношение Р не является отношением порядка.

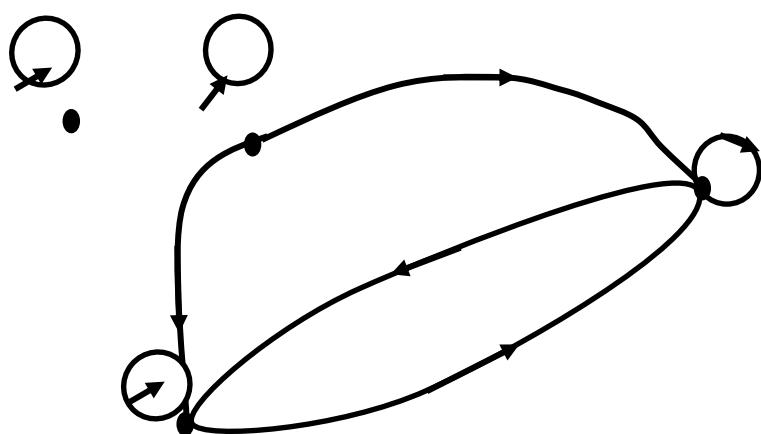
Отношение М является антисимметричным и транзитивным, то есть является отношением порядка.

Пример 2.

На рис. 11 приведены графы отношений R, P и Q. Есть ли среди них граф отношения порядка?



б)



в)

Рис. 11

Решение:

а) Граф, представленный под буквой *a* на рисунке 5 изображает отношение нестрогого порядка (если отношение порядка  $R$  в множестве  $X$  рефлексивно, то есть для всех  $x$  имеем  $xRx$ , то  $R$  - *отношение нестрогого порядка*), так как отношение рефлексивно (если отношение  $R$  рефлексивно на множестве  $X$ , то в каждой вершине графа данного отношения имеется петля), антисимметрично (граф антисимметричного отношения обладает особенностью: если две вершины графа соединены стрелкой, то эта стрелка только одна) и транзитивно (граф транзитивного отношения с каждой парой стрелок, идущих от  $x$  к  $y$  и  $y$  к  $z$ , содержит стрелку, идущую от  $x$  к  $z$ ).

б) Граф, представленный под буквой *б* на рисунке 5 изображает отношение строгого порядка (если отношение порядка  $R$  в множестве  $X$  таково, что для всех  $x \in X$  неверно, что  $xRx$ , то  $R$  - *отношение строгого порядка*), так как отношение антирефлексивно (граф антирефлексивного отношения обладает особенностью: в вершинах графа данного

отношения петли отсутствуют), антисимметрично (граф антисимметричного отношения обладает особенностью: если две вершины графа соединены стрелкой, то эта стрелка только одна) и транзитивно (граф транзитивного отношения с каждой парой стрелок, идущих от  $x$  к  $y$  и  $y$  к  $z$ , содержит стрелку, идущую от  $x$  к  $z$ ).

c) Граф, представленный под буквой  $v$  на рисунке 5 изображает отношение являющееся отношением порядка, не является ни антисимметричным (есть вершины соединенные двумя стрелками), ни транзитивным (не выполняется условие: граф транзитивного отношения с каждой парой стрелок, идущих от  $x$  к  $y$  и  $y$  к  $z$ , содержит стрелку, идущую от  $x$  к  $z$ ).

Пример 3.

В начальном курсе математики на множестве натуральных чисел рассматриваются отношения «больше», «больше на 7», «больше в 4 раза», «непосредственно следует за». Какие из них упорядочивают множество натуральных чисел?

Решение:

Множество  $X$ , на котором задано отношение порядка, называется упорядоченным множеством.

$R$ : «больше» обладает свойством антирефлексивности, антисимметричности и транзитивности, то есть является отношением строгого порядка, а следовательно, упорядочивает множество  $N$ .

$Q$ : «больше на 7» не обладает свойством транзитивности, так как если 28 больше на 7 числа 21 и число 21 больше на 7 числа 14, то из этого не следует, что число 28 больше на 7 числа 14. Таким образом, отношение  $Q$  не является отношением порядка, а следовательно, не упорядочивает множество  $N$ .

$S$ : «больше в 4 раза» не обладает свойством транзитивности, так как если 16 больше в 4 раза числа 4 и 4 больше в 4 раза числа 1, то 16 не больше в 4 раза числа 1. Таким образом, отношение  $S$  не является отношением порядка, а следовательно, не упорядочивает множество  $N$ .

$T$ : «непосредственно следует за» не обладает свойством транзитивности. Так как если 7 непосредственно следует за 6, а 6 непосредственно следует за 5, то это не значит, что 7 непосредственно следует за 5. Таким образом, отношение  $T$  не является отношением порядка, а следовательно, не упорядочивает множество  $N$ .

*Практические задания для самостоятельной работы*

1. На множестве учащихся класса заданы отношения  $P$  – «быть выше ростом» и  $M$  – «быть одинакового роста». Какое из них является отношением порядка?

