МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

УТВЕРЖДАЮ:
Директор института
И.А. Пыталев

15.03.2021 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ТЕОРИЯ ОШИБОК И УРАВНИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Направление подготовки (специальность)
21.05.04 ГОРНОЕ ДЕЛО

Направленность (профиль/специализация) программы
21.05.04 специализация N «Маркшейдерское дело»

Уровень высшего образования – специалитет

Форма обучения
заочная

Институт	Горного дела и транспорта
Кафедра	Геологии, маркшейдерского дела и обогащения полезных ископаемых
Курс	6

Магнитогорск
2021г.

Рабочая программа составлена на основе ФГОС ВО по специальности 21.05.04 Горное дело, утвержденного приказом МОиН РФ от 17.10.2016 г. № 1298.

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры геологии, маркшейдерского дела и обогащения полезных ископаемых
03.03. 2021 г., протокол № 7

Зав. кафедрой ____________ И.А. Гришин

Рабочая программа одобрена методической комиссией ИГДиТ
15.03.2021 г., протокол № 5.

Председатель ____________ И.А.Пыталев

Рабочая программа составлена:
ассистент кафедры ГМДиОПИ, ____________ К.С. Наумова

Рецензент:
директор ООО «Магнитогорская маркшейдерско –геодезическая компания»,

____________ А.А. Шекунова

ООО «ММГК»

Лист актуализации рабочей программы

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2022 - 2023 учебном году на заседании кафедры Геологии, маркшейдерского дела и обогащения полезных ископаемых

Протокол от __ __________ 20__ г. № __
Зав. кафедрой ________________ И.А. Гришин

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2023 - 2024 учебном году на заседании кафедры Геологии, маркшейдерского дела и обогащения полезных ископаемых

Протокол от __ __________ 20__ г. № __
Зав. кафедрой ________________ И.А. Гришин

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2024 - 2025 учебном году на заседании кафедры Геологии, маркшейдерского дела и обогащения полезных ископаемых

Протокол от __ __________ 20__ г. № __
Зав. кафедрой ________________ И.А. Гришин

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2025 - 2026 учебном году на заседании кафедры Геологии, маркшейдерского дела и обогащения полезных ископаемых

Протокол от __ __________ 20__ г. № __
Зав. кафедрой ________________ И.А. Гришин

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2026 - 2027 учебном году на заседании кафедры Геологии, маркшейдерского дела и обогащения полезных ископаемых

Протокол от __ __________ 20__ г. № __
Зав. кафедрой ________________ И.А. Гришин

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2027 - 2028 учебном году на заседании кафедры Геологии, маркшейдерского дела и обогащения полезных ископаемых

Протокол от __ __________ 20__ г. № __
Зав. кафедрой ________________ И.А. Гришин

1 Цели освоения дисциплины (модуля)

Для горного инженера-маркшейдера математическая обработка маркшейдерско-геодезической и горно-геологической информации является важнейшей из дисциплин. Правильно обработанные маркшейдерские измерения – одна из предпосылок рациональной и безопасной разработки месторождения.

Целью преподавания дисциплины является формирование у студентов прочных знаний о характере и особенностях обработки различных видов маркшейдерско-геодезической информации, привития навыков выполнения необходимых вычислений.

2 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина Теория ошибок и уравнительные вычисления входит в базовую часть учебного плана образовательной программы.

Для изучения дисциплины необходимы знания (умения, владения), сформированные в результате изучения дисциплин/ практик:

Геодезия и маркшейдерия

Математика

Геодезия

Маркшейдерские работы при открытой разработке месторождений полезных ископаемых

Знания (умения, владения), полученные при изучении данной дисциплины будут необходимы для изучения дисциплин/практик:

Дистанционные методы зондирования Земли

Технология производства работ

Анализ и оценка результатов

Высшая геодезия

Маркшейдерские работы при строительстве подземных сооружений

Маркшейдерское обеспечение безопасности ведения горных работ

Маркшейдерское обеспечение горных работ и строительства гидротехнических сооружений

Подготовка к сдаче и сдача государственного экзамена

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) и планируемые результаты обучения

В результате освоения дисциплины (модуля) «Теория ошибок и уравнительные вычисления» обучающийся должен обладать следующими компетенциями:

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения
ПК-1 Способен выполнять инженерно-геодезические изыскания, планировать развитие горных работ, осуществлять маркшейдерский контроль состояния горных выработок, зданий сооружений и земной поверхности на всех этапах освоения и охраны недр с обеспечением промышленной и экологической безопасности	
ПК-1.1	Составляет проекты производства маркшейдерских и геодезических работ, осуществляет контроль за выполнением изыскательских работ
ПК-1.2	Планирует развитие горных работ и контролирует соответствие фактического развития горных работ проектам и календарным планам

ПК-1.3	Обосновывает и использует методы геометризации и прогнозирования размещения показателей месторождения в пространстве
ПК-1.4	Анализирует и типизирует условия разработки месторождений полезных ископаемых для их комплексного использования, выполняет
ПК-2 Способен выполнять маркшейдерско-геодезические работы, определять пространственно-временные характеристики состояния земной поверхности и недр, горно-технических систем, подземных и наземных сооружений и отображать информацию в соответствии действующими нормативными документами	
ПК-2.1	Использует законы и иные нормативные правовые акты в области геологического изучения, использования и охраны недр и окружающей среды; нормативные правовые акты, руководящие, методические и нормативные материалы, касающиеся деятельности маркшейдерской службы;
ПК-2.2	Осуществляет необходимые маркшейдерские камеральные и полевые работы, оформляет производственную документацию и отчетность
ПК-2.3	Использует геоинформационные системы для выполнения маркшейдерских работ
ПК-2.4	Устанавливает пригодность геодезического оборудования и приборов к работе

4. Структура, объём и содержание дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единиц 108 акад. часов, в том числе:

– контактная работа – 8,4 акад. часов:

– аудиторная – 8 акад. часов;

– внеаудиторная – 0,4 акад. часов

– самостоятельная работа – 95,7 акад. часов;

- подготовка к зачету – 3,9 акад. часов.

Форма аттестации - зачет

Раздел/ тема дисциплины	Курс	Аудиторная контактная работа (в акад. часах)			Самостоятельная работа студента	Вид самостоятельной работы	Форма текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации	Код компетенции
		Лек.	лаб. зан.	практ. зан.				
1. Элементы теории погрешностей (ошибок) геодезических измерений								
1.1 Общие сведения об измерениях	6	0,08			3	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Устный опрос (собеседование)	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3 ПК-2.4
1.2 Погрешности результатов измерений		0,08			3	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Устный опрос (собеседование)	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3 ПК-2.4
1.3 Задачи теории погрешностей измерений		0,08			3	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта	Устный опрос (собеседование)	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3
Итого по разделу		0,24			9			
2. Равноточные измерения								
2.1 Вычисление наиболее точного по вероятности значения результата измерений одной и той же величины	6	0,08			4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Устный опрос (собеседование)	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3 ПК-2.4
Итого по разделу		0,08			4			
3. Оценка точности результатов ряда равноточных								

3.1 Средняя квадратическая погрешность результата отдельного измерения. Предельная и относительная погрешности	6	0,08		0,2	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практической работы и решение задач	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3 ПК-2.4
3.2 Вероятнейшие погрешности		0,08		0,2	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практической работы и решение	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3 ПК-2.4
Итого по разделу		0,16		0,4	8			
4. Оценка точности функций измеренных величин								
4.1 Средняя квадратическая погрешность функции общего вида	6	0,08		0,2	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практической работы и решение задач	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3 ПК-2.4
4.2 Средняя квадратическая погрешность простой арифметической середины		0,08		0,2	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практической работы и решение задач	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3 ПК-2.4
4.3 Оценка точности результатов угловых измерений в триангуляции		0,08		0,2	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практической работы и решение задач	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3 ПК-2.4
4.4 Оценка точности результатов ряда двойных равноточных измерений		0,08		0,2	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практической работы и решение задач	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3 ПК-2.4
Итого по разделу		0,32		0,8	16			
5. Неравноточные измерения								
5.1 Общая арифметическая середина. Веса результатов измерений	6	0,08		0,2	3	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3 ПК-2.4

5.2 Средняя квадратическая погрешность единицы веса		0,08		0,2	3	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3 ПК-2.4
5.3 Средняя квадратическая погрешность и вес общей арифметической середины		0,08		0,2	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3 ПК-2.4
5.4 Вычисление средней квадратической погрешности единицы веса		0,08		0,2	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3 ПК-2.4
5.5 Вычисление весов функций независимых аргументов		0,08		0,2	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3 ПК-2.4
Итого по разделу		0,4		1	18			
6. Основы метода наименьших квадратов								
6.1 Задача совместного уравнивания нескольких измеренных величин	6	0,08		0,3	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3 ПК-2.4
6.2 Принцип (способ) наименьших квадратов		0,08		0,3	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3 ПК-2.4
6.3 Коррелатный способ уравнивания		0,08		0,3	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3 ПК-2.4
6.4 Параметрический способ уравнивания		0,08		0,3	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3 ПК-2.4

6.5 Вычисление коэффициентов нормальных уравнений		0,08		0,3	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3 ПК-2.4
6.6 Контроль вычисления коэффициентов нормальных уравнений		0,08		0,3	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3 ПК-2.4
6.7 Решение нормальных уравнений		0,08		0,5	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3 ПК-2.4
6.8 Контроль решения нормальных уравнений		0,08		0,5	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3 ПК-2.4
6.9 Схемы решения нормальных уравнений по алгоритму К.Ф. Гаусса		0,08		0,5	4	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3 ПК-2.4
6.10 Оценка точности измеренных величин и их функций при уравнивании коррелатным способом		0,08		0,5	4,7	Изучение основной и дополнительной литературы по дисциплине, конспекта лекций	Выполнение практических работ	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3 ПК-2.4
Итого по разделу		0,8		3,8	40,7			
Итого за семестр		2		6	95,7		зачёт	
Итого по дисциплине		2		6	95,7		зачет	ПК-1.1 ПК-1.2 ПК-1.3 ПК-1.4 ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3 ПК-2.4

5 Образовательные технологии

Для реализации предусмотренных видов учебной работы в качестве образовательных технологий в преподавании дисциплины «Теория ошибок и уравнительные вычисления» используются традиционная и модульно-компетентностная технологии.

Лекции проходят в традиционной форме. На лекции-консультации, излагается новый материал, сопровождающийся вопросами-ответами по теме лекции.

Практические работы выполняются студентами по вариантам.

Самостоятельная работа заключается в проработке отдельных вопросов при изучении дисциплины и при подготовке к сдаче зачета.

6 Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Представлено в приложении 1.

7 Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации

Представлены в приложении 2.

8 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

а) Основная литература:

1. Гальянов А.В., Гордеев В.А. Развитие научных идей в горном деле: Маркшейдерия: научная монография. – Екатеринбург: Уральский государственный горный университет, 2018. 559 с. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36292312

2. Голубев В.В. Геодезия. Теория математической обработки геодезических измерений: Учеб. для вузов. – М.: Московский государственный университет геодезии и картографии, 2016. 422 с. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30089838

3. Дьяков, Б.Н. Геодезия [Электронный ресурс]: учебник / Б.Н. Дьяков. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2019. — 416 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/111205 .

б) Дополнительная литература:

1. Маркузе, Ю. И. Теория математической обработки геодезических измерений : учебное пособие / Ю. И. Маркузе, В. В. Голубев. — Москва : Академический Проект, 2020. — 247 с. — ISBN 978-5-8291-2981-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/132444

2. Перфильев, А. А. Теория математической обработки геодезических измерений : учебное пособие / А. А. Перфильев. — Новосибирск : СГУВТ, 2019. — 80 с. — ISBN 978-5-8119-0810-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/147160

3. Беликов, А. Б. Математическая обработка результатов геодезических измерений : учебное пособие / А. Б. Беликов, В. В. Симонян. — 2-е изд. — Москва : МИСИ – МГСУ, 2016. — 432 с. — ISBN 978-7264-1255-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/73707.

4. Инженерная геодезия и геоинформатика. Краткий курс : учебник / М. Я. Брынь, Е. С. Богомолова, В. А. Коугия, Б. А. Лёвин ; под редакцией В. А. Коугия. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 288 с. — ISBN 978-5-8114-1831-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/643245. Маслов А.В., Гордеев А.В., Батраков Ю.Г. Геодезия: учебник. – М.: Колосс, 2006, 598 с.

в) Методические указания:

Представлены в приложении 3.

г) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

Программное обеспечение

Наименование ПО	№ договора	Срок действия лицензии
MS Windows 7 Professional(для классов)	Д-1227-18 от 08.10.2018	11.10.2021
MS Office 2007 Professional	№ 135 от 17.09.2007	бессрочно
7Zip	свободно распространяемое ПО	бессрочно
MS Windows 7 Professional (для классов)	Д-757-17 от 27.06.2017	27.07.2018

Профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Название курса	Ссылка
Национальная информационно-аналитическая система – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ)	URL: https://elibrary.ru/project_risc.asp
Поисковая система Академия Google (Google Scholar)	URL: https://scholar.google.ru/
Информационная система - Единое окно доступа к информационным ресурсам	URL: http://window.edu.ru/

9 Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Материально-техническое обеспечение дисциплины включает:

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа: Технические средства обучения, служащие для представления учебной информации большой аудитории: мультимедийные средства хранения, передачи и представления учебной информации. Специализированная мебель.

