



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»



УТВЕРЖДАЮ  
Директор ИЕиС  
И.Ю. Мезин

30.01.2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ**

Направление подготовки (специальность)  
01.04.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль/специализация) программы  
Математическое моделирование и цифровые двойники

Уровень высшего образования - магистратура

Форма обучения  
очная

|                     |                                          |
|---------------------|------------------------------------------|
| Институт/ факультет | Институт естествознания и стандартизации |
| Кафедра             | Прикладной математики и информатики      |
| Курс                | 1                                        |
| Семестр             | 2                                        |

Магнитогорск  
2023 год

Рабочая программа составлена на основе ФГОС ВО - магистратура по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика (приказ Минобрнауки России от 10.01.2018 г. № 13)

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры Прикладной математики и информатики

17.01.2023, протокол № 5

Зав. кафедрой



Ю.А. Извеков

Рабочая программа одобрена методической комиссией ИЕиС

30.01.2023 г. протокол № 5

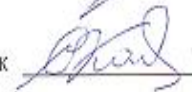
Председатель



И.Ю. Мезин

Рабочая программа составлена:

профессор кафедры ПМИИ, д-р физ.-мат. наук



С.И.

Кадченко

Рецензент:

доцент кафедры Физики, канд. физ.-мат. наук



Д.М.

Долгушин

### **1 Цели освоения дисциплины (модуля)**

формирование у студентов знаний математических методов, алгоритмов, приобретение практических навыков разработки математических моделей физических и технических систем. Формирование компетенций в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»

### **2 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы**

Дисциплина Численные методы решения начально-краевых задач входит в обязательную часть учебного плана образовательной программы.

Для изучения дисциплины необходимы знания (умения, владения), сформированные в результате изучения дисциплин/ практик:

Дополнительные главы функционального анализа

Знания (умения, владения), полученные при изучении данной дисциплины будут необходимы для изучения дисциплин/практик:

Выполнение и защита выпускной квалификационной работы

### **3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) и планируемые результаты обучения**

В результате освоения дисциплины (модуля) «Численные методы решения начально-краевых задач» обучающийся должен обладать следующими компетенциями:

| Код индикатора | Индикатор достижения компетенции                                                                                                         |
|----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ОПК-2          | Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач                                           |
| ОПК-2.1        | Производит научные исследования для совершенствования и реализации новых математических методов решения прикладных задач                 |
| ОПК-2.2        | Оценивает результаты новых научных разработок по совокупности методологических признаков для выбора оптимальных решений прикладных задач |
| ОПК-2.3        | Систематизирует и обобщает опыт для обоснования выбора оптимального решения прикладных задач                                             |

#### 4. Структура, объём и содержание дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единиц 144 акад. часов, в том числе:

- контактная работа – 57,6 акад. часов;
- аудиторная – 51 акад. часов;
- внеаудиторная – 6,6 акад. часов
- самостоятельная работа – 51 акад. часов;
- подготовка к экзамену – 35,4 акад. часа

Форма аттестации - курсовая работа, экзамен

| Раздел/ тема дисциплины                                                                                        | Семестр | Аудиторная контактная работа (в акад. часах) |           |             | Самостоятельная работа студента | Вид самостоятельной работы                                   | Форма текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации       | Код компетенции               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|----------------------------------------------|-----------|-------------|---------------------------------|--------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
|                                                                                                                |         | Лек.                                         | лаб. зан. | практ. зан. |                                 |                                                              |                                                                       |                               |
| 1. Основные подходы и методы решения начально-краевых задач                                                    |         |                                              |           |             |                                 |                                                              |                                                                       |                               |
| 1.1 Основные понятия теории сеток. Аппроксимация простейших параболических и гиперболических задач.            | 2       |                                              | 4         |             | 23                              | изучение литературы, выполнение лабораторной работы          | Устный опрос, собеседование, проверка выполнения лабораторной работы  | ОПК 2.1<br>ОПК 2.2<br>ОПК 2.3 |
| 1.2 Численные методы решения задачи Коши. Методы Рунге-Кутты. Методы с контролем погрешности на временном шаге |         |                                              | 7         |             | 28                              | изучение литературы, проверка выполнения лабораторной работы | устный опрос, собеседование, проверка выполнения лабораторной работы. | ОПК 2.1<br>ОПК 2.2<br>ОПК 2.3 |
| 1.3 Примеры решения начально-краевых задач для уравнения диффузии.                                             |         |                                              | 6         |             | 34                              | Изучение литературы, выполнение лабораторной работы          | Устный опрос, собеседование. Проверка выполнения лабораторной работы  | ОПК 2.1<br>ОПК 2.2<br>ОПК 2.3 |
| Итого по разделу                                                                                               |         |                                              | 17        |             | 85                              |                                                              |                                                                       |                               |
| Итого за семестр                                                                                               |         |                                              | 17        |             | 85                              |                                                              | экзамен,кр                                                            |                               |
| Итого по дисциплине                                                                                            |         |                                              | 17        |             | 85                              |                                                              | курсовая работа, экзамен                                              |                               |

## **5 Образовательные технологии**

В ходе изучения дисциплины используются образовательные и информационные технологии:

1. Традиционные технологии обучения, предполагающие передачу информации в готовом виде, формирование учебных умений по образцу: лабораторные работы.