Приложение 2

**Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации**

**а) Планируемые результаты обучения и оценочные средства для проведения промежуточной аттестации:**

Код индикатора	Индикатор достижения компетенции	Оценочные средства
ОПК-8-	Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний	

ОПК-8.1	Планирует и проводит научные исследования в области педагогической деятельности	<p><b><u>Вопросы к зачету (раздел 1, семестр 2)</u></b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Множество.</li> <li>2. Элемент множества.</li> <li>3. Способы задания множества.</li> <li>4. Числовые множества.</li> <li>5. Равные множества.</li> <li>6. Подмножества.</li> <li>7. Графическая иллюстрация множеств. Диаграммы Эйлера-Венна.</li> <li>8. Универсальное множество.</li> <li>9. Пересечение множеств.</li> <li>10. Объединение множеств.</li> <li>11. Дополнение к множеству. Разность множеств.</li> <li>12. Кортеж.</li> <li>13. Декартово произведение множеств.</li> <li>14. Математические понятия.</li> <li>15. Объем и содержание понятия.</li> <li>16. Отношения между понятиями.</li> <li>17. Определение понятий через род и видовое отличие.</li> </ol> <p><b>Перечень теоретических вопросов к зачету:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Соответствия между двумя множествами.</li> <li>2. Понятие соответствия. Способы задания соответствий.</li> <li>3. Взаимно однозначные соответствия.</li> <li>4. Понятие отношения на множестве.</li> <li>5. Свойства отношений.</li> <li>6. Отношения эквивалентности и порядка.</li> <li>7. Разбиение множества на классы эквивалентности.</li> <li>8. Отношение порядка.</li> <li>9. Понятие алгебраической операции.</li> <li>10. Свойства алгебраических операций.</li> <li>11. Нейтральный элемент.</li> <li>12. Симметричный элемент.</li> <li>13. Количественные натуральные числа. Счет.</li> <li>14. Теоретико-множественный смысл натурального</li> </ol>
---------	---	--

		<p>числа, нуля и отношения «меньше».</p> <p>15. Теоретико-множественный смысл суммы.</p> <p>16. Теоретико-множественный смысл разности.</p>
ОПК-8.2	Использует специальные научные знания для повышения эффективности педагогической деятельности	<p><b>Практическое занятие по разделу «Множества. Математические утверждения и их структура»</b></p> <p><u>Тема: Множества и операции над ними</u></p> <p><u>Множество. Элемент множества. Способы задания множества. Числовые множества</u></p> <p>Пример 1.</p> <p>2. Запишите множество <math>A</math>, элементами которого являются целые числа большие <math>-3</math> и меньшие <math>2</math>, используя символические записи характеристического свойства и перечисления элементов множества. Верно, ли, что: а) <math>2 \in A</math>; б) <math>0 \in A</math>; в) <math>-3 \notin A</math>?</p> <p>Решение:</p> <p>4. Зададим множество <math>A</math>, перечислением всех его элементов:</p> $A = \{-2, -1, 0, 1\}.$ <p>5. Зададим множество <math>A</math>, описанием характеристических свойств его элементов:</p> $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ и } -3 < x < 2\}.$ <p>6. 2 <math>\in A</math> – ложь, 0 <math>\in A</math> – истина, <math>-3 \notin A</math> – истина.</p> <p><u>Равные множества. Подмножества. Графическая иллюстрация множеств. Диаграммы Эйлера-Венна.</u></p> <p>Пример 2.</p> <p>Составьте цепочки включений, так чтобы каждое следующее множество содержало предыдущее. Изобразите результат при помощи кругов Эйлера-Венна.</p> <p>А - множество равнобедренных треугольников,</p>

**б) Порядок проведения промежуточной аттестации, показатели и критерии**

**оценивания:**

Промежуточная аттестация по дисциплине «Управление образовательными системами» включает теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень усвоения обучающимися знаний, и практические задания, выявляющие степень сформированности умений и владений, проводится в форме зачета.

Зачет по данной дисциплине проводится в устной форме по вопросам (1 вопрос) и с предъявлением всех выполненных заданий.

**Показатели и критерии оценивания зачета:**

Зачет и экзамен студент получает в том случае, если студент выполнил анализ программ, представил презентацию, сделал доклад по заданной теме и показал совокупность осознанных знаний по дисциплине, доказательно раскрыл основные положения вопросов; выполнил учебные таблицы, дидактический материал, задания, предусмотренные программой, усвоил основную и знаком с дополнительной литературой, рекомендованной программой.

Зачет и экзамен не ставится, если, студент не выполнил и не представил на проверку анализ программ, не представил группе презентацию, не сделал доклад по заданной теме и не показал совокупность осознанных знаний по дисциплине, доказательно не раскрыл основные положения вопросов; не выполнил учебные таблицы, дидактический материал, не владеет системой знаний, умений и навыков по программному материалу, не владеет способностью к рассуждению, не может анализировать нормативные документы, показывает полную неподготовленность по курсу.