Учебная аудитория для проведения практических занятий текущего контроля и промежуточной аттестации: Технические средства обучения, служащие для представления учебной информации большой аудитории: мультимедийные средства хранения, передачи и представления учебной информации. Специализированная мебель.

Учебная аудитория для групповых и индивидуальных консультаций: Компьютерная техника с пакетом MS Office, с подключением к сети «Интернет» и с доступом в электронную информационно-образовательную среду университета.
Специализированная мебель

Помещение для самостоятельной работы: Компьютерная техника с пакетом MS Office, с подключением к сети «Интернет» и с доступом в электронную информационно-образовательную среду университета. Специализированная мебель.

Помещение для хранения и профилактического обслуживания: Стеллажи для хранения учебно-наглядных пособий и учебно-методической документации.

Приложение 1

6 Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Аудиторная самостоятельная работа студентов на практических занятиях осуществляется под контролем преподавателя в виде решения задач и выполнения упражнений, которые определяет преподаватель для студента.

Самостоятельная работа студентов осуществляется в виде чтения литературы по соответствующему разделу с проработкой материала и выполнения домашних заданий с консультациями преподавателя.

Виды	Формы контроля
Выполнение практических работ	Проверка и защита работ
Поиск дополнительной информации по заданной теме (работа с библиографическим материалами, справочниками, каталогами, словарями, энциклопедиями)	Практические работы

Примерный перечень теоретических вопросов к зачёту:

1. Задачи дисциплины «Теория ошибок и уравнительные вычисления»
2. Что понимают под измерением физической величины?
3. Какие измерения называют прямыми, косвенными, равноточными и неравноточными?
4. Что является результатом измерения?
5. Что понимается под ошибкой (погрешностью) результата измерения?
6. Какие ошибки называются грубыми, систематическими, случайными?
7. Как вычислить вероятнейшее значение измеряемой величины по результатам многократных равноточных измерений?
8. Средняя квадратическая ошибка результатов равноточных измерений: формулы Гаусса, Бесселя, Ферреро.
9. Средняя квадратическая ошибка функции измеренных величин.
10. Средняя квадратическая ошибка результатов двойных равноточных измерений.
11. Средняя квадратическая ошибка простой арифметической середины.
12. Общая арифметическая середина.
13. Средняя квадратическая ошибка единицы веса.
14. Средняя квадратическая ошибка и вес общей арифметической середины.
15. Что понимается под уравниванием результатов измерений?
16. Уравнивание и оценка точности направлений, измеренных на станции способом круговых приёмов.
17. Что является условием и причиной возникновения задачи уравнивания?
18. Принцип наименьших квадратов.
19. Коррелатный способ уравнивания.
20. Параметрический способ уравнивания.
21. Как составляют условные уравнения?
22. Как составляют нормальные уравнения и вычисляются коэффициенты нормальных уравнений?
23. Алгоритм К. Ф. Гаусса решения систем нормальных уравнений?
24. Контроль решения нормальных уравнений.
25. Оценка точности измеренных величин и их функций при уравнивании коррелатным способом.

Приложение 2

7 Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации

а) Планируемые результаты обучения и оценочные средства для проведения промежуточной аттестации:

Примерное содержание:

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
ПК-1 Способен выполнять инженерно-геодезические изыскания, планировать развитие горных работ, осуществлять маркшейдерский контроль состояния горных выработок, зданий сооружений и земной поверхности на всех этапах освоения и охраны недр с обеспечением промышленной и экологической безопасности		
ПК-1.1	Составляет проекты производства маркшейдерских и геодезических работ, осуществляет контроль за выполнением изыскательских работ	***Примерный перечень теоретических вопросов к зачёту:*** 1. Задачи дисциплины «Теория ошибок и уравнительные вычисления» 2. Что понимают под измерением физической величины? 3. Какие измерения называют прямыми, косвенными, равноточными и неравноточными? 4. Что является результатом измерения? 5. Что понимается под ошибкой (погрешностью) результата измерения? 6. Какие ошибки называются грубыми, систематическими, случайными? 7. Как вычислить вероятнейшее значение измеряемой величины по результатам многократных равноточных измерений? 8. Средняя квадратическая ошибка результатов равноточных измерений: формулы Гаусса, Бесселя, Ферреро. 9. Средняя квадратическая ошибка функции измеренных величин. 10. Средняя квадратическая ошибка результатов двойных равноточных измерений.

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
		11. Средняя квадратическая ошибка простой арифметической середины. 12. Общая арифметическая середина. 13. Средняя квадратическая ошибка единицы веса. 14. Средняя квадратическая ошибка и вес общей арифметической середины. 15. Что понимается под уравниванием результатов измерений? 16. Уравнивание и оценка точности направлений, измеренных на станции способом круговых приёмов. 17. Что является условием и причиной возникновения задачи уравнивания? 18. Принцип наименьших квадратов. 19. Коррелатный способ уравнивания. 20. Параметрический способ уравнивания. 21. Как составляют условные уравнения? 22. Как составляют нормальные уравнения и вычисляются коэффициенты нормальных уравнений? 23. Алгоритм К. Ф. Гаусса решения систем нормальных уравнений? 24. Контроль решения нормальных уравнений. 25. Оценка точности измеренных величин и их функций при уравнивании коррелатным способом.
ПК-1.2	Планирует развитие горных работ и контролирует соответствие фактического развития горных работ проектам и календарным планам	***Примерный перечень теоретических вопросов к зачёту:*** 1. Задачи дисциплины «Теория ошибок и уравнительные вычисления» 2. Что понимают под измерением физической величины? 3. Какие измерения называют прямыми, косвенными, равноточными и неравноточными? 4. Что является результатом измерения? 5. Что понимается под ошибкой (погрешностью) результата измерения? 6. Какие ошибки называются грубыми, систематическими, случайными? 7. Как вычислить вероятнейшее значение измеряемой величины по результатам многократных равноточных измерений?

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
		8. Средняя квадратическая ошибка результатов равноточных измерений: формулы Гаусса, Бесселя, Ферреро. 9. Средняя квадратическая ошибка функции измеренных величин. 10. Средняя квадратическая ошибка результатов двойных равноточных измерений. 11. Средняя квадратическая ошибка простой арифметической середины. 12. Общая арифметическая середина. 13. Средняя квадратическая ошибка единицы веса. 14. Средняя квадратическая ошибка и вес общей арифметической середины. 15. Что понимается под уравниванием результатов измерений? 16. Уравнивание и оценка точности направлений, измеренных на станции способом круговых приёмов. 17. Что является условием и причиной возникновения задачи уравнивания? 18. Принцип наименьших квадратов. 19. Коррелатный способ уравнивания. 20. Параметрический способ уравнивания. 21. Как составляют условные уравнения? 22. Как составляют нормальные уравнения и вычисляются коэффициенты нормальных уравнений? 23. Алгоритм К. Ф. Гаусса решения систем нормальных уравнений? 24. Контроль решения нормальных уравнений. 25. Оценка точности измеренных величин и их функций при уравнивании коррелатным способом.
ПК-1.3	Обосновывает и использует методы геометризации и прогнозирования размещения показателей месторождения в пространстве	***Примерный перечень теоретических вопросов к зачёту:*** 1. Задачи дисциплины «Теория ошибок и уравнительные вычисления» 2. Что понимают под измерением физической величины? 3. Какие измерения называют прямыми, косвенными, равноточными и неравноточными? 4. Что является результатом измерения?

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
		5. Что понимается под ошибкой (погрешностью) результата измерения? 6. Какие ошибки называются грубыми, систематическими, случайными? 7. Как вычислить вероятнейшее значение измеряемой величины по результатам многократных равноточных измерений? 8. Средняя квадратическая ошибка результатов равноточных измерений: формулы Гаусса, Бесселя, Ферреро. 9. Средняя квадратическая ошибка функции измеренных величин. 10. Средняя квадратическая ошибка результатов двойных равноточных измерений. 11. Средняя квадратическая ошибка простой арифметической середины. 12. Общая арифметическая середина. 13. Средняя квадратическая ошибка единицы веса. 14. Средняя квадратическая ошибка и вес общей арифметической середины. 15. Что понимается под уравниванием результатов измерений? 16. Уравнивание и оценка точности направлений, измеренных на станции способом круговых приёмов. 17. Что является условием и причиной возникновения задачи уравнивания? 18. Принцип наименьших квадратов. 19. Коррелатный способ уравнивания. 20. Параметрический способ уравнивания. 21. Как составляют условные уравнения? 22. Как составляют нормальные уравнения и вычисляются коэффициенты нормальных уравнений? 23. Алгоритм К. Ф. Гаусса решения систем нормальных уравнений? 24. Контроль решения нормальных уравнений. 25. Оценка точности измеренных величин и их функций при уравнивании коррелатным способом.
ПК-1.4	Анализирует и типизирует условия разработки месторождений полезных	***Примерный перечень теоретических вопросов к зачёту:*** 1. Задачи дисциплины «Теория ошибок и уравнительные вычисления»

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
	ископаемых для их комплексного использования, выполняет различные оценки недропользования	2. Что понимают под измерением физической величины? 3. Какие измерения называют прямыми, косвенными, равноточными и неравноточными? 4. Что является результатом измерения? 5. Что понимается под ошибкой (погрешностью) результата измерения? 6. Какие ошибки называются грубыми, систематическими, случайными? 7. Как вычислить вероятнейшее значение измеряемой величины по результатам многократных равноточных измерений? 8. Средняя квадратическая ошибка результатов равноточных измерений: формулы Гаусса, Бесселя, Ферреро. 9. Средняя квадратическая ошибка функции измеренных величин. 10. Средняя квадратическая ошибка результатов двойных равноточных измерений. 11. Средняя квадратическая ошибка простой арифметической середины. 12. Общая арифметическая середина. 13. Средняя квадратическая ошибка единицы веса. 14. Средняя квадратическая ошибка и вес общей арифметической середины. 15. Что понимается под уравниванием результатов измерений? 16. Уравнивание и оценка точности направлений, измеренных на станции способом круговых приёмов. 17. Что является условием и причиной возникновения задачи уравнивания? 18. Принцип наименьших квадратов. 19. Коррелатный способ уравнивания. 20. Параметрический способ уравнивания. 21. Как составляют условные уравнения? 22. Как составляют нормальные уравнения и вычисляются коэффициенты нормальных уравнений? 23. Алгоритм К. Ф. Гаусса решения систем нормальных уравнений? 24. Контроль решения нормальных уравнений. 25. Оценка точности измеренных величин и их функций при уравнивании

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
		коррелатным способом.
ПК-2 Способен выполнять маркшейдерско-геодезические работы, определять пространственно-временные характеристики состояния земной поверхности и недр, горно-технических систем, подземных и наземных сооружений и отображать информацию в соответствии действующими нормативными документами		
ПК-2.1	Использует законы и иные нормативные правовые акты в области геологического изучения, использования и охраны недр и окружающей среды; нормативные правовые акты, руководящие, методические и нормативные материалы, касающиеся деятельности маркшейдерской службы;	***Примерный перечень теоретических вопросов к зачёту:*** 1. Задачи дисциплины «Теория ошибок и уравнительные вычисления» 2. Что понимают под измерением физической величины? 3. Какие измерения называют прямыми, косвенными, равноточными и неравноточными? 4. Что является результатом измерения? 5. Что понимается под ошибкой (погрешностью) результата измерения? 6. Какие ошибки называются грубыми, систематическими, случайными? 7. Как вычислить вероятнейшее значение измеряемой величины по результатам многократных равноточных измерений? 8. Средняя квадратическая ошибка результатов равноточных измерений: формулы Гаусса, Бесселя, Ферреро. 9. Средняя квадратическая ошибка функции измеренных величин. 10. Средняя квадратическая ошибка результатов двойных равноточных измерений. 11. Средняя квадратическая ошибка простой арифметической середины. 12. Общая арифметическая середина. 13. Средняя квадратическая ошибка единицы веса. 14. Средняя квадратическая ошибка и вес общей арифметической середины. 15. Что понимается под уравниванием результатов измерений? 16. Уравнивание и оценка точности направлений, измеренных на станции способом круговых приёмов. 17. Что является условием и причиной возникновения задачи уравнивания?