Использование традиционных технологий обеспечивает ориентирование студента в потоке информации, связанной с различными подходами к определению сущности, содержания, методов, форм развития и саморазвития личности; самоопределение в выборе оптимального пути и способов личностно-профессионального развития; систематизацию знаний, полученных студентами в процессе аудиторной и самостоятельной работы. Лабораторные занятия обеспечивают развитие и закрепление умений и навыков определения целей и задач саморазвития, а также принятия наиболее эффективных решений по их реализации.

2. Информационно-коммуникационные образовательные технологии – организация образовательного процесса, основанная на применении специализированных программных сред и технических средств работы с информацией.

Лабораторные занятия проводятся в компьютерных классах вычислительного центра ФГБОУ ВО «МГТУ». В ходе проведения лекционных занятий предусматривается:

- использование электронного демонстрационного материала по темам, требующим иллюстрации работы программных продуктов: MS Word, MS Excel, MS PowerPoint.

- в ходе проведения лабораторные работ предусматривается использование математического пакета MAPLE при выполнении индивидуальных заданий.

- использование образовательного портала ФГБОУ ВО «МГТУ».

### **4. Проблемная технология обучения**

Методика ориентирована на лабораторные работы поисково-исследовательского типа

Обмен информацией, полученной студентами в ходе самостоятельного поиска и исследования по поставленной проблеме, рекомендуется организовать в рамках лабораторных работ. Ценность данной формы занятий в том, что в процессе обсуждения можно высказать собственное мнение и попытаться доказать его правильность.

При изучении дисциплины для каждого раздела предлагается перечень вопросов для самоконтроля. Возможны три варианта использования данных вопросов при изучении теоретического материала: либо для контроля полученных студентами знаний по окончании изучения раздела, либо для обсуждения каждого вопроса как мини-проблемы в ходе лабораторной работы, либо то и другое в определенном сочетании. Допускается иная постановка вопросов преподавателем, а самостоятельная формулировка студентами вопросов для обсуждения при выполнении лабораторной работы только приветствуется. Лабораторные работы поисково-исследовательского типа не только способствуют углубленной проработке теоретического материала предмета на протяжении всего изучения курса, но и развивают творческую самостоятельность студентов, способность к обобщениям, укрепляя их интерес к исследованиям, содействуя выработке практических навыков работы.

## **6 Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Представлено в приложении 1.

## **7 Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации**

Представлены в приложении 2.

## **8 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)**

### **а) Основная литература:**

Лобанов, А. И. Математическое моделирование нелинейных процессов : учебник для вузов / А. И. Лобанов, И. Б. Петров. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 255 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-8897-0. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/452200> (дата обращения: 19.05.2021).

### **б) Дополнительная литература:**

1. Зализняк, В. Е. Численные методы. Основы научных вычислений : учебник и практикум для вузов / В. Е. Зализняк. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 356 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02714-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/449891> (дата обращения: 19.04.2020).

2. Крылов В.И. Вычислительные методы. Т. II / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырский. Главная редакция физико-математической литературы изд-во «Наука», М., 1977.

3. Березин И.С. Методы вычислений. Т. II / И.С. Березин, Н.П. Жидков. Государственное издательство физико-математической литературы. М. 1960.

4. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Э. Хайкер, С. Нерсетт, Г. Ваннер. Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 512 с.

5. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. Пер. с англ. — М.: Мир, 1999. — 685 с.

6. Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука, 1997. 195 с.

7. Хайнер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений, Нежесткие задачи: Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 512 с.

8. Новиков Е.А. Контроль устойчивости метода Фельберга седьмого порядка точности / Е.А. Новиков, Ю.В. Шорников. Вычислительные технологии. — 2006. Т. 11, № 4. С. 65-72.

9. Новиков Е.А. Разработка алгоритмов переменной структуры для решения жестких задач: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Е.А. Новиков, 2014. — 123 с.

### **в) Методические указания:**

Емельянов, В. Н. Численные методы: введение в теорию разностных схем : учебное пособие для вузов / В. Н. Емельянов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 188 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-06617-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/453264> (дата обращения: 19.04.2020).

Пименов, В. Г. Численные методы в 2 ч. Ч. 2 : учебное пособие для вузов / В. Г. Пименов, А. Б. Ложников. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 107 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10891-0. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/454053> (дата обращения: 19.04.2020).

### г) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

#### Программное обеспечение

| Наименование ПО                        | № договора                   | Срок действия лицензии |
|----------------------------------------|------------------------------|------------------------|
| MS Windows 7 Professional(для классов) | Д-1227-18 от 08.10.2018      | 11.10.2021             |
| MS Office 2007 Professional            | № 135 от 17.09.2007          | бессрочно              |
| 7Zip                                   | свободно распространяемое ПО | бессрочно              |
| Maple 14 Classroom License             | К-113-11 от 11.04.2011       | бессрочно              |
| NotePad++                              | свободно распространяемое ПО | бессрочно              |
| Adobe Reader                           | свободно распространяемое ПО | бессрочно              |

#### Профессиональные базы данных и информационные справочные системы

| Название курса                                                                                   | Ссылка                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| Международная справочная система «Полпред» polpred.com отрасль «Образование, наука»              | URL: <a href="http://education.polpred.com/">http://education.polpred.com/</a>               |
| Национальная информационно-аналитическая система – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) | URL: <a href="https://elibrary.ru/project_risc.asp">https://elibrary.ru/project_risc.asp</a> |
| Поисковая система Академия Google (Google Scholar)                                               | URL: <a href="https://scholar.google.ru/">https://scholar.google.ru/</a>                     |
| Информационная система - Единое окно доступа к информационным ресурсам                           | URL: <a href="http://window.edu.ru/">http://window.edu.ru/</a>                               |

#### 9 Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Материально-техническое обеспечение дисциплины включает:

Учебные аудитории для проведения лабораторных занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации  
Персональные компьютеры с пакетом MS Office, вы-ходом в Интернет и с доступом в электронную информационно-образовательную среду университета;

Комплекс тестовых заданий для проведения рубежного и промежуточного контроля

Помещения для самостоятельной работы обучающихся  
Персональные компьютеры с пакетом MS Office, вы-ходом в Интернет и с доступом в электронную информационно-образовательную среду университета

Помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования  
Шкафы для хранения учебно-методической документации, учебного оборудования и учебно-наглядных пособий

## Приложение 1. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

### *Перечень вопросов для подготовки к экзамену:*

1. Конечно-разностные методы.
2. Явные схемы.
3. Решение задачи Коши с помощью формулы Тейлора.
4. Методы Рунге-Кутты.
5. Оценка погрешности и сходимости методов Рунге-Кутты.
6. Практическая оценка погрешности и выбор длины шага.
7. Методы с проверкой погрешности на временном шаге.
8. Методы использующие старшие производные.
9. Решение начально-краевой задачи для уравнения диффузии.
10. Многошаговые методы. Экстраполяционные методы Адамса.
11. Интерполяционные методы Адамса.
12. Методы с контролем погрешности на шаге.

### *Примерное задание к лабораторной работе*

Решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения

$$13. \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad a^2 = 0,1, \quad 0 < x < l$$

при следующих начальных  $uT(x,0) = 20\left(1 + \frac{x}{l}\right) + 10x(l-x)$  и граничных  $T(0,t) = 20$ ,

$T(l,t) = 40$  условиях.

Построить дискретизацию области конечно - разностным методом.

Для нахождения вычислительного решения использовать чисто явную схему

$$T_{j,n+1} = T_{j,n} + s(T_{j-1,n} - 2T_{j,n} + T_{j+1,n}), \quad s = \frac{a^2 \Delta t}{\Delta x^2}.$$