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
		18. Принцип наименьших квадратов. 19. Коррелатный способ уравнивания. 20. Параметрический способ уравнивания. 21. Как составляют условные уравнения? 22. Как составляют нормальные уравнения и вычисляются коэффициенты нормальных уравнений? 23. Алгоритм К. Ф. Гаусса решения систем нормальных уравнений? 24. Контроль решения нормальных уравнений. 25. Оценка точности измеренных величин и их функций при уравнивании коррелатным способом.
ПК-2.2	Осуществляет необходимые маркшейдерские камеральные и полевые работы, оформляет производственную документацию и отчетность	***Примерный перечень теоретических вопросов к зачёту:*** 1. Задачи дисциплины «Теория ошибок и уравнительные вычисления» 2. Что понимают под измерением физической величины? 3. Какие измерения называют прямыми, косвенными, равноточными и неравноточными? 4. Что является результатом измерения? 5. Что понимается под ошибкой (погрешностью) результата измерения? 6. Какие ошибки называются грубыми, систематическими, случайными? 7. Как вычислить вероятнейшее значение измеряемой величины по результатам многократных равноточных измерений? 8. Средняя квадратическая ошибка результатов равноточных измерений: формулы Гаусса, Бесселя, Ферреро. 9. Средняя квадратическая ошибка функции измеренных величин. 10. Средняя квадратическая ошибка результатов двойных равноточных измерений. 11. Средняя квадратическая ошибка простой арифметической середины. 12. Общая арифметическая середина. 13. Средняя квадратическая ошибка единицы веса. 14. Средняя квадратическая ошибка и вес общей арифметической середины.

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
		15. Что понимается под уравниванием результатов измерений? 16. Уравнивание и оценка точности направлений, измеренных на станции способом круговых приёмов. 17. Что является условием и причиной возникновения задачи уравнивания? 18. Принцип наименьших квадратов. 19. Коррелатный способ уравнивания. 20. Параметрический способ уравнивания. 21. Как составляют условные уравнения? 22. Как составляют нормальные уравнения и вычисляются коэффициенты нормальных уравнений? 23. Алгоритм К. Ф. Гаусса решения систем нормальных уравнений? 24. Контроль решения нормальных уравнений. ***25.*** Оценка точности измеренных величин и их функций при уравнивании коррелатным способом.
ПК-2.3	Использует геоинформационные системы для выполнения маркшейдерских работ	***Примерный перечень теоретических вопросов к зачёту:*** 1. Задачи дисциплины «Теория ошибок и уравнительные вычисления» 2. Что понимают под измерением физической величины? 3. Какие измерения называют прямыми, косвенными, равноточными и неравноточными? 4. Что является результатом измерения? 5. Что понимается под ошибкой (погрешностью) результата измерения? 6. Какие ошибки называются грубыми, систематическими, случайными? 7. Как вычислить вероятнейшее значение измеряемой величины по результатам многократных равноточных измерений? 8. Средняя квадратическая ошибка результатов равноточных измерений: формулы Гаусса, Бесселя, Ферреро. 9. Средняя квадратическая ошибка функции измеренных величин. 10. Средняя квадратическая ошибка результатов двойных равноточных измерений.

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
		11. Средняя квадратическая ошибка простой арифметической середины. 12. Общая арифметическая середина. 13. Средняя квадратическая ошибка единицы веса. 14. Средняя квадратическая ошибка и вес общей арифметической середины. 15. Что понимается под уравниванием результатов измерений? 16. Уравнивание и оценка точности направлений, измеренных на станции способом круговых приёмов. 17. Что является условием и причиной возникновения задачи уравнивания? 18. Принцип наименьших квадратов. 19. Коррелатный способ уравнивания. 20. Параметрический способ уравнивания. 21. Как составляют условные уравнения? 22. Как составляют нормальные уравнения и вычисляются коэффициенты нормальных уравнений? 23. Алгоритм К. Ф. Гаусса решения систем нормальных уравнений? 24. Контроль решения нормальных уравнений. 25. Оценка точности измеренных величин и их функций при уравнивании коррелатным способом.
ПК-2.4	Устанавливает пригодность геодезического оборудования и приборов к работе	***Примерный перечень теоретических вопросов к зачёту:*** 1. Задачи дисциплины «Теория ошибок и уравнительные вычисления» 2. Что понимают под измерением физической величины? 3. Какие измерения называют прямыми, косвенными, равноточными и неравноточными? 4. Что является результатом измерения? 5. Что понимается под ошибкой (погрешностью) результата измерения? 6. Какие ошибки называются грубыми, систематическими, случайными? 7. Как вычислить вероятнейшее значение измеряемой величины по результатам многократных равноточных измерений?

Структурный элемент компетенции	Планируемые результаты обучения	Оценочные средства
		8. Средняя квадратическая ошибка результатов равноточных измерений: формулы Гаусса, Бесселя, Ферреро. 9. Средняя квадратическая ошибка функции измеренных величин. 10. Средняя квадратическая ошибка результатов двойных равноточных измерений. 11. Средняя квадратическая ошибка простой арифметической середины. 12. Общая арифметическая середина. 13. Средняя квадратическая ошибка единицы веса. 14. Средняя квадратическая ошибка и вес общей арифметической середины. 15. Что понимается под уравниванием результатов измерений? 16. Уравнивание и оценка точности направлений, измеренных на станции способом круговых приёмов. 17. Что является условием и причиной возникновения задачи уравнивания? 18. Принцип наименьших квадратов. 19. Коррелатный способ уравнивания. 20. Параметрический способ уравнивания. 21. Как составляют условные уравнения? 22. Как составляют нормальные уравнения и вычисляются коэффициенты нормальных уравнений? 23. Алгоритм К. Ф. Гаусса решения систем нормальных уравнений? 24. Контроль решения нормальных уравнений. 25. Оценка точности измеренных величин и их функций при уравнивании коррелатным способом.

б) Порядок проведения промежуточной аттестации, показатели и критерии оценивания:

Примерная структура и содержание пункта:

Промежуточная аттестация по дисциплине «Теория ошибок и уравнительные вычисления» включает теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень усвоения обучающимися знаний, и практические задания, выявляющие степень сформированности умений и владений, проводится в форме зачета.

Зачет по данной дисциплине проводится в устной форме по теоретическим вопросам.

Показатели и критерии оценивания зачета:

– на оценку **«зачтено»** обучающийся демонстрирует уровень сформированности компетенций от высокого до порогового, демонстрирует знание учебного материала, навыки выполнения практических заданий.

– на оценку **«не зачтено»**– обучающийся демонстрирует знания не более 20% теоретического материала, допускает существенные ошибки, не может показать интеллектуальные навыки выполнения простых заданий.

Приложение 3

Методические указания

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

1.1. Общие сведения об измерениях

Объектом изучения науки Геодезия является планета Земля – ее форма, размеры, внешнее гравитационное поле. Эти характеристики получают из различных измерений, выполняемых на поверхности Земли.

Под *измерением* физической величины $\boldsymbol{X}$ понимают процесс сравнения этой величины с другой, однородной с ней величиной $\boldsymbol{q}$, принятой в качестве *меры* - единицы измерения. Например, длину отрезка линии местности сравнивают с единицей линейных измерений - *метром*; горизонтальный угол, образованный отрезками линий на местности, сравнивают с градусом, градом, радианом.

Измерения различают:

- *прямые;*
- *косвенные;*
- *равноточные*;
- *неравноточные*.

Под *прямыми* измерениями понимают такие, при которых определяемую величину получают путём непосредственного сравнения (сопоставления) её с единицей измерения или её производной. Например, длина отрезка линии измеряется стальной лентой или горизонтальный угол на местности измеряется теодолитом, а на бумаге транспортиром и т.д.

Косвенными называют измерения, определяемая величина в которых является функцией других непосредственно измеренных величин. Так, для определения длины окружности или площади круга, необходимо непосредственно измерить радиус окружности.

Равноточными называют измерения, выполненные приборами одного класса точности, специалистами равной квалификации, по одной и той же технологии, в идентичных внешних условиях. При несоблюдении хотя бы одного из перечисленных условий измерения считаются *неравноточными*.

Результатом измерения $\boldsymbol{l}$ является число, показывающее, во сколько раз определяемая величина больше или меньше величины, с которой её сравнивали, т.е. величины, принятой за единицу измерения.

Результаты измерений подразделяют на *необходимые* и *добавочные* (или избыточные). Так, если одна и та же величина (длина линии, угол треугольника и т.п.) измерена n раз, то один из результатов измерений является необходимым, а $(n - 1)$ - добавочными. Добавочные измерения имеют весьма важное значение: их сходимость является *средством контроля* и позволяет судить о *качестве* результатов измерений; они дают возможность получить *наиболее надежное значение* искомой величины по сравнению с любым отдельно взятым результатом измерения.

1.2. Погрешности результатов измерений

Результаты многократных измерений одной и той же физической величины (линии, угла, превышения и т.п.), как правило, различаются между собой и не совпадают с точным (истинным) значением измеряемой величины, т.е. содержат неизбежные погрешности, вызываемые различными причинами.

Под *погрешностью* Δ_i результата измерения l понимают разность между результатом измерения l физической величины и точным (истинным) значением X этой величины, т.е.

$$\Delta i = l_i - X \tag{1}$$

где ***i =1, 2, 3,...., n;***

n - число выполненных измерений.

По своим свойствам, характеру возникновения и влияния на результаты измерений, их функции, погрешности подразделяют на *грубые, систематические и случайные.*

Грубые погрешности (промахи) возникают вследствие невнимательности наблюдателя, неисправности прибора, несоблюдении технологии работ, не учёта влияния изменяющихся внешних условий: температуры, ветра, видимости и т.п. Обнаружить грубые погрешности можно, используя геометрические свойства наблюдаемого объекта (например, сумму внутренних углов плоского многоугольника), а также выполнением повторных измерений. Так, например, при линейных измерениях, пропуск целого пролета, равного длине мерного прибора, можно обнаружить измерением отрезка линии нитяным дальномером, иногда - даже шагами.

К *систематическим* относят такие погрешности результатов измерений, которые входят в эти результаты по определенному закону.

Так, если известна длина меры при температуре t_o, а измерение длины линии местности выполнены при температуре t, то результат измерения длины линии будет содержать систематическую погрешность, пропорциональную разности температур $(t - t_0)$ и длине линии. Влияние систематических погрешностей на результаты измерений исключают или сводят до пренебрегаемо малого значения выбором методики измерений или введением поправок в результаты.

Случайные погрешности результатов измерений характеризуются тем, что при одинаковых условиях измерений они могут меняться по величине и знаку; их нельзя заранее предусмотреть, определить закон воздействия на результат. Статистический анализ, т.е. анализ результатов больших рядов измерений, позволил для случайных погрешностей выявить ряд их свойств.

<u>Первое свойство</u>. Для данных условий измерений случайные погрешности по абсолютной величине не могут превосходить известного предела (свойство ограниченности), т.е.

$$|\Delta| \leq \Delta_{пред} \tag{2}$$

<u>Второе свойство</u>. Равные по абсолютной величине положительные и отрицательные случайные погрешности равновозможны, т.е. встречаются одинаково часто (свойство симметрии).

<u>Третье свойство</u>. Малые по абсолютной величине случайные погрешности при измерениях встречаются чаще, чем большие (свойство плотности).

Четвертое свойство. Среднее арифметическое из случайных погрешностей и их попарных произведений стремиться к нулю при неограниченном возрастании числа измерений (свойство компенсации), т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta_j\Delta_k]}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta_i]}{n}=0, \tag{3}$$

где ***i* = 1, 2, 3,...., *n* ;** ***j* = 1, 2, 3,..., *n*-1;** ***k* = 2, 3, 4,...., *n* ;**

n - число измерений;

[ ] - Гауссов символ суммы.

1.3. Задачи теории погрешностей измерений

Как было отмечено выше, в результатах измерений неизбежно содержатся погрешности. Поэтому одной из задач теории погрешностей является изучение видов и свойств погрешностей измерений, причин их возникновения.

Далее, выполнив измерения, всегда стремятся определить точность полученных результатов. Поэтому в теории погрешностей измерений устанавливаются критерии для оценки точности результатов измерений.

Так как результаты измерений вследствие влияния погрешностей разнятся между собой, то возникает задача отыскания наиболее точного по вероятности значения определяемой величины из результатов многократных ее измерений.

Во многих случаях геодезической практики по результатам измерений вычисляют другие интересующие нас величины. Например, измерив сторону треугольника и два его угла, можно по известным формулам вычислить третий угол и две другие стороны. В таких случаях результаты вычислений являются функциями измеренных величин. По указанной причине, перед теорией погрешностей возникает задача, по оценке точности функций измеренных величин.

Перечисленные задачи, которые решаются теорией погрешностей измерений, имеют большое значение для правильной организации, проведения геодезических работ и использования их результатов.

Кроме того, теория погрешностей геодезических измерений позволяет обоснованно выбрать необходимые для измерений приборы и инструменты, рассчитать ожидаемую точность измерений и окончательного результата, правильно выбрать метод обработки результатов измерений.

1.4 Равноточные измерения

1.4.1 Вычисление наиболее точного по вероятности значения результата измерений одной и той же величины

Пусть некоторая величина, истинное (точное) значение которой равно ***X***, измерена равно точно ***n*** раз и получены результаты этих измерений**:** $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$. Составим разности

$$\Delta_i = l_i - X \tag{4}$$

где $i = 1, 2, 3,..., n;$

Δ_i - истинные случайные погрешности результатов l_i измерений, т.е. уклонения результатов измерений от истинного (точного) значения измеряемой величины.