**Проверить, при каких значениях  $s$  схема будет устойчивой?**

**Приложение 2. Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации**

| Код индикатора               | Индикатор достижения компетенции                                                                                                         | Оценочные средства                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Код и содержание компетенции |                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| ОПК-2.1:                     | Производит научные исследования для совершенствования и реализации новых математических методов решения прикладных задач                 | <p><b>Решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения</b></p> $\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \alpha^2 \left( \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} \right), \quad 0 < x < a, \\ 0 < y < b$ <p>при следующих начальных</p> $u(x,y,0) = u_0(x,y) \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b \quad \text{и}$ <p>граничных</p> $u(0,y,t) = Y_0(y,t), \\ u(a,y,t) = Y_a(y,t), \quad 0 \leq y \leq b, \quad t > 0, \\ u(x,0,t) = X_0(x,t), \\ u(x,b,t) = X_b(x,t), \quad 0 \leq x \leq a, \quad t > 0$ <p>условиях.</p> <p>Построить дискретизацию области конечно - разностным методом.</p> <p>Для нахождения вычислительного решения использовать явную схему</p> $u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + s_x u_{i-1,j}^n - 2(s_x + s_y) u_{i,j}^n + s_x u_{i+1,j}^n + s_y u_{i,j-1}^n + s_y u_{i,j+1}^n,$ $s_x = \frac{a^2 \Delta t}{\Delta x^2}, \quad s_y = \frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta y^2}.$ <p>Для вычислительных экспериментов надо задать:</p> $a = b = 1, \quad u_0 = xy(a-x)(b-y), \\ Y_0 = 20, \quad Y_a = 40, \\ X_0 = 30, \quad X_b = 50.$ |
| ОПК-2.2:                     | Оценивает результаты новых научных разработок по совокупности методологических признаков для выбора оптимальных решений прикладных задач | <p><b>Решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения</b></p> $\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2} \right), \quad a^2 = 0,1, \quad 0 < x < l, \\ 0 < y < b$ <p>при следующих начальных</p> $T(x,0) = (l-x)(b-y) \quad \text{и}$ <p>граничных</p> $T(0,y,t) = \sin(y), \\ T(l,y,t) = \cos(y), \quad T(x,0,t) = \sin(x), \quad T(x,b,t) = \cos(x)$ <p>условиях.</p> <p>Построить дискретизацию области конечно - разностным методом.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |

|          |                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|          |                                                                                              | <p><i>Для нахождения вычислительного решения использовать чисто явную схему</i></p> $T_{j,n+1} = T_{i,j,n} + s_x T_{i-1,j,n} - 2(s_x + s_y) T_{i,j,n} + s_x T_{i+1,j,n} + s_y T_{i,j-1,n} + s_y T_{i,j+1,n}$ <p style="text-align: center;">,</p> $s_x = \frac{a^2 dt}{dx^2}, \quad s_y = \frac{a^2 dt}{dy^2}.$ <p><i>Проверить, при каких значениях s схема будет устойчивой?</i></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| ОПК-2.3: | Систематизирует и обобщает опыт для обоснования выбора оптимального решения прикладных задач | <p><b>Решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения</b></p> $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2} \right), \quad a^2 = 0,1, \quad 0 < x < l, \quad 0 < y < b$ <p>при следующих начальных <math>T(x,0) = (l-x)(b-y)</math> и граничных <math>T(0,y,t) = \sin(y)</math>, <math>T(l,y,t) = \cos(y)</math>, <math>T(x,0,t) = \sin(x)</math>, <math>T(x,b,t) = \cos(x)</math> условиях.</p> <p><i>Построить дискретизацию области конечно - разностным методом.</i></p> <p><i>Для нахождения вычислительного решения использовать явную схему</i></p> $-s_x T_{i-1,j,n+1} - s_y T_{i,j-1,n+1} + [1 + 2(s_x + s_y)] T_{i,j,n+1} - s_x T_{i+1,j,n+1} - s_y T_{i,j+1,n+1} = T_{i,j,n}$ <p style="text-align: center;">,</p> $s_x = \frac{a^2 \Delta t}{\Delta x^2}, \quad s_y = \frac{a^2 \Delta t}{\Delta y^2}.$ |

**б) Порядок проведения промежуточной аттестации, показатели и критерии оценивания:**

Промежуточная аттестация по дисциплине включает теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень усвоения обучающимися знаний, и практические задания, выявляющие степень сформированности умений и владений, проводится в форме экзамена.

Экзамен по дисциплине проводится по результатам отчетности на лабораторных работах с опросом в устной форме по билетам экзамена.

**Показатели и критерии оценивания экзамена:**

- на оценку **«отлично»** (5 баллов) – обучающийся демонстрирует высокий уровень сформированности компетенций, всестороннее, систематическое и глубокое знание учебного материала, свободно выполняет практические задания, свободно оперирует знаниями, умениями, применяет их в ситуациях повышенной сложности.
- на оценку **«хорошо»** (4 балла) – обучающийся демонстрирует средний уровень сформированности компетенций: основные знания, умения освоены, но допускаются незначительные ошибки, неточности, затруднения при аналитических операциях, переносе знаний и умений на новые, нестандартные ситуации.
- на оценку **«удовлетворительно»** (3 балла) – обучающийся демонстрирует пороговый уровень сформированности компетенций: в ходе контрольных мероприятий допускаются ошибки, проявляется отсутствие отдельных знаний, умений, навыков, обучающийся испытывает значительные затруднения при оперировании знаниями и умениями при их переносе на новые ситуации.
- на оценку **«неудовлетворительно»** (2 балла) – обучающийся демонстрирует знания не более 20% теоретического материала, допускает существенные ошибки, не может показать интеллектуальные навыки решения простых задач.
- на оценку **«неудовлетворительно»** (1 балл) – обучающийся не может показать знания на уровне воспроизведения и объяснения информации, не может показать интеллектуальные навыки решения простых задач.