Найдем сумму уравнений (4) и разделим ее на число измерений.

$$\frac{[\Delta]}{n} = \frac{[l]}{n} - x \tag{5}$$

Введем обозначения:

$$\frac{[\Delta]}{n} = \eta \tag{6}$$

$$\frac{[l]}{n} = x \tag{7}$$

Величину $x = [l]/n$ называют простой арифметической серединой или средним арифметическим из результатов l_i равноточных измерений. Выражение $\eta = [\Delta]/n = x - X$ - есть истинная случайная погрешность простой арифметической середины, т.е. это уклонение простой арифметической середины от истинного (точного) значения X измеряемой величины.

По четвертому свойству случайных погрешностей

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{[\Delta]}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\eta = 0, \tag{8}$$

значит

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{[l]}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}x = X \tag{9}$$

Таким образом, среднее арифметическое из результатов l_i равноточных измерений стремится к истинному (точному) значению X измеряемой величины при неограниченном возрастании числа измерений. Величину x называют еще ***вероятнейшим значением*** измеряемой величины.

1.4.2 Оценка точности результатов ряда равноточных измерений.

Средняя квадратическая погрешность результата отдельного измерения. Предельная и относительная погрешности

В качестве критерия при оценке точности результатов геодезических измерений принята предложенная К.Ф. Гауссом *средняя квадратическая погрешность*, вычисляемая по формуле

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} \tag{10}$$

где **Δ** - истинная случайная погрешность результата,

n - число измерений.

По величине средней квадратической погрешности можно определить *предельную погрешность* **Δ** *пред.*, возможную для данного ряда измерений. В качестве предельной погрешности в геодезии принимают удвоенную среднюю квадратическую погрешность

$$\Delta_{пред} = 2m \tag{11}$$

Если в ряду случайных погрешностей результатов равноточных измерений встречаются такие, которые по абсолютной величине превышают предельную, то такие погрешности считают грубыми. Измерения, в которых обнаружены эти погрешности, выполняют заново.

В ряде случаев для суждения о точности измерений недостаточно знания лишь абсолютного значения средней квадратической погрешности. Например, измерены три отрезка линий местности:

L_1* = 240 *м с погрешностью ***m_1* = ± *0,15 м;***

L_2* = *600 м с погрешностью ***m_2* = ± *0,53 м***;

L_3* = *500 м с погрешностью ***m_3* = ± *0,29 м.***

Если сравнивать средние квадратические погрешности, то наиболее точно измерен первый отрезок. Однако, здесь следует учитывать и длину измеряемого отрезка, т.е. отнести погрешность к величине длины самого отрезка.

В подобных случаях вводят понятие *относительной погрешности*, под которой понимают отношение абсолютной величины средней квадратической погрешности m к значению результата l измеряемой величины, т.е.

$$\frac{m}{l} = \frac{1}{l:m} = \frac{1}{N} = 1:N \tag{12}$$

где $N = l:m$.

Для нашего примера относительные погрешности равны:

$$\frac{m_1}{L_1} = \frac{0,15}{240} = \frac{1}{240:0,15} = \frac{1}{1600}$$

$$\frac{m_2}{L_2} = \frac{0,53}{600} = \frac{1}{600:0,53} = \frac{1}{1100}$$

$$\frac{m_3}{L_3} = \frac{0,29}{500} = \frac{1}{500:0,29} = \frac{1}{1700}$$

Сравнивая дроби, видим, что третье измерение является самым точным.

В значении абсолютной величины средней квадратической погрешности и в знаменателе относительной погрешности следует удерживать две-три значащие цифры.

1.4.3 Вероятнейшие погрешности

Формула (10) К.Ф. Гаусса для средней квадратической погрешности справедлива в том случае, когда результаты *l* измерений сравниваются с истинным (точным) значением ***X*** этой величины. В большинстве случаев практики топографо-геодезических и маркшейдерских работ истинное значение ***X*** измеряемой величины неизвестно и поэтому используют вероятнейшее значение его *x*, определяемое по формуле (7). В этом случае среднюю квадратическую погрешность результата отдельного измерения ряда равноточных измерений определяют по вероятнейшим погрешностям.

Пусть $l_1, l_2, l_3, ..., l_n$ - результаты равноточных измерений одной и той же величины, $x = \frac{[l]}{n}$ - простая арифметическая середина.

Составим разности

$$l_i - x = v_i \tag{13}$$

где $i = 1, 2, 3, ..., n$

n - число измерений;

v_i - вероятнейшие погрешности результатов l_i измерений, т.е. уклонения значений каждого результата l_i от простой арифметической середины, от вероятнейшего значения x измеряемой величины.

Сложим уравнения (13) и разделим на их число

$$\frac{[l]}{n} - x = \frac{[v]}{n} \tag{14}$$

но $x = \frac{[l]}{n}$,

тогда

$$[v] = 0 \tag{15}$$

т.е. сумма вероятнейших погрешностей результатов равноточных измерений равна нулю при любом числе измерений.

Составим разности уравнений (1) и (13)

$$\Delta_i - v_i = l_i - X - l_i + x \tag{16}$$

но, $x - X = \eta = [\Delta]/n$ - истинная случайная погрешность простой арифметической середины, тогда

$$\Delta_i = v_i + \eta \tag{17}$$

Выражение (17) есть уравнение связи истинных и вероятнейших погрешностей результатов равноточных измерений.

Возведем уравнения (17) в квадрат, сложим и разделим на их число

$$\frac{[\Delta^2]}{n} = \frac{[v^2]}{n} + \eta^2 + 2\eta\frac{[v]}{n} \tag{18}$$

но $\frac{[\Delta^2]}{n} = m^2$; $[v] = 0$; $\eta^2 = \frac{[\Delta^2]}{n^2}$;

тогда
$$m^2 = \frac{[v^2]}{n} + \frac{[\Delta]^2}{n} \qquad (19)$$

Второй член правой части уравнения (19) запишем в виде

$$\eta^2 = \frac{[\Delta]^2}{n^2} = \frac{(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\cdots+\Delta_n)^2}{n^2} = \frac{[\Delta^2]+2[\Delta_j\Delta_k]}{n^2} = \frac{[\Delta^2]}{n^2} + 2\frac{[\Delta_j\Delta_k]}{n^2} \qquad (20)$$

но $\frac{[\Delta]}{n} = m^2$; $\frac{[\Delta_j\Delta_k]}{n} = 0$; - по четвертому свойству случайных погрешностей.

Уравнение (19) с учетом (20) примет вид

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n} + \frac{m^2}{n} \qquad (21)$$

или
$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-1} \qquad (22)$$

Окончательно $m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$.

Выражение (23) является *формулой Бесселя* для средней квадратической погрешности результата отдельного измерения ряда равноточных измерений одной величины.

Практические рекомендации по вычислению простой арифметической середины:

1.Выбирают приближенное значение x' простой арифметической середины, в качестве которого лучше всего взять наименьшее из результатов l_i измерений, т.е.

$$x' = l_{i\,min} \qquad (24)$$

2. Находят разности

$$\varepsilon_i = l_i - x'. \qquad (25)$$

3. Вычисляют простую арифметическую середину

$$x = x' + \frac{[\varepsilon]}{n}. \qquad (26)$$

Оценка точности функций измеренных величин

В большинстве случаев практики топографо-геодезических и маркшейдерских работ искомые величины получают в результате вычислений как функции измеренных величин. Полученные при этом результаты будут содержать погрешности, которые зависят как от погрешностей аргументов (измеренных величин), так и от вида функций.

Возникает задача оценки точности функций измеренных аргументов.

1.4.4 Средняя квадратическая погрешность функции общего вида

Дана функция

$$U = f(X_1, X_2, X_3, \cdots, X_k) \tag{27}$$

где $\boldsymbol{X_1, X_2, X_3, ..., X_k}$ - точные (истинные) значения измеряемых величин.

Пусть в результате измерений получены приближенные значения $\boldsymbol{l_1, l_2, l_3, l_4, ..., l_k}$ этих величин.

Тогда

$$u = f(l_1, l_2, l_3, \cdots l_k) \tag{28}$$

- приближенное значение функции U.

Составим разность уравнений (27) и (28)

$$\Delta u = u - U = f(l_1, l_2, l_3, \cdots, l_k) - f(X_1, X_2, X_3, \cdots, X_k) \tag{29}$$

которая является истинной случайной погрешностью функции U.

Разности

$$\Delta_i = l_i - X_i \tag{30}$$

- суть истинные случайные погрешности аргументов l_i, где i =1,2,…, k.

Тогда

$$\Delta u = f(l_1, l_2, l_3, \cdots, l_k) - f(l_1 - \Delta_1, l_2 - \Delta_2, \cdots, l_k - \Delta_k) \tag{31}$$

Чтобы найти линейную зависимость между погрешностями аргументов и погрешностью функции, продифференцируем функцию (28).

$$du = \frac{\partial f}{\partial l_1} dl_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2} dl_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial l_k} \tag{32}$$

где $\frac{\partial f}{\partial l_1}, \frac{\partial f}{\partial l_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial l_k}$ - частные производные функции по каждому из аргументов.

Заменим в выражении (32) дифференциалы истинными случайными погрешностями функции и аргументов

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial l_1} \Delta_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2} \Delta_2 + \frac{\partial f}{\partial l_3} \Delta_3 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial l_k} \Delta_k \tag{33}$$

При многократном измерении аргументов, например n раз, получим

$$\Delta u_1 = \frac{\partial f}{\partial l_{1,i}}\Delta_{1,i} + \frac{\partial f}{\partial l_{2,i}}\Delta_{2,i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial l_{k,i}} \qquad (34)$$

где $i = 1,2,3,...,k$.

Производные функции по соответствующим аргументам в разных измерениях практически остаются постоянными и могут быть вычислены по приближенным значениям аргументов $l_{1,0}$, $l_{2,0}$, $l_{3,0}$,..., $l_{k,0}$, в качестве которых можно взять $l_{1,0} = l_{1,1}$, $l_{2,0} = l_{2,1}$,..., $l_{k,0} = l_{k,1}$, т.е. значения аргументов, полученные при первом измерении определяемых величин.

В соответствии с этим можно принять

$$\left.\begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial l_{1,1}} \approx \frac{\partial f}{\partial l_{1,2}} \approx \frac{\partial f}{\partial l_{1,3}} \approx \cdots \approx \frac{\partial f}{\partial l_{1,k}} \approx \left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)_0, \\ \frac{\partial f}{\partial l_{2,1}} \approx \frac{\partial f}{\partial l_{2,2}} \approx \frac{\partial f}{\partial l_{2,3}} \approx \cdots \approx \frac{\partial f}{\partial l_{2,n}} \approx \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)_0, \\ \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial l_{k,1}} \approx \frac{\partial f}{\partial l_{k,2}} \approx \frac{\partial f}{\partial l_{k,3}} \approx \cdots \approx \frac{\partial f}{\partial l_{k,n}} \approx \left(\frac{\partial f}{\partial l_k}\right)_0 \end{matrix}\right\} \qquad (35)$$

С учетом (35) выражение (34) примет вид

$$\Delta u_i = \left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)_0 \Delta_{1,i} + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)_0 \Delta_{2,i} + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial l_k}\right)_0 \Delta_{k,i} \qquad (36)$$

Возведем уравнения (36) в квадрат, сложим и разделим на их число

$$\frac{[\Delta u^2]}{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)_0^2 \frac{[\Delta l_1{}^2]}{n} + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)_0^2 \frac{[\Delta l_2^2]}{n} + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial l_k}\right)_0^2 \frac{[\Delta l_k^2]}{n} + 2\left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)_0 \frac{[\Delta l_1 \Delta l_2]}{n} + 2\left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial l_3}\right)_0 \frac{[\Delta l_1 \Delta l_3]}{n} + \cdots + 2\left(\frac{\partial f}{\partial l_{k-1}}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial l_k}\right)_0 \frac{[\Delta l_{k-1} \Delta l_k]}{n} \qquad (37)$$

На основании (3) и (8) можно записать

$$\frac{[\Delta_1 \Delta_2]}{n} = 0, \quad \frac{[\Delta_1 \Delta_3]}{n} = 0, \cdots, \frac{[\Delta_{k-1} \Delta_k]}{n} = 0,$$

$$и \ \frac{[\Delta u^2]}{n} = m_u^2, \ \frac{[\Delta_1^2]}{n} = m_1^2, \ \frac{[\Delta_2^2]}{n} = m_2^2, \cdots, \frac{[\Delta_k^2]}{n} = m_k^2 \qquad (38)$$

Выражение (37) с учетом (38) примет вид

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)_0^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)_0^2 m_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial l_k}\right)_0^2 m_k^2 \qquad (39)$$

или

$$m_u = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)_0^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)_0^2 m_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial l_k}\right)_0^2 m_k^2} \qquad (40)$$

Таким образом, *средняя квадратическая погрешность функции независимых аргументов равна корню квадратному из суммы квадратов произведений частных производных функции по каждому из аргументов на средние квадратические погрешности соответствующих аргументов.*

1.4.5 Средняя квадратическая погрешность простой арифметической середины

Формулу (7) для простой арифметической середины перепишем в виде

$$x = \frac{[l]}{n} = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_n}{n} = \frac{1}{n} l_1 + \frac{1}{n} l_2 + \cdots + \frac{1}{n} l_n \qquad (41)$$

где $\boldsymbol{l_i}$- результаты равноточных измерений одной и той же величины;

i = 1, 2, 3,..., *n;*

n - число измерений.

Из уравнения (39) имеем

$$m_x^2 = M^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial l_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial l_2}\right)^2 m_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial x}{\partial l_2}\right)^2 m_n^2$$

Но $\frac{\partial x}{\partial l_i} = \frac{1}{n}$, тогда

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m.$$

$$M^2 = \frac{1}{n^2} m_1^2 + \frac{1}{n^2} m_2^2 + \cdots + \frac{1}{n^2} m_n^2 \qquad (42)$$

Так как измерения равноточные, т.е. $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m$ (43)

Следовательно, выражение (42) примет вид

$$M^2 = n \frac{1}{n^2} m^2 = \frac{m^2}{n}, \qquad (44)$$

откуда

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \qquad (45)$$

Средняя квадратическая погрешность простой арифметической середины в $\sqrt{n}$ *раз меньше средней квадратической погрешности результата каждого отдельного измерения.*

Сравнивая формулу (44) и второй член правой части уравнения (21), можно сделать вывод, что

$$\eta^2 = \frac{m^2}{n}, \qquad \eta = \frac{m}{\sqrt{n}} = M,$$

т.е. *истинная случайная погрешность простой арифметической середины равна средней квадратической погрешности простой арифметической середины.*

1.4.6 Оценка точности результатов угловых измерений в триангуляции

Известно, что сумма внутренних углов плоского треугольника равна 180°,

т.е. $\beta_{1,0} + \beta_{2,0} + \beta_{3,0} = 180^{o}$ (46)

где $\beta_{1,0}$, $\beta_{2,0}$, $\beta_{3,0}$ - истинные (точные) значения углов.

Пусть β_1, β_2, β_3 - результаты измерения этих углов, т.е. приближенные значения углов.

Тогда, согласно (1), имеем

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 - \beta_{1,0} = \Delta_1, \\ \beta_2 - \beta_{2,0} = \Delta_2, \\ \beta_3 - \beta_{3,0} = \Delta_3, \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

$\Delta_{\boldsymbol{1}}$, $\Delta_{\boldsymbol{2}}$, $\Delta_{\boldsymbol{3}}$ - истинные случайные погрешности результатов измерений.

Перепишем равенство (46) с учетом формул (47)

$$(\beta_1 - \Delta_1) + (\beta_2 - \Delta_2) + (\beta_3 - \Delta_3) = 180^o; \tag{48}$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) = 180^o; \tag{49}$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 180^o = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3. \tag{50}$$

Обозначим

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \omega. \tag{51}$$

ω - называют *угловой невязкой* в треугольнике, т.е. это истинная случайная погрешность суммы внутренних углов треугольника.

Тогда уравнение (50) можно записать в виде

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 180^o = \omega, \tag{52}$$

или

$$\sum_1^3 \beta - 180^o = \omega. \tag{53}$$

Пусть равноточно измерены углы в n треугольниках, для каждого из которых справедливы равенства (51), т.е.

$$\Delta_{1,i} + \Delta_{2,i} + \Delta_{3,i} = \omega_i. \tag{54}$$

где i = 1, 2, 3,...., n - номер треугольника.

Возведем уравнения (54) в квадрат, сложим и разделим на их число:

$$\frac{[\Delta_1^2]}{n}+\frac{[\Delta_2^2]}{n}+\frac{[\Delta_3^2]}{n}+2\frac{[\Delta_1\Delta_2]}{n}+2\frac{[\Delta_1\Delta_3]}{n}+2\frac{[\Delta_2\Delta_3]}{n}=\frac{[\omega^2]}{n}. \qquad (55)$$

На основании (3) и (7) можно записать

$$\frac{[\Delta_1\Delta_2]}{n}=0; \quad \frac{[\Delta_1\Delta_3]}{n}=0; \quad \frac{[\Delta_2\Delta_3]}{n}=0;$$

$$\frac{[\Delta_1^2]}{n}=m_1^2; \quad \frac{[\Delta_2^2]}{n}=m_2^2; \quad \frac{[\Delta_3^2]}{n}=m_3^2.$$

Тогда

$$\frac{[\omega^2]}{n}=m_1^2+m_2^2+m_3^2, \qquad (56)$$

где m_1 , m_2 , m_3 - средние квадратические погрешности результатов измерений углов β_1 , β_2 , β_3 в каждом из треугольников.

Так как измерения равноточные, т.е. $m_1 = m_2 = m_3 = m_\beta$, то

$$\frac{[\omega^2]}{n}=3m_\beta^2, \qquad (57)$$

или

$$m_\beta=\sqrt{\frac{[\omega^2]}{3n}}. \qquad (58)$$

Это формула *Ферреро*, по которой обычно выполняется оценка точности результатов измерений горизонтальных углов в триангуляции.

1.4.7 Оценка точности результатов ряда двойных равноточных измерений

Очень часто в практике геодезических и маркшейдерских работ искомую величину определяют по результатам двукратных равноточных измерений этой величины. Например, горизонтальные углы измеряют двумя полуприёмами, превышение на станции при геометрическом нивелировании определяется по черным и красным сторонам реек, длины отрезков линий местности находят из результатов измерений этих отрезков в прямом и обратном направлениях.

Возникает задача оценки точности этих результатов.

Имеем ряд величин, истинные значения которых равны

$$L_1, L_2, L_3, \cdots, L_n. \qquad (59)$$

Пусть каждая из этих величин измерена равноточно дважды и получены результаты:

$$l_1, l_2, l_3, \cdots, l_n; \tag{60}$$

$$l_1', l_2', l_3', \cdots, l_n', \tag{61}$$

Составим разности между результатами измерений и их истинными значениями:

$$l_i - L_i = \Delta_i; \tag{62}$$

$$l_i' - L_i = \Delta_i', \tag{63}$$

где *i = 1, 2, 3,..., n*.

Найдем разности уравнений (62) и (63)

$$l_i' - l_i = \Delta_i' - \Delta_i \tag{64}$$

и обозначим

$$\Delta_i' - \Delta_i = d_i, \tag{65}$$

здесь Δ_i' и Δ_i - истинные случайные погрешности результатов.

Возведем уравнения (65) в квадрат, сложим и разделим на их число

$$\frac{[\Delta'^2]}{n} + \frac{[\Delta^2]}{n} + 2\frac{[\Delta'\Delta]}{n} = \frac{[d^2]}{n}. \tag{66}$$

На основании (3) и (7) запишем

$$\frac{[\Delta'^2]}{n} = m'^2; \quad \frac{[\Delta^2]}{n} = m^2; \quad \frac{[\Delta'\Delta]}{n} = 0,$$

тогда

$$m'^2 + m^2 = \frac{[d^2]}{n}. \tag{67}$$

Так как измерения равноточные, т.е. $m'=m=m_l$, то

$$2m_l^2 = \frac{[d^2]}{n}, \quad m_l = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \tag{68}$$

При двойных равноточных измерениях за окончательное значение принимают среднее арифметическое из результатов отдельных измерений, т.е.

$$l_0 = \frac{l + l'}{2},$$

тогда

$$m_{l_0} = \frac{m_l}{\sqrt{2}} \quad или \quad m_{l_0} = 0{,}5\sqrt{\frac{[d'^2]}{n}} \tag{69}$$

Формулы (68) и (69) справедливы лишь в том случае, если разности d_i не содержат систематических погрешностей.

Пусть разности содержат систематическую погрешность θ , т.е.

$$d_i = \Delta_i' - \Delta_i + \theta. \tag{70}$$

Сложим уравнения (70) и разделим на их число

$$\frac{[d]}{n} = \frac{[\Delta']}{n} - \frac{[\Delta]}{n} + \theta. \tag{71}$$

На основании четвертого свойства случайных погрешностей имеем

$$\frac{[\Delta']}{n} = 0, \qquad \frac{[\Delta]}{n} = 0,$$

т.е.

$$\frac{[d]}{n} = \theta \tag{72}$$

Среднее арифметическое из разностей результатов двойных равноточных измерений отлично от нуля и численно равно систематической погрешности этих результатов.

Вычтем из каждой разности d_i величину систематической погрешности θ, т.е. образуем новые разности

$$d_i' = d_i - \theta \tag{73}$$

Сложив равенства (73) и поделив их на ***n***, получим

$$\frac{[d']}{n} = \frac{[d]}{n} - \theta,$$

но $$\frac{[d]}{n} = \theta,$$

тогда $$\frac{[d']}{n} = 0, \tag{74}$$

т.е. *среднее арифметическое из разностей результатов двойных равноточных измерений, свободных от систематических погрешностей, всегда равно нулю*. Разности d', как уклонения d_i от простой арифметической середины и обладающие свойством $[d'] = 0$, можно считать вероятнейшими погрешностями разностей d_i.

Применяя к ним формулу ***Бесселя*** для средней квадратической погрешности, запишем

$$m_d = \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}}, \tag{75}$$

а $$m_l = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}}. \tag{76}$$

Средняя квадратическая погрешность среднего арифметического из результатов l_i и l'_i будет равна

$$m_{l_0} = \frac{m_l}{\sqrt{2}} = 0{,}5\sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}}. \qquad (77)$$

Вычисление значения числителя подкоренного выражения можно проконтролировать по формуле

$$[d'^2] = [d^2] - \frac{[d]^2}{2}. \qquad (78)$$

Примечание. Оценку точности по разностям результатов двойных равноточных измерений следует выполнять по формулам (68) и (69), если разности удовлетворяют условию

$$|[d]| \leq 0{,}25[|d|], \qquad (79)$$

в противном случае, по формулам (75) - (77).

1.4.8 Примеры оценки точности результатов равноточных измерений одной величины и функций независимо измеренных величин

Задача 1. По результатам равноточных измерений горизонтального угла девятью приемами (см. табл. 1) найти наиболее точное по вероятности значение угла, средние квадратические погрешности измерения каждого отдельного угла и простой арифметической середины.

Таблица 1

Оценка точности результатов измерения отдельного горизонтального угла

Номера приемов ***i***	Результаты измерений β_i	ε_i	ε_i^2	υ_i	υ_i^2	Основные формулы, вспомогательные вычисления
1	2	3	4	5	6	7
1	$32^o\,23'\,44''$	+ 4	16	-0,6"	0,36	1.$\beta' = \beta_{i,min}$
2	40	0	0	-4,6	21,16	2.$\varepsilon_i = \beta_i - \beta'$
3	43	+ 3	9	-1,6	2,56	3.$\beta = \beta' + [\varepsilon]/n =$ $= 32^o\,23'44{,}56''$
4	45	+ 5	25	+0,4	0,16	
5	46	+ 6	36	+1,4	1,96	4.$\beta_{окр.} = 32^o\,23'\,44{,}6''$
6	43	+ 3	9	-1,6	2,56	

Номера приемов i	Результаты измерений β_i	ε_i	ε_i^2	υ_i	υ_i^2	Основные формулы, вспомогательные вычисления
1	2	3	4	5	6	7
7	48	+ 8	64	+3,4	11,56	5.$\delta=\beta-\beta_{окр.}= -0{,}04''$
8	45	+ 5	25	+0,4	0,16	
9	$32^o\ 23'\ 47''$	+ 7	49	+2,4	5,76	6. $\upsilon_i = \beta_i - \beta_{окр.}$
$\sum$		42	233	-0,4	46,20	7. $[\upsilon] = \upsilon_1 + \upsilon_2 + \cdots + \upsilon_n$
β' β $\beta_{окр.}$	$32^o\ 23'\ 40''$ $32^o 23' 44{,}56''$ $32^o\ 23'\ 44{,}6''$	$[\varepsilon]^2$=1681 Окончательный результат : $\beta = 32^\circ\ 23'\ 44{,}6'' \pm 0{,}80''$ $m_\beta = \pm\ 2{,}4''$ M = $\pm\ 0{,}80''$				**Контроль**: $[\upsilon] = \delta \cdot n$ $[\upsilon^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}$ $m_\beta = \sqrt{\frac{[\upsilon^2]}{n-1}}$

Вычисления выполняют в следующей последовательности:

1. Выбирают приближенное значение β' простой арифметической середины как наименьшее из результатов измерений, т.е. $\beta' = \beta_{i,min}$. В нашем примере это значение равно $\beta' = \beta_2 = 32^\circ\ 23'\ 40''$.

2. Вычисляют уклонения ε_i результатов измерений β_i от этого приближенного значения $\varepsilon_i = \beta_i - \beta'$ и сумму этих уклонений

$$[\varepsilon] = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n.$$

3. В колонке 4 табл.2 вычисляют квадраты ε^2 и их сумму $[\varepsilon^2]$.

4. Вычисляют простую арифметическую середину β - наиболее точное по вероятности значение измеряемого угла.

5. Находят вероятнейшие погрешности υ_i как разности результатов отдельных измерений и округленного значения $\beta_{окр.}$, т.е., $\upsilon_i = \beta_i - \beta_{окр.}$ их сумму $[\upsilon] = \upsilon_1 + \upsilon_2 + \cdots + \upsilon_n$ с контролем $[\upsilon] = \delta \cdot n$, где $\delta=\beta-\beta_{окр.}$ - погрешность округления среднего арифметического.

6. В графе 6 вычисляют квадраты вероятнейших погрешностей υ_i^2 и их сумму $[\upsilon^2] = \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \cdots + \upsilon_n^2$ с контролем $[\upsilon^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}$.

7. По формуле (23) Бесселя вычисляют среднюю квадратическую погрешность результата каждого отдельного измерения:

$$m_\beta = \sqrt{\frac{[\upsilon^2]}{n-1}}$$

8. По формуле (44) находят среднюю квадратическую погрешность простой арифметической середины:

$$M = \frac{m_\beta}{\sqrt{n}}$$

9. Окончательный результат записывают в виде

$$\beta = \beta_{окр.} \pm M.$$

Задача 2. В каждом треугольнике микротриангуляции (рис. 1) измерено одинаково точно по три внутренних горизонтальных угла (см. табл. 2). Вычислить среднюю квадратическую погрешность результатов измерений каждого отдельного угла, применив формулу Ферреро:

$$m_\beta = \sqrt{\frac{[\omega^2]}{3n}},$$

где $\omega_i = [\beta] - 180^o$ - угловые невязки в треугольниках; n – число треугольников.

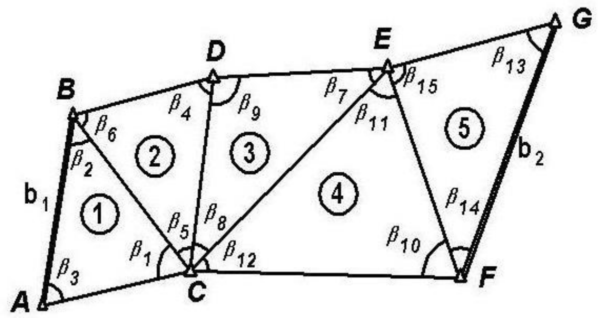

Рис. 1. Схема сети микротриангуляции

Таблица 2

Обработка результатов угловых измерений в микротриангуляции

Названия углов	Номера треугольников и значения измеренных углов				
	1	2	3	4	5

β_1	80º 07,7′	74º 21,6′	36º 39,2′	39º 17,4′	69º 49,6′
β_2	50 58,3	64 35,5	71 49,6	96 15,8	36 39,2
β_3	48 53,1	41 01,8	71 32,6	44 26,1	73 32,4
$\Sigma\beta$	179º 59,1′	179º58,9′	180º01,4′	179º 59,3′	180º 01,2′
$\omega_\beta = \Sigma\beta - 180^o$	- 0,9′	- 1,1′	+ 1,4′	- 0,7′	+ 1,2′
ω^2	0,81	1,21	1,96	0,49	1,44

$$m_\beta = \sqrt{\frac{5{,}91}{15}} = \sqrt{0{,}394} = \pm 0{,}63'.$$

Задача 3. В теодолитном ходе равноточно измерено 11 горизонтальных углов, каждый со средней квадратической погрешностью $m_\beta = \pm 0{,}5'$. Определить среднюю квадратическую и предельную погрешности суммы этих углов.

Имеем функцию $u = \sum\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots + \beta_{11}$.

Частные производные ее по каждому из аргументов равны $\frac{\partial u}{\partial \beta} = 1$.

Тогда $m_u = m_{\sum\beta} = m_\beta\sqrt{n} = 0{,}5'\sqrt{11} = \pm 1{,}66'$;

и $\Delta_{пред.} = 2m_u = 2 \cdot 1{,}66' \approx \pm 3{,}3'$.

Задача 4. Горизонтальный угол β (см. рис. 2) измерен теодолитом 2Т30 одним полным приемом способом «приемов». Определить среднюю квадратическую погрешность среднего арифметического из значений результатов измерений угла в полуприемах, если средняя квадратическая погрешность отсчетов по лимбу составила $m_o = \pm 0{,}5'$. Другими погрешностями пренебречь.

Значение угла в полуприемах вычисляют по формулам:

$$\beta_L = c'_L - a'_L; \qquad \beta_R = c'_R - a'_R,$$

где c_L', c_R', a_L', a_R' - отсчеты по горизонтальному кругу при визировании на точки С и А при положении вертикального круга слева (КЛ) и справа (КП).

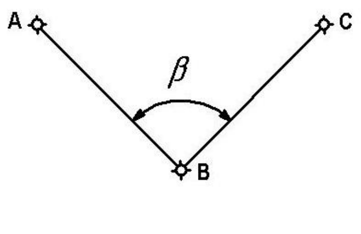

Рис. 2. Схема наблюдений

Вероятнейшее значение горизонтального угла по результатам, полученным в каждом полуприеме, вычисляют по формуле

$$\beta_{ср.} = \frac{\beta_L + \beta_R}{2} = \frac{c_L' - a_L' + c_R' - a_R'}{2} == \frac{1}{2}c_L' - \frac{1}{2}a_L' + \frac{1}{2}c_R' - \frac{1}{2}a_R'.$$

На основании формул (39) – (42) запишем

$$m_{\beta,ср.} = m_0\sqrt{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]} = 0{,}5\sqrt{4\frac{1}{4}} = \pm 0{,}5'.$$

Эту же задачу решим иначе.

1. Определим среднюю квадратическую погрешность результатов измерений угла, полученных в каждом полуприеме

$m_\beta^2 = m_a^2 + m_c^2,$ но $m_a = m_c = m_0 = \pm 0{,}5'$

тогда

$$m_\beta = m_0\sqrt{2} = \pm 0{,}5'\sqrt{2}$$

2. По формуле (42) вычислим среднюю квадратическую погрешность среднего арифметического значения угла, полученного из результатов в каждом полуприеме:

$$m_{\beta,ср.} = \frac{m_\beta}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \pm 0{,}5'.$$

<u>Задача 5.</u> Вычислить среднюю квадратическую и предельную погрешности превышения, определенного на станции при геометрическом нивелировании по двум сторонам нивелирных шашечных реек, если:

- цена деления шкалы рейки $\mu = 10$ мм,
- средняя квадратическая погрешность отсчета по рейке $m_o = \pm 1$ мм.

Другими погрешностями пренебречь.

Превышение вычисляют по формулам:

$$h^ч = a^ч - b^ч; \quad h^к = a^к - b^к; \quad h_{ср.} = \frac{h^ч + h^к}{2}$$

где $a^ч$, $b^ч$ - отсчеты по черным сторонам реек, устанавливаемых в задней и передней точках нивелирного хода;

$a^к$, $b^к$ - то же, по красным сторонам реек.

Перепишем последнюю формулу в виде

$$h_{ср.} = \frac{a^ч - b^ч + a^к - b^к}{2} = \frac{1}{2}a^ч - \frac{1}{2}b^ч + \frac{1}{2}a^к - \frac{1}{2}b^к.$$

Согласно формулам (41) – (44) имеем

$$m_{h,ср.} = m_0\sqrt{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]} = 1мм\sqrt{4\frac{1}{4}} = \pm 1мм;$$

$$\Delta h_{пред.} = 2m_{h,ср.} = \pm 2, мм.$$

<u>Задача 6.</u> Вычислить среднюю квадратическую погрешность результата определения превышения способом тригонометрического нивелирования, если превышение вычислено по формуле

$$h = h' + i - l, \tag{80}$$

где $h' = d\tan\nu$, d = 153,84 м – горизонтальное проложение линии местности, измеренное с относительной погрешностью 1:2000, ν = + 3° 13′ - угол наклона линии визирования, измеренный со средней квадратической погрешностью $m_\nu = \pm 0{,}5'$, i = 1,47 м – высота прибора (теодолита), измеренная с погрешностью m_i = ± 0,002 м.

1.Вычислим превышение: $h = d\tan\nu + i - l = 153{,}83 \cdot 0{,}05620 + 1{,}47 - 2{,}00 = +8{,}12\,м$.

2. Определим частные производные функции (78) по каждому из аргументов: $\frac{\partial h}{\partial d} = \tan\nu$; $\frac{\partial h}{\partial \nu} = \frac{d}{(\cos\nu)^2}$; $\frac{\partial h}{\partial i} = 1$; $\frac{\partial h}{\partial l} = -1$.

3. На основании формулы (38) запишем

$$m_h = \sqrt{(m_d \cdot \tan\nu)^2 + \left(\frac{m_\nu}{\rho \cdot (\cos\nu)^2}\right)^2 + m_i^2 + m_l^2},$$

где ρ = 206265″ = 3437,75′ = 57,2958° - радиан.

4. С учетом $\frac{m_d}{d} = \frac{1}{2000}$; $m_d = \frac{d}{2000} = \frac{153{,}84}{2000} = \pm 0{,}077\,м$

вычислим

$$m_h = \sqrt{(4{,}32 \cdot 10^{-3})^2 + (22{,}4 \cdot 10^{-3})^2 + (5 \cdot 10^{-3})^2 + (2 \cdot 10^{-3})^2}$$
$$= 10^{-3}\sqrt{18{,}66 + 501{,}8 + 25 + 4} = 23{,}4 \cdot 10^{-3} = \pm 0{,}023\,м.$$

1. Окончательно h=+8,12±0,023 м.
2.

<u>Задача 7.</u> В треугольнике АВС (рис.3) равноточно измерены три угла β, α, γ и сторона АВ = ***c***. Определить длины сторон ***a*** и ***b***, средние квадратические и относительные погрешности этих сторон, если: средние квадратические погрешности результатов измерений углов равны $m_\beta = m_\alpha = m_\gamma$ =±0,5'; относительная погрешность результата измерения стороны ***c*** составила $m_c : c$=1:2000.

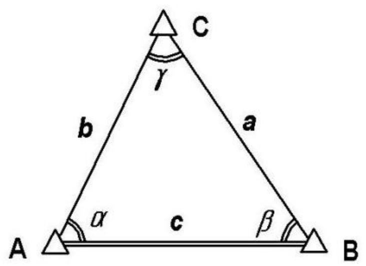

Рис. 3. К решению треугольника

Исходные данные, результаты вычислений и оценка точности приведены в табл. 3.

Таблица 3

Решение треугольника

№ вершин	Результаты измерений углов	Поправки υ_β	Уравненные углы	Синусы углов	Длины сторон d, м	m_d, мм	$\frac{m_d}{d}$
C (γ)	58° 14,7′	0,2′	58° 14,5′	0,85028	156,82	78	1:2000
B (β)	62 52,1	0,2	62 51,9	0,88993	164,13	84	1:1950
A (α)	58 53,9	0,2	58 53,6	0,85621	157,91	81	1:1940
$\sum$ ω 0,7′	180°00,7′ +	- 0,7′	180° 00,0′	$\Delta\omega = 1{,}0'\sqrt{3} = \pm 1{,}7'$ $\upsilon_\beta = -\frac{\omega}{3} = -0{,}2'$			

Основные формулы:

$$a = \frac{c}{\sin\gamma}\sin\alpha\,; \quad b = \frac{c}{\sin\gamma}\sin\beta\,; \tag{81}$$

$$\ln b = \ln c - \ln\sin\gamma + \ln\sin\beta, \tag{82}$$

$$\ln a = \ln c - \ln\sin\gamma + \ln\sin\alpha. \tag{83}$$

Продифференцируем уравнения (82) и (83):

$$\frac{db}{b} = \frac{dc}{c} - \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\cdot\frac{d\gamma}{\rho} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\cdot\frac{d\beta}{\rho}; \tag{84}$$

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c} - \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\cdot\frac{d\gamma}{\rho} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{\rho}. \tag{85}$$

На основании формул (27) – (40) запишем:

$$\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \left(ctg\,\gamma\,\frac{m_\gamma}{\rho}\right)^2 + \left(ctg\,\beta\,\frac{m_\beta}{\rho}\right)^2; \tag{86}$$

$$\left(\frac{m_a}{a}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \left(ctg\,\gamma\,\frac{m_\gamma}{\rho}\right)^2 + \left(ctg\,\alpha\,\frac{m_\alpha}{\rho}\right)^2. \tag{87}$$

Подставляя численные значения в уравнения (86) и (87), получим:

$$\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 = \left(\frac{1}{2000}\right)^2 + \left(0{,}619\,\frac{0{,}5}{3438}\right)^2 + \left(0{,}512\,\frac{0{,}5}{3438}\right)^2 = \left(\frac{1}{1950}\right)^2;$$

$$\frac{m_b}{b} = \frac{1}{1950}; \quad m_b = \pm 0{,}084\,м;$$

$$\left(\frac{m_a}{a}\right)^2 = \left(\frac{1}{2000}\right)^2 + \left(0{,}619\frac{0{,}5}{3438}\right)^2 + \left(0{,}603\frac{0{,}5}{3438}\right)^2 = \left(\frac{1}{1940}\right)^2;$$

$$\frac{m_a}{a} = \frac{1}{1940}; \quad m_a = \pm 0{,}081\,м.$$

<u>Задача 8.</u> Определить средние квадратические погрешности:

- результатов отдельных измерений;
- средних арифметических значений из результатов двойных равноточных измерений длин сторон теодолитного хода;
- относительные погрешности этих сторон.

Исходные данные и математическая обработка результатов измерений представлены в табл. 4.

Таблица 4

Оценка точности результатов двойных равноточных измерений

Номера сторон	Результаты измерений длин сторон хода, *м*		l среднее, *м*	d, *см*	d^2, *см*	d', *см*	d'^2, *см*	$\frac{m_{l,ср.}}{l_{ср.}}$
	l прямо	l обратно						
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	145,65	145,74	145,695	- 9	81	-4,5	20,25	1:4900
2	156,09	156,09	156,090	0	0	4,5	20,25	1:5200
3	205,58	205,62	205,600	- 4	16	0,5	0,25	1:6900
4	144,67	144,63	144,650	4	16	8,5	72,25	1:4800
5	174,56	174,69	174,625	-13	169	-8,5	72,25	1:5800
6	125,51	125,26	125,235	- 5	25	-0,5	0,25	1:4200
m_d = ±6,1см m_l = ±4,3см $m_{l,ср.}$ = ±3,0 см			[ ] = Σ |[d]| [|d|]	-27 27 35	307	0,0 Контроль : $[d'^2] = 185{,}50$	185,50	θ= -4,5см

Обработку результатов измерений выполняют в следующей последовательности.

1. В колонки 2 и 3 таблицы 4 выписывают из полевых журналов результаты l измерений длин сторон.

2. Вычисляют средние арифметические значения (l ср.) из результатов l измерений каждой стороны в прямом и обратном направлениях:

$$l_{ср.} = \frac{l_{прямо} + l_{обратно}}{2},$$

и записывают их в графу 4.

3. Находят разности $d = l_{прямо} - l_{обратно}$ (графа 5) и их сумму

$$[d] = d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_6.$$

4. Проверяют выполнение условия $|\,[\,d\,]\,| \le 0{,}25\,[\,|\,d\,|\,]$;

$|\,[\,d\,]\,| = 27$; $[\,|\,d\,|\,] = 35$; $0{,}25\,[\,|\,d\,|\,] = 8{,}75$;

Условие не выполнено, значит оценку точности результатов измерений следует выполнять по формулам (73) – (75).

5. Вычисляют величину систематической погрешности разностей *d:*

$$\theta = \frac{[d]}{n} = \frac{-27}{6} = -4{,}5\ см.$$

6. В графу 7 записывают разности $d' = d - \theta$, свободные от систематической погрешности θ.

7. Квадраты разностей d'^2, их сумму $[\,d'^2\,]$ заносят в графу 8, контролируя значение суммы по формуле

$$[d'^2] = [d^2] - \frac{[d]^2}{n} = 307 - \frac{27}{6} = 307 - 121{,}5 = 185{,}50.$$

8. По формулам (73) – (75) вычисляют средние квадратические погрешности:

- разностей результатов двойных равноточных измерений

$$m_d = \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}} = \frac{185{,}50}{5} = \pm 6{,}1\ см;$$

- результатов отдельных измерений

$$m_l = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}} = \frac{6{,}1}{\sqrt{2}} = \pm 4{,}3\ см;$$

- средних арифметических значений из результатов двойных равноточных измерений

$$m_{l,ср.} = \frac{m_l}{\sqrt{2}} = \frac{4{,}3}{\sqrt{2}} = \pm 3{,}0\ см.$$

9. В графе 9 записывают относительные погрешности результатов измерений, вычисляемые по формуле

$$m_{l,ср.}/l_{ср.} = 1\!:\left(l_{ср.}/m_{l,ср.}\right)$$

Задача 9. В теодолитном ходе равно точно измерено семь горизонтальных углов двумя полуприемами каждый и получены результаты этих измерений $\beta_{R,i}$ и $\beta_{L,i}$, где $\beta_{R,i}$ – значения углов, полученных в первом полуприеме – при положении вертикального круга теодолита справа (КП); $\beta_{L,i}$ – значения углов, полученных во втором полуприеме – при положении вертикального круга теодолита слева (КЛ); i = 1, 2, 3,…, n - номера углов и их число.

Определить средние квадратические погрешности:

m_β – результатов измерений углов в полуприемах;

$m_{\beta,\text{ср.}}$- средних арифметических значений углов в приемах – по разностям результатов двойных равноточных измерений углов в полуприемах. Решение представлено в таблице 5. Вычисления выполняют в последовательности, указанной для предыдущей задачи.

Таблица 5

Оценка точности результатов измерения горизонтальных углов

Номер углов	Результаты измерений		$d_i=$ $=\beta_R-\beta_L$	d_i^2	Основные формулы и вспомогательные вычисления
	I полуприем β_R	II полуприем β_L			
1	2	3	4	5	6
1	179° 56,9′	179° 56,2′	+ 0,6′	0,36	1. Условие: $\lvert[d]\rvert \leq 0{,}25 \cdot [\lvert d\rvert]$ 1,0' = 0,25·4,0'
2	179 58,1	179 58,9	- 0,8	0,64	
3	180 01,2	180 00,4	+ 0,8	0,64	
4	180 08,5	180 08,0	+ 0,5	0,25	2. $m_\beta = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} = \sqrt{\frac{2{,}54}{14}} = \sqrt{0{,}181} = \pm 0{,}43'$
5	179 46,9	179 47,4	- 0,5	0,25	
6	202 37,8	202 38,0	- 0,2	0,04	
7	179° 43,4′	179° 42,8′	+ 0,6′	0,36	
$m_\beta = \pm\ 0{,}43'$ $m_{\beta,ср.} = \pm\ 0{,}30'$		[ ] = Σ | [d] | [| d |]	+ 1,0′ + 1,0 + 4,0	2,54	3. $m_{\beta,ср.} = \frac{m_\beta}{\sqrt{2}} = \pm 0{,}30'$

1.5 Неравноточные измерения

1.5.1 Общая арифметическая середина. Веса результатов измерений

Пусть имеется физическая величина (угол, отрезок линии, превышение и т.п.), точное (истинное) значение которой равно **X.** Эта величина измерена равноточно N раз несколькими сериями и получены результаты $l_j^{(i)}$, этих измерений. Здесь $\boldsymbol{i = 1, 2, 3, \ldots, k}$ -

номера серий измерений и их число; $\boldsymbol{j}$ =1, 2, 3,…, $\boldsymbol{n_i}$ – номера измерений в каждой серии и их число.

Примем, что число измерений n_i в каждой серии неодинаково, т.е.

$$n_1 \neq n_2 \neq n_3 \neq \cdots \neq n_k. \tag{88}$$

Обозначим среднюю квадратическую погрешность результатов $l_j^{(i)}$ равноточных измерений через $\boldsymbol{\mu}$. В каждой серии можно определить наиболее точное по вероятности значение результата $\boldsymbol{x_i}$, как среднее арифметическое из результатов $l_j^{(i)}$ равноточных измерений:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{l_1^{(1)}+l_2^{(1)}+l_3^{(1)}+\cdots+l_{n_1}^{(1)}}{n_1}; \\ x_2 &= \frac{l_1^{(2)}+l_2^{(2)}+l_3^{(2)}+\cdots+l_{n_2}^{(2)}}{n_2}; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\ x_k &= \frac{l_1^{(k)}+l_2^{(k)}+l_3^{(k)}+\cdots+l_{n_k}^{(k)}}{n_k}, \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

и их средние квадратические погрешности

$$m_1 = \frac{\mu}{\sqrt{n_1}}; \quad m_2 = \frac{\mu}{\sqrt{n_2}}; \quad m_3 = \frac{\mu}{\sqrt{n_3}}; \quad \cdots; \quad m_k = \frac{\mu}{\sqrt{n_k}}. \tag{90}$$

Величины $\boldsymbol{x_i}$ - результаты неравноточных измерений, для которых

$$m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq \cdots \neq m_k \tag{91}$$

по условию (88). Возникает задача, как по результатам x_i неравноточных измерений найти наиболее точное по вероятности значение измеряемой величины X_0.

Так как $l_j^{(i)}$ - результаты равноточных измерений, то вероятнейшее значение $\boldsymbol{X_0}$ из этих результатов равно

$$X_0 = \frac{l_1^{(1)}+l_2^{(1)}+\cdots+l_{n_1}^{(1)}+l_1^{(2)}+l_2^{(2)}+\cdots+l_{n_2}^{(2)}+\cdots+l_1^{(k)}+l_2^{(k)}\cdots+l_{n_k}^{(k)}}{n_1+n_2+n_3+\cdots+n_k} \tag{92}$$

В свою очередь,

$$\left.\begin{aligned} l_1^{(1)} + l_2^{(1)} + l_3^{(1)} + \cdots + l_{n_1}^{(1)} &= x_1 \cdot n_1; \\ l_1^{(2)} + l_2^{(2)} + l_3^{(2)} + \cdots + l_{n_2}^{(2)} &= x_2 \cdot n_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots; \\ l_1^{(k)} + l_2^{(k)} + l_3^{(k)} + \cdots + l_{n_k}^{(k)} &= x_k \cdot n_k; \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

С учетом (93) равенство (92) перепишем в виде

$$X_0 = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 + \cdots + x_k \cdot n_k}{n_1+n_2+n_3+\cdots n_k} \tag{94}$$

Обозначив $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k = N,$ (95)

получим

$$X_0 = \frac{[x_i \cdot n_i]}{[n_i]} = \frac{[x_i \cdot n_i]}{N}. \tag{96}$$

Из выражения (90) видим, что

$$n_1 = \frac{\mu^2}{m_1^2};\ \ n_2 = \frac{\mu^2}{m_2^2};\ \cdots;\ n_k = \frac{\mu^2}{m_k^2}. \tag{97}$$

Подставим значения для n_i в равенства (94), (97):

$$X_0 = \frac{x_1\frac{\mu^2}{m_1^2}+x_2\frac{\mu^2}{m_2^2}+\cdots+x_k\frac{\mu^2}{m_k^2}}{\frac{\mu^2}{m_1^2}+\frac{\mu^2}{m_2^2}+\cdots+\frac{\mu^2}{m_k^2}}. \tag{98}$$

Величины

$$\frac{\mu^2}{m_i^2} = p_i \tag{99}$$

называют *весами* результатов x_i неравноточных измерений.

С учетом (99) выражение (98) примет вид

$$X_0 = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots + x_k \cdot p_k}{p_1 + p_2 + \cdots + p_k} = \frac{[p \cdot x]}{[p]} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i}{\sum_{i=1}^{k} p_i}. \tag{100}$$

Величину $\boldsymbol{X_0}$, вычисляемую по формуле (100) называют *общей арифметической серединой, средним весовым***,** или *средневзвешенным значением* определяемой величины из результатов неравноточных измерений.

Величина общей арифметической середины не изменится, если все веса изменить в одинаковое число раз. Этим свойством следует пользоваться для упрощения вычислений. На практике общую арифметическую середину чаще всего вычисляют по формуле

$$X_0 = x' + \frac{[p\varepsilon]}{[p]}, \tag{101}$$

которая получена из следующих рассуждений.

В ряду результатов x_i неравноточных измерений выберем наименьший по абсолютной величине и примем его в качестве приближенного значения искомой величины, т.е.

$$x' = x_{i,min}. \tag{102}$$

Образуем разности

$$\varepsilon_i = x_i - x'. \tag{103}$$

Умножив обе части этого равенства на соответствующие веса p_i , получим

$$p_i \cdot \varepsilon_i = p_i \cdot x_i - p_i \cdot x'. \tag{104}$$

Найдем сумму уравнений (102) и разделим ее на [p_i]

$$\frac{[p_i \cdot \varepsilon_i]}{[p_i]} = \frac{[p_i \cdot x_i]}{[p_i]} - x', \tag{105}$$

Но $$\frac{[p_i \cdot x_i]}{[p_i]} = X_0,$$

тогда $X_0 = x' + \frac{[p_i \cdot \varepsilon_i]}{[p_i]}$, т.е. получена формула (101).

1.5.2 Средняя квадратическая погрешность единицы веса

На основании формулы (99) можно сделать вывод, что веса результатов измерений – положительные числа, обратно пропорциональные квадратам средних квадратических погрешностей этих результатов.

Пусть в ряду результатов измерений x_i существует такой x_j, вес которого равен единице, т.е. $p_j = 1$.

Тогда

$$p_j = \frac{\mu^2}{m_j^2} \quad и \quad \mu^2 = m_j^2; \quad \mu = m_j. \tag{106}$$

Величину $\mu = m_j$ называют *средней квадратической погрешностью единицы веса* или средней квадратической погрешностью результата измерения, вес которого равен единице.

Из выражения (99) видно также, что

$$\mu = m_i \sqrt{p_i} \tag{107}$$

или

$$\mu^2 = m_1^2 p_1 = m_2^2 p_2 = \cdots = m_k^2 p_k, \tag{108}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_2^2}{m_1^2}; \quad \frac{p_2}{p_3} = \frac{m_3^2}{m_2^2}; \quad \cdots; \frac{p_{k-1}}{p_k} = \frac{m_k^2}{m_{k-1}^2}. \tag{109}$$

1.5.3 Средняя квадратическая погрешность и вес общей арифметической середины

Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ – результаты неравноточных измерений; $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ – веса этих результатов.

Тогда

$$X_0 = \frac{[px]}{[p]} = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \cdots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n} = \frac{p_1}{[p]}x_1 + \frac{p_2}{[p]}x_2 + + \frac{p_3}{[p]}x_3 + \cdots \frac{p_n}{[p]}x_n. \tag{110}$$

Обозначим $\frac{p_i}{[p]} = k_i$, где $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. С учетом обозначения формула (110) примет вид

$$X_0 = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + \cdots + k_nx_n. \tag{111}$$

Согласно с (42) можно записать

$$M_0^2 = m_{X_0}^2 = k_1^2 m_1^2 + k_2^2 m_2^2 + \cdots + k_n^2 m_n^2 = \frac{p_1^2}{[p]^2} m_1^2 + + \frac{p_2^2}{[p]^2} m_2^2 + \frac{p_3^2}{[p]^2} m_3^2 + \cdots + \frac{p_n^2}{[p]^2} m_n^2. \tag{112}$$

Но $p_i \cdot m_i^2 = \mu^2$, тогда

$$M_0^2 = \frac{\mu^2 p_1 + \mu^2 p_2 + \dots + \mu^2 p_n}{[p]^2} = \frac{\mu^2 [p]}{[p]^2} = \frac{\mu^2}{[p]} \qquad (113)$$

или

$$M_0 = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}, \qquad (114)$$

т.е. *средняя квадратическая погрешность общей арифметической середины равна отноношению средней квадратической погрешности единицы веса к корню квадратному из суммы весов результатов измерений.*

На основании формул (99) и (114) имеем

$$P = \frac{\mu^2}{M_0^2} = \frac{\mu^2}{\mu^2/[p]} = [p]. \qquad (115)$$

Таким образом, *вес общей арифметической середины равен сумме весов результатов неравноточных измерений, из которых она определена.*

1.5.4 Вычисление средней квадратической погрешности единицы веса

Рассмотрим способы вычисления средней квадратической погрешности единицы веса, применяемые в геодезической практике.

1. Вычисление $\boldsymbol{\mu}$ при установлении весов по известным средним квадратическим погрешностям $\boldsymbol{m}$ результатов измерений. Веса результатов измерений в этом случае устанавливают по формуле

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2} = \frac{c}{m_i^2}, \qquad (116)$$

в которой коэффициент c назначается с таким расчетом, чтобы значения весов $\boldsymbol{p_i}$ было близким к единице. Тогда $\boldsymbol{\mu}$ вычисляют из выражения

$$\mu = \sqrt{c}. \qquad (117)$$

2. Вычисление $\boldsymbol{\mu}$ по известным средним квадратическим погрешностям и весам однородных результатов измерений выполняют по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[m_i^2 p_i]}{n}}, \qquad (118)$$

где $\boldsymbol{i} = 1,2,3,\dots, n$; n – число измерений, для которых известны m_i и p_i.

3. Вычисление $\boldsymbol{\mu}$ по известным истинным случайным погрешностям $\boldsymbol{\Delta_i}$ функций измеренных величин и их весам p_i:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_i \Delta_i^2]}{n}}. \qquad (119)$$

Истинные случайные погрешности функций результатов измерений называют невязками и обозначают**:**

а) $\boldsymbol{f_\beta}$ – угловая невязка в замкнутом многоугольнике, вычисляемая по формуле

$$f_\beta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i - 180^o(n-2), \qquad (120)$$

где $\boldsymbol{n}$ – число внутренних углов многоугольника, β_i - результаты измерений углов;

б) $\boldsymbol{\omega}$ - угловая невязка в треугольнике, которую находят из выражения

$$\omega = \sum_{i=1}^{3} \beta_i - 180^o, \qquad (121)$$

где $\boldsymbol{\beta_i}$ - результаты измерений внутренних углов треугольника;

с) $\boldsymbol{f_x}$ и $\boldsymbol{f_y}$ - невязки в приращениях координат полигонометрических или теодолитных ходов, определяемые по формулам

$$f_x = \sum \Delta x - (X_к - X_н) \;\; и \;\; f_y = \sum \Delta y - (Y_к - Y_н), \tag{122}$$

где Δx и Δy - вычисленные приращения координат; $X_к$, $Y_к$ и $X_н$, $Y_н$ - координаты опорных геодезических пунктов в конце и начале хода;

г) $\boldsymbol{f_h}$ – высотная невязка нивелирного хода, значение которой вычисляют по формуле

$$f_h = \sum h - (H_к - H_н), \tag{123}$$

где h – значения средних превышений на станциях; $H_к$, $H_н$ - высотные отметки реперов в конце и начале нивелирного хода.

4. Вычисление $\boldsymbol{\mu}$ по вероятнейшим погрешностям υ результатов измерений, т.е. по внутренней сходимости результатов

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_i v_i^2]}{n-1}}, \tag{124}$$

где $i = 1,2,3,\ldots,n$ – номера и число измерений, p_i – веса результатов.

1.5.5 Вычисление весов функций независимых аргументов

Имеем функцию

$$F = f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \tag{125}$$

и веса аргументов $p_{x_1}, p_{x_2}, p_{x_3}, \cdots, p_{x_n}$.

На основании формулы (39) можно написать

$$m_F^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 m_{x_2}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 m_{x_3}^2 + \cdots + + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 m_{x_n}^2. \tag{126}$$

Разделим обе части этого равенства на μ^2:

$$\frac{m_F^2}{\mu^2} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \frac{m_{x_1}^2}{\mu^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \frac{m_{x_2}^2}{\mu^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 \frac{m_{x_3}^2}{\mu^2} + \cdots + + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \frac{m_{x_n}^2}{\mu^2}, \tag{127}$$

и, учитывая, что $p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}$, окончательно запишем

$$\frac{1}{P_F} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \frac{1}{P_{x_1}} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \frac{1}{P_{x_2}} + \cdots + + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \frac{1}{P_{x_n}}. \tag{128}$$

1.5.6 Порядок математической обработки результатов неравноточных измерений

Задача 10. Пусть, для определения высоты грунтового репера №29 (см.рис. 4) от фундаментальных реперов № 23 ,24 и 43 до определяемого репера проложено три нивелирных хода. Требуется по результатам трех неравноточных значений высоты репера №29 получить наиболее точное значение высоты этого репера. Высоты исходных реперов считать безошибочными. Исходные данные и результаты вычислений приведены в табл. 6 и 7.

Таблица 6

Исходные данные

Номера ходов	**Высоты репера № 29 H_i, м**	**Число станций в ходах n**
1	403.895	4
2	403.883	7
3	403.890	5

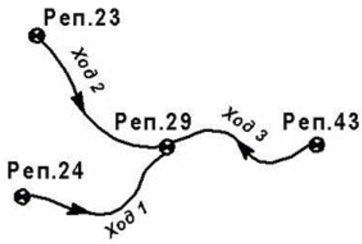

Рис. 4. Схема ходов

Таблица 7

Обработка результатов неравноточных измерений

Номер ходов $\boldsymbol{i}$	Высоты репера №29 $\boldsymbol{H_i}$, м	Число станций $\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{P}$	ε мм	$\boldsymbol{P\varepsilon}$, мм	$\boldsymbol{P\varepsilon^2}$	$\boldsymbol{\upsilon}$, мм	$\boldsymbol{P\upsilon}$, мм	$\boldsymbol{P\upsilon^2}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 2 3	403,895 403,883 403,890	4 7 5	2,50 1,43 2,00	+12 0 +7	+30,0 0,0 +14,0	360,0 0,0 98,0	5 -7 0	+12,5 -10,0 0,0	62,5 70,1 0,0
H H_0 $H_{ок}$ δ	403,883 403,8904 403,890 +0,4 мм	Σ 132,6	5,93	+19	+44,0	458,0	-2		+2,5
		$\mu = \pm 8{,}1\,мм;\quad M_0 = \pm 3{,}3\,мм;\quad m_h = \pm 2{,}6\,мм;$							
		$\underline{H_{29} = \mathbf{403,890 \pm 0,033}}$ м							

Обработку результатов неравноточных измерений выполняют в следующей последовательности:

1. В графе 1 табл. 7 выписывают из табл. 6 номера нивелирных ходов (см. рис. 4), в графе 2 – высоты репера №29, полученные при проложении нивелирных ходов 1, 2, 3.

2. Выбирают приближенное значение H' высоты репера №29 как наименьшее из H_i, т.е. $H' = H_{i,\,min}$, в нашем случае $H' = 403{,}883$ м.

3. В графу 3 заносят число станций n в каждом нивелирном ходе.

4. В четвертой графе записывают веса P_i результатов измерений для каждого хода, вычисляемые по формуле

$$p_i = \frac{\lambda}{n_i} \tag{129}$$

где λ = 10 - коэффициент, значение которого выбирают таким образом, чтобы величины весов были близкими к единице.

Формула (129) получена из следующих рассуждений. Считая результаты определения превышения h на каждой j–й станции равноточными, примем в качестве весов p_j этих результатов число λ, т.е.

$$\lambda = p_j = \frac{\mu^2}{m_h^2}, \tag{130}$$

где m_h – средняя квадратическая погрешность определения превышений на станции.

Веса результатов определения высоты репера №29 в каждом i-м нивелирном ходе равны

$$p_j = \frac{\mu^2}{m_i^2}, \tag{131}$$

где $m_i = m_h\sqrt{n_i}$ - средние квадратические погрешности определения высоты репера №29 в каждом нивелирном ходе; n_i – число станций в каждом ходе.

На основании формул (109) можем записать

$$\frac{p_i}{p_h} = \frac{p_i}{\lambda} = \frac{m_h^2}{m_i^2},$$

откуда $$p_i = \lambda\frac{m_h^2}{m_i^2} = \lambda\frac{m_h^2}{m_h^2 n} = \frac{\lambda}{n}.$$

5. Уклонения $\varepsilon_i = H_i - H'$ заносят в графу 5 табл. 7.

6. В графы 6 и 7 записывают произведения $p_i\varepsilon_i$, $p_i\varepsilon_i^2 = p_i\varepsilon_i\varepsilon_i$ и их суммы.

7. По формуле (101) вычисляют наиболее точное по вероятности значение высоты репера №29:

$$H_0 = H_{29} = H' + \frac{[p\varepsilon]}{[p]} = 403{,}883 + \frac{44{,}0}{5{,}93} = 403{,}8904 \text{ м.}$$

8. Это значение округляют до 0,001 м. Вычисляют уклонения результатов определения высоты репера №29 по каждому ходу от округленного значения общей арифметической середины, т.е. $v_i = H_i - H_{0,\text{окр.}}$, которые записывают в графу 8.

9. В графах 9 и 10 получают произведения $p_i v_i$ и $p_i v_i^2 = p_i v_i v_i$, их суммы с контролем $[pv] = \delta[p]$; $[pv^2] = [p\varepsilon^2] - \frac{[p\varepsilon]^2}{[p]}$, где $\delta = H_0 - H_{0,\text{окр.}} = +0{,}4$ мм - погрешность округления общей арифметической середины.

10. По формулам (124) и (114) вычисляют:

- среднюю квадратическую погрешность единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{N-1}} = \sqrt{\frac{132{,}6}{2}} = \pm 8{,}1 \text{ мм;}$$

- среднюю квадратическую погрешность общей арифметической середины

$$M_0 = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{8{,}1}{\sqrt{5{,}93}} = \pm 3{,}3 \text{ мм,}$$

где $\boldsymbol{N}$ – число нивелирных ходов.

11. Среднюю квадратическую погрешность определения превышений на каждой станции находят из выражения

$$m_h = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} = \frac{8{,}1}{\sqrt{10}} = \pm 2{,}6 \text{ мм.}$$

12. По формуле $m_{H_i} = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}$ вычисляют средние квадратические погрешности определения высоты репера №29 по каждому нивелирному ходу

$$m_{H_1} = \frac{8{,}1}{2{,}50} = \pm 5{,}1 \text{ мм;} \quad m_{H_2} = \frac{8{,}1}{1{,}43} = \pm 6{,}8 \text{ мм;} \quad m_{H_3} = \frac{8{,}1}{2{,}00} = \pm 5{,}8 \text{ мм.}$$

13. Окончательное значение высоты репера №29 записывают в виде

$$\text{Н}_{29} = \text{Н}_{0,\text{окр.}} \pm \text{М}_0 = 403{,}890 \pm 0{,}033 \text{ м.}$